Math. P. 181 m
Kuhn

DESCRIPTIVE

GEOMETRIE

MIT EINSCHLUSS

DER PRINCIPIEN

DER

ISOMETRISCHEN

PROJECTIONSLEHRE

FÜR

SCHULEN UND ZUM SELBSTUNTERRICHTE

BEARBEITET VON

C. KUHN,

Professor der Analysis und angewandten Mathematik an der königlichen polytechnischen Schule

zu Augsburg.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

AUGSBURG.

VERLAG VON V. ZANNA & COMP.

186 D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Das vorliegende Lehrbuch soll dem Selbslernenden den Weg zeigen, welchen er einzuschlagen hat, um sich die nothwendigsten Kenntnisse der descriptiven Geometrie eigen machen zu können, und den verehrlichen Lehrern dieses Gegenstandes zum Leitfaden bei ihrem Unterrichte an technischen Lehranstalten dienen. — Was nun die Art und Weise der Abfassung und Anwendung der in diesem Buche abgehandelten Gegenstände betrifft, so hatte ich besonders den Anfänger im Auge, und begann daher mit demjenigen Theile der Geometrie, auf welchen die descriptive Geometrie basirt ist, und welcher in den Principien der Projektionslehre seine grösste Anwendung findet. Dieser Theil in Verbindung mit der Lehre von den Polyedern ist für das erste Buch der descriptiven Geometrie gleichsam das, was das die Planimetrie für die Construktionen in der Ebene ist. Ausser diesem unter dem Namen „Geometrie im Raume" vorkommenden Kapitel ist wohl für den Anfänger das erste Buch, welches die geraden Linien, Ebenen und Polyeder behandelt, das wichtigste, weil durch dieses zuerst die Anschauung geübt werden muss, um alles Folgende verstehen zu können. — Da nun ein sehr behutsamer Weg nothwendig ist, um den Lernenden in dem vorliegenden Gegenstand einzuführen, so hielt ich mich beim ersten Buche am längsten auf, versuchte es, jede darin vorkommende Aufgabe zuerst allgemein ohne Berücksichtigung eines besonderen Falles zu lösen, und wendete dann nach gegebener allgemeiner Lösung die Aufgabe auf einzelne Beispiele an. Dabei liess ich aber auch nicht aus dem Auge, zu zeigen, dass die descriptive Geometrie die Construktionen desjenigen liefert, was die analytische Geometrie in Gleichungen vorstellt. —

In diesem ersten Buche erwähnte ich eine Projektionsmethode, die beim Aufnehmen von Maschinen und Werkzeugen viel Bequemlichkeit darbietet, nämlich die isometrische Projektionslehre. Mehr als die Principien derselben und einige Beispiele über die entwickelten Regeln anzugeben, erlaubten mir die Gränzen dieses Buches nicht, weshalb ich auch die isometrischen Projektionen krummer Linien und Flächen weglassen musste. Uebrigens wird man sich bei den isometrischen Projektionen von Curven nicht schwer thun, weil die Regeln, welche für die isometrische Projektion von Polygonen so genau als möglich gegeben wurden. Im zweiten Buche musste ich mich so kurz als möglich bei einzelnen Kapiteln aufhalten, weil mir die Gränzen im Umfange des Buches festgesetzt waren. So konnte ich über Erzeugung

der Flächen nur das Wichtigste sagen und Manches, was zur Vollständigkeit des Lehrbuches nothwendig gewesen wäre, konnte nur kurz berührt, oder musste ganz weggelassen werden. Deshalb behalte ich mir vor, in einem eigenen isolirten Anhange das zu ergänzen, mit welchem ich dieses Buch noch zu versehen beabsichtigte. Derselbe wird ausser einer ausführlichen Abhandlung über die windschiefen und nicht abwickelbaren Flächen überhaupt, noch die Theorie und Construktion der Curven abhandeln, welche bei Verzahnungen ihre Anwendnug finden, manche andere Uebungsaufgaben enthalten, und die Principien der Schattenkonstruktion sowie die der Linear-Perspective liefern. —

Uebrigens ist der von mir im Auge gehabte Zweck, nämlich den Lernenden in den Gegenstand gehörig einzuführen, erfüllt, und sollten desfalls von den verehrlichen Lehrern der descriptiven Geometrie noch Wünsche an mich gemacht werden, so werde ich dieselben mit Dank annehmen, und berücksichtigen so weit es mir möglich ist. —

Zum Schlusse bitte ich einiger sich beim Drucken des Textes und Graviren der Zeichnungen eingeschlichen und übersehenen Fehler halber um Entschuldigung, und erlaube mir die verehrlichen Leser auf ein in Fig. 121. vorgekommenes Versehen aufmerksam zu machen, worin die in Beispiel 2. des §. 173. beschriebene Construktion zur Aufsuchung der Durchgangspunkte der Kanten des gegebenen Prisma mit der Schnittebene nicht berücksichtiget ist, und bloss die andere angezeigte Construktion, welche aber auch die Aufgabe vollständig löste, gezeichnet wurde. —

Augsburg im Juli 1844.

K.

Inhalts - Verzeichniss.

ERSTES BUCH.

Erste Abtheilung.

Seite

Einleitung.

Zweck und Mittel der darstellenden Geometrie §. 1. — §. 3. . . 3

Erstes Kapitel.

Geometrie im Raume.

Ebene, Erzeugung derselben, Gerade und Ebene, Bestimmung der Lage einer Ebene §. 4. — §. 11. 4

Senkrechte Gerade und Ebene, Communsektion zweier Ebenen, Abstand eines Punktes von einer Ebene, Winkel einer Geraden mit einer Ebene §. 12. — §. 24. 5

Parallelismus von Geraden und Ebenen und zugehörige Sätze §. 25. — §. 39. 8

Winkel zweier Ebenen und zugehörige Sätze, senkrechte Ebenen, Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen und Nebenwinkel des letzteren §. 40 — §. 50. 11

Zwei oder mehrere Gerade, die in verschiedenen Ebenen liegen, kürzester Abstand zweier solcher Geraden §. 51. — §. 53. . 13

Körperliche Ecke, regelmässige Körper §. 54. — §. 56. 14

Zweite Abtheilung.

Zweites Kapitel.

Schiefe Projektionen.

Aus zwei Projektionen eines Punktes den letzteren zu bestimmen, Coordinatenebenen und Sätze für die Projektionen eines Punktes §. 57. — §. 62. 16

Rechtwinklige Projektionen.

Projektionen eines Punktes, Coordinaten desselben, Kennzeichen für seine Lage, aus zwei Projektionen die dritte anzugeben und die Lage des Punktes §. 63. — §. 70. 18

Projektionen einer Geraden, Projektionen eines auf einer Geraden liegenden Punktes, Projektionen der Theile einer Geraden, Senkrechte und zu den Tafeln parallele Gerade §. 71. — §. 75. 23

Projektionen paralleler und sich schneidender Geraden, Projektionen einer Figur §. 75. — §. 78 25

Spuren gerader Linien und Ebenen, aus zwei Spuren einer Ebene die dritte zu bestimmen, senkrechte Ebenen §. 79. — §. 83. 26

Eine Ebene und eine darauf senkrechte Gerade, parallele Ebenen §. 84. — 86. 29

Drittes Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

Die Länge einer begränzten Geraden anzugeben und Beispiele hierzu §. 87. — §. 92. 30

Die Spuren einer Geraden zu bestimmen und aus den Spuren die Gerade anzugeben, mit Beispielen §. 93. — 96. 34

Die Winkel anzugeben, welche eine Gerade mit den Tafeln macht, aus den Winkeln die Projektionen der Geraden anzugeben, Beispiele §. 97. — §. 99. 37

Vermischte Aufgaben §. 100. 39

Eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade, zwei parallele Gerade, drei Punkte oder durch eine Gerade und einen ausserhalb dieser gegebenen Punkt zu legen, mit Beispielen §. 101. — §. 106. 39

Aus den Spuren einer Ebene und einer Projektion eines Punktes die andere anzugeben, die Projektionen einer Lage der Erzeugenden der Ebene, Beispiele, §. 107. — 108. 41

Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die parallel einer andern Geraden ist §. 109. 43

Communsektion zweier Ebenen bei verschiedenen Lagen der Ebenen, Beispiele hierzu §. 110. — §. 113. 43

Den Durchgangspunkt einer Geraden mit einer Ebene zu suchen, die Entfernung eines Punktes von einer Ebene anzugeben, Beispiele, §. 114 — §. 117. 46

Durch einen Punkt eine Ebene zu ziehen, die mit einer gegebenen parallel ist; eine Ebene senkrecht auf eine Gerade zu legen; die Entfernung eines Punktes von einer Geraden anzugeben, Beispiele, §. 118. — §. 122. 47

Die Entfernung zweier paralleler Geraden und den kürzesten Abstand zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden anzugeben, Beispiele, §. 123. — §. 125. 49

Die Winkel zu finden, welche eine Ebene mit den Tafeln macht, aus diesen Winkeln die Spuren wieder zu bestimmen, Beispiele, §. 126. — §. 129. 50

Eine Ebene mit einem auf derselben liegenden Punkte in eine der Tafeln zu legen, umgekehrte Aufgabe, Beispiele, §. 130. — §. 133. 52

Den Winkel zweier Geraden, den einer Geraden und einer Ebene, und endlich den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen, Beispiele hierzu, §. 134. — §. 141. 54

Eine Gerade zu ziehen, die zwei oder drei gegebene Gerade schneidet, und gegebene Bedingungen erfüllt, Beispiele, §. 142. — §. 144. 58

Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer gegebenen einen bestimmten Winkel bildet, Beispiel, §. 145. — §. 146. 60

Einen Punkt um eine gegebene Axe zu drehen und die neuen Projektionen zu bestimmen, Beispiele, §. 147. — §. 148. . . . 61

Vermischte Aufgaben, §. 149 62

Dritte Abtheilung.

Viertes Kapitel.

Dreiseitiges körperliches Eck.

Erklärungen hierüber, Sätze über das Supplementareck, über körperliche Ecke überhaupt und über sphärische Dreiecke, §. 150. — §. 154. 64

Aus drei Bestimmungsstücken eines dreiseitigen körperlichen Eckes die drei übrigen Stücke und die Projektionen desselben zu finden, dieselben Aufgaben für das sphärische Dreieck, Beispiele, §. 155. — 160. 68

Fünftes Kapitel.

Polyeder.

Erklärungen, Erzeugungsarten des Prisma, parallele Schnitte desselben, Projektionen eines Prisma, §. 162. — §. 165 71

Die Projektionen eines Punktes des Prisma und die Spuren des letzteren zu bestimmen, Beispiele, §. 166. — §. 167. 73

Den Durchschnitt einer Ebene mit einem Prisma zu finden, Entwickelung des Prisma und des Schnittes, Beispiele, §. 168. — §. 175. 74

Erzeugung und Darstellung einer Pyramide, Schnitt einer Pyramide durch eine Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, ferner durch eine Ebene, welche durch das Centrum geht, §. 176. — §. 179. 80

Die Projektionen einer Pyramide und eines auf ihrer Oberfläche liegenden Punktes, so wie auch ihre Spuren anzugeben, Beispiel hierzu, §. 180. — §. 181. 80

Die Durchschnitte von einer Pyramide durch Ebenen, welche verschiedene Lagen haben können zu finden, Entwickelung der Pyramide und des Schnittes, Beispiele, §. 182. — §. 185. 81

Die Durchschnittslinie zweier Prismen zu finden, Beispiel, §. 186. — §. 187. 83

Die Durchdringungslinie eines Prisma und einer Pyramide, sodann den Durchschnitt zweier Pyramiden anzugeben, Beispiele, §. 188. — §. 190. 85

Ein auf der horizontalen Tafel senkrecht stehendes Parallelepipedum so zu drehen, dass seine Grundfläche mit dieser Tafel einen angegebenen Winkel bildet, Beispiel, §. 191. 87

Die fünf regelmässigen Körper §. 192. 88

Sechstes Kapitel.

Principien der isometrischen Projektionslehre.

Lehrsätze hierüber, §. 193. — 194. 89

Isometrische Projektion eines Würfels, isometrische Projektionen von Parallelepipeden, von ebenen Figuren, §. 195. — §. 198. 91

Isometrische Projektion eines beliebigen Prisma, einer Pyramide, Beispiele, §. 199 — §. 200. 93

Aus den isometrischen Projektionen einer begränzten Geraden ihre wahre Länge zu bestimmen, §. 201. 96

ZWEITES BUCH.

Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Construktion und Tangirung einiger ebener krummer Linien.

Entstehung einer Curve, Kreis und Tangenten desselben, §. 202. — §. 207. 99

Construktion der Ellipse und ihrer Tangenten, §. 208. — §. 212. 100

Parabel, Construktion und ihre Tangenten, §. 213. — §. 217. . 102

Hyperbel, Construktion und ihre Tangenten, §. 218 — §. 222. . 104

Zweites Kapitel.

Curven im Raume.

Enstehung einer Curve, Projektionen derselben, Projektionen eines auf derselben liegenden Punktes, aus zwei Projektionen die dritte anzugeben, §. 223 — §. 225 105

Aus einer Projektion einer ebenen Curve und den Spuren ihrer Ebene ihre andere Projektion anzugeben, Durchschnitt einer ebenen Curve mit einer Ebene, Beispiele, §. 226. — §. 228. 107

Zweite Abtheilung.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen, Tangirung und Durchschnitte derselben durch Ebenen.

Seite

Drittes Kapitel.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen.

Erklärungen, Darstellung einer Fläche, Tangentialebene derselben, §. 229. — §. 231. 110
Allgemeine Erzeugungsart der entwickelbaren Flächen, Eigenschaften derselben und ihrer Tangentialebenen, §. 232. — §. 233. . 111
Erzeugung des Cylinders, senkrechter und schiefer Cylinder etc. etc., Durchschnitte desselben mit Ebenen, die parallel zur Generatrix oder parallel zur Direktrix sind, §. 234. — §. 236. 111
Erzeugung des Conus, sein Mantel etc. etc., senkrechter Conus, Schnitte desselben durch Ebenen, welche durch sein Centrum gehen, oder die parallel zu seiner Direktrix sind, §. 237. — §. 240. 112
Einen Cylinder, dessen Direktrix und Generatrix gegeben ist, zu projiciren, seine Spuren zu bestimmen und einen Punkt seiner Oberfläche, dessen eine Projektion angegeben ist, zu projiciren. Beispiel, §. 241. — §. 242. 114
Aus der Direktrix eines Kegels und seinem Centrum seine Projektionen zu bestimmen und die vertikale Projektion eines Punktes seiner Oberfläche anzugeben, dessen horizontale Projektion bekannt ist. Beispiel, §. 243. 114
Sätze über die Entwickelung eines Cylinders, §. 244. 115
Entstehung der Schraubenlinie, Schraubengang, Höhe desselben, Construktion der Schraubenlinie, Entwickelung derselben, Zusammenstellung der Eigenschaften der Schraubenlinie, Tangente derselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 245 — 250. 115
Entstehung der Schraubenfläche und ihre Construktion, §. 251. . 119

Viertes Kapitel.

Tangirung der entwickelbaren Flächen.

Die Tangentialebene einer solchen Fläche hat eine Erzeugende mit derselben gemein, Regeln über die Construktion einer Tangentialebene für einen gegebenen Berührungspunkt, die Spuren einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche sind Tangenten der Spuren dieser Fläche, §. 252. — §. 254 . . 120
Zwei Tangentialebenen eines Cylinders schneiden sich nach einer Geraden, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, §. 255. 121
Die Projektion der Tangente einer Curve ist Tangente der Projektion der Curve für die entsprechende Projektion des Berührungspunktes, §. 256 121
Zwei Tangentialebenen eines Conus schneiden sich nach einer durch sein Centrum gehenden Geraden, §. 257. 122
Für einen auf einem Cylinder gegebenen Punkt eine Tangentialebene desselben zu bestimmen, Beispiel, §. 258. — §. 259. . 122
Bedingungen, welche die Tangentialebene eines Cylinders erfüllen kann, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist, §. 260. 123
Durch einen gegebenen Punkt, ferner parallel zu einer gegebenen Geraden eine Tangentialebene an einen Cylinder legen, eine Tangentialebene zu suchen, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, Beispiele, §. 261. — §. 265. 123
Es ist ein Punkt auf einer konischen Fläche gegeben, an diese für jenen Punkt eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 266. — §. 267 125
Man kann durch einen Punkt oder durch eine Gerade an einen Conus eine Tangentialebene legen; diese Aufgaben zu lösen, Beispiel, §. 268. — §. 272. 126
Tangentialebenen einer beliebigen abwickelbaren Fläche für den gegebenen Berührungspunkt, für einen ausserhalb der Fläche gegebenen Punkt oder parallel zu einer Geraden, §. 273. — §. 275. 127

Viertes Kapitel.

Durchschnitte der entwickelbaren Flächen durch Ebenen.

Durchschnitte überhaupt, Durchschnitt eines Cylinders oder eines Conus durch eine zu ihrer Direktrix parallele Ebene, §. 276. — §. 277 129
Ein senkrechter Cylinder ist von einer Ebene geschnitten, man soll 1. die Projektionen der Durchschnittslinie, 2. ihre wahre Grösse, 3. Tangenten derselben, 4. die Entwickelung des Cylinders und jener Linie angeben, Beispiel, §. 278. — 279. 129
Ein schiefer Cylinder ist durch eine Ebene geschnitten, man soll dieselben Aufgaben lösen, §. 280. 132
Den Durchschnitt einer beliebigen Curve mit einer Ebene anzugeben §. 281. 133
Entwickelung des Kegels §. 282. 133
Ein senkrechter Conus wird von einer Ebene geschnitten, die Durchschnittslinie und eine Tangente derselben anzugeben, und den Kegel zu entwickeln, Beispiel, §. 283. — §. 284. . 134
Die Durchschnittslinie eines schiefen Kegels zu finden und den letzteren zu entwickeln, §. 285 136

Dritte Abtheilung.

Von den krummlinig-erzeugten Flächen überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Rotationsflächen, Flächen vom zweiten Grade überhaupt und Umhüllungsflächen.

Seite

Entstehung einer Rotationsfläche, Axe, Meridian, Parallelkreis, Aequator, zweifache Erzeugung einer Rotationsfläche, verschiedene Arten der Rotationsflächen; Flächen vom zweiten Grade überhaupt, §. 286. — §. 290 138
Umhüllungsflächen, Umhüllte und Charakteristiken, Lehrsatz hierüber, §. 291. — §. 292. 140

Sechstes Kapitel.

Tangirung der Rotationsflächen und krummlinig erzeugter Flächen überhaupt.

Tangentialebenen überhaupt und Bedingungen, Lehrsätze hiefür; Construktion eines Meridians, §. 293. — §. 296. 141
Eine Tangentialebene für den gegebenen Berührungspunkt an einer Rotationsfläche, Beispiel, §. 297. — §. 298. 142
Rotationshyperboloid und Tangentialebene desselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 299. 144
Parallel mit einer gegebenen Ebene an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 300. 146
Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn sich der Berührungspunkt entweder auf einem gegebenen Meridian oder auf einem Parallelkreise befindet, Beispiele, §. 301. — §. 303 147
Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn der Parallelkreis oder der Meridian gegeben ist, auf dem sich der Berührungspunkt befinden soll, §. 304. — §. 305. 148

Siebentes Kapitel.

Tangirende Flächen.

Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche einen tangirenden Conus zu legen und die Berührungscurve zu suchen, §. 306. 148
Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche einen tangirenden Cylinder zu legen §. 307. 149
Durch eine Gerade eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, §. 308. 149
Tangentialebenen für mehrere Flächen zugleich, §. 309. — §. 313. 150

Vierte Abtheilung.

Von den windschiefen Flächen.

Achtes Kapitel.

Erzeugung und Tangirung derselben.

Erzeugung derselben, §. 314 — §. 316. 151
Das Hyperboloid mit einem Mantel, doppelte Erzeugungsart desselben, Tangentialebene desselben für einen gegebenen Berührungspunkt §. 317. — §. 318. 152
Das hyperboloische Parabololoid, doppelte Erzeugungsart desselben, Tangentialebene desselben, §. 319. — §. 320. 152
Verschiedene windschiefe Flächen, §. 321 — § 322. 153

Fünfte Abtheilung.

Durchdringung der Flächen unter sich.

Neuntes Kapitel.

Durchschnitte abwickelbarer Flächen unter sich.

Durchdringungslinie zweier Cylinder, §. 323. 154
Durchdringungslinie eines Cylinders und eines Kegels,
Durchdringung zweier Kegel, §. 324. 154

Zehntes Kapitel.

Durchdringung verschiedener Flächen unter sich.

Durchdringungslinie eines Cylinders und einer Kugel, dann eines Kegels und einer Rotationsfläche, §. 325. — §. 327. . . . 154
Die Durchdringungscurve einer windschiefen Fläche und einer Rotationsfläche und die Durchschnittslinie zweier Rotationsflächen zu finden, §. 328. — §. 331 155
Durchdringung eines Cylinders und einer windschiefen Fläche, §. 332. 156

Erstes Buch.

Erste Abtheilung.

Einleitung.

Geometrie im Raume.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Erste Abtheilung.

Einleitung.

§. 1.

Die descriptive Geometrie hat die Zeichnung körperlicher Formen und Grössen zum Gegenstande, so dass aus der Darstellung nicht allein auf die wahre Gestalt des Körpers, sondern auch auf seine Grösse, wenn derselbe begränzt ist, geschlossen werden kann.

§. 2.

Um ihren Zweck zu rereichen, benützt dieselbe die Geometrie im Raume, zeigt zuerst, wie man einen im Raume beliebig angegebenen Punkt bestimmen kann, betrachtet sodann die Erzeugung der übrigen geometrischen Grössen, zeigt mit Benützung der Geometrie, wie man aus dieser Erzeugung Mittel zur Darstellung finden kann.

§. 3.

Bekanntlich ist jede Gerade (nämlich gerade Linie) der Lage nach durch zwei sich auf derselben befindende Punkte bestimmt. Ist daher das Mittel angegeben, einen Punkt darzustellen, so wird es nicht schwierig sein, auch die Lage einer Geraden genau anzugeben. Eben so werden wir zeigen, wie eine Ebene durch Punkte oder durch Gerade, die sich auf der Ebene befinden sollen, der Lage nach bestimmt ist; daher wird man aus der Darstellung von Geraden in Verbindung mit den Eigenschaften, welche aus der Erzeugung einer Ebene hervorgehen, die Lage einer, also auch beliebig gegeneinander gestellter Ebenen im Raume durch Zeichnung bestimmen können. — Eben so leicht wird auch die Darstellung jeder beliebigen Fläche sein, wenn man auf ihre Erzeugung und auf die Darstellung der bei dieser Erzeugung benützten geometrischen Grössen Rücksicht nimmt. — Es ist daher auch einleuchtend, wie man körperliche Formen zu zeichnen im Stande sein wird, und aus der Zeichnung die wahre Gestalt des Körpers ersehen kann. —

Wir gehen daher vor Allem auf die Darstellung von Punkten, Linien und Ebenen über, erläutern die unumgänglich nothwendigen Sätze der räumlichen Geometrie, und begründen vermittelst derselben die Darstellung der genannten geometrischen Grössen.

Erstes Kapitel.

Von der Lage gerader Linien und Ebenen im Raume.

§. 4.

Erklärung. Ebene ist eine Fläche, auf welcher man eine Gerade in einer beliebigen Richtung sich denken kann, so dass diese überall in die Fläche fällt, wenn man sich beide beliebig weit ausgedehnt denkt.

Zusatz. Eine Gerade kann daher nicht theils in einer Ebene, theils ausserhalb derselben sich befinden, und wird mithin ganz und gar in der Ebene liegen, wenn nur zwei in ihr sich befindende Punkte in dieser Ebene sind.

§. 5.

Bewegt sich eine Gerade stets parallel zu ihrer anfänglichen Richtung und eine andere Gerade treffend fort, so wird der Raum, welchen diese sich bewegende Gerade durchläuft, eine ebene Fläche sein, oder Ebene. — Es wird aber auch eine Ebene dadurch erzeugt, indem sich eine Gerade, die stets durch einen und denselben Punkt geht, an einer andern Geraden fortbewegt. Die sich bewegende Gerade wird Erzeugende oder Generatrix, die Gerade aber, welche die Erzeugende bei ihrer Bewegung stets trifft: Directrix oder Leitlinie genannt. —

§. 6.

Eine Ebene wird von einer Geraden nur in einem Punkte getroffen, weil die Gränze einer Linie ein Punkt ist. Dieser Punkt, in welchem eine Ebene eine Gerade trifft, wird im Allgemeinen Durchgangspunkt der Geraden genannt; steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, so nennt man diesen Durchgangspunkt den Fusspunkt der Senkrechten.

§. 7.

Aus §. 5 kann man sogleich eine Erklärung ableiten, für eine auf einer Ebene senkrecht stehende Linie. Bleibt nämlich eine Gerade stets senkrecht auf der durch ihren Fusspunkt gehenden Erzeugenden der Ebene, so wird dieselbe auf dem geometrischen Orte, den diese Linie beschreibt, auch immer senkrecht sein, oder was dasselbe ist:

Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn dieselbe mit allen in der Ebene liegenden Geraden, die durch ihren Fusspunkt gehen, rechte Winkel bildet.

Anmerk. Sobald wir gezeigt haben, wodurch die Lage einer Ebene bestimmt ist, soll nachgewiesen werden, dass eine Gerade nur mit zweien durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss, um auch auf der Ebene selbst senkrecht zu sein.

§. 8.

Es wurde in den Paragraphen 4 und 5 gezeigt, welche Eigenschaften eine Fläche haben muss, damit dieselbe eine Ebene ist, und wie eine solche Ebene erzeugt werden kann. Nun sollen die Bedingungen aufgesucht werden, welche die Lage einer Ebene im Raume bestimmen.

Nimmt man eine Gerade im Raume beliebig an, und denkt durch diese eine Ebene gelegt, so wird man diese Ebene noch um die Gerade drehen können, ohne dass sie dabei letztere verlässt. Dreht man die Ebene nun so lange um die genannte Gerade, bis sie einen ausserhalb der letzteren angenommenen Punkt enthält, so wird man die Lage der Ebene jetzt nicht mehr verändern können, ohne dass dieselbe entweder den gegebenen Punkt oder die Gerade verlässt. Soll daher die Ebene die Gerade sowohl, als auch den Punkt enthalten; so darf dieselbe von nun an ihre Lage nicht mehr verändern. Hieraus folgt aber sogleich der Satz:

Die Lage einer Ebene ist durch eine Gerade und einen ausserhalb dieser letzteren angenommenen Punkt bestimmt.

§. 9.

Es seien nun drei nicht in einer Geraden sich befindende Punkte im Raume angegeben; so kann man durch zwei derselben sich eine Gerade gelegt denken, welche der Lage nach vollkommen bestimmt sein wird. Durch diese Gerade und den dritten Punkt kann man sich aber nach vorigem §. eine Ebene gelegt denken, die der Lage nach völlig bestimmt ist. Diese Ebene enthält aber zugleich die beiden ersten Punkte, weil letztere auf einer Geraden sich befinden, die in der Ebene liegt; mithin können wir sagen:

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte kann man eine Ebene legen, und die Lage dieser Ebene ist durch diese drei Punkte völlig bestimmt.

§. 10.

Es seien zwei sich schneidende Gerade im Raume gegeben; man soll untersuchen, ob durch diese eine Ebene gelegt werden kann, welche der Lage nach völlig bestimmt ist. — Denkt man sich daher durch die erste der beiden Geraden eine Ebene gelegt, so kann man dieser offenbar noch eine solche Lage geben, dass sie einen in der zweiten Geraden enthaltenen Punkt enthält. Ist diess aber geschehen, so ist die Lage der Ebene (nach §. 8.) eine bestimmte, und es enthält zugleich die Ebene (nach §. 4.) die zweite Gerade, weil von letzterer sich zwei Punkte in jener befinden, mithin kann man

durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene legen, deren Lage völlig bestimmt ist.

§. 11.

Endlich soll untersucht werden, ob durch zwei unter sich parallele Gerade die Lage einer Ebene bestimmt ist.

Geht man hierbei von der Euclid'schen Definition aus, nämlich: „zwei Gerade sind parallel, wenn dieselben beliebig weit verlängert sich nicht schneiden, und in einer Ebene liegen"; so kann man sich durch zwei parallele Gerade eine Ebene denken. Da aber diese Ebene die erste Gerade und jeden beliebigen auf der zweiten Geraden angenommenen Punkt enthält, so ist auch ihre Lage bestimmt (nach §. 8.). —

Benützt man die Definition: zwei Gerade sind parallel, wenn sie gegen eine dritte auf derselben Seite gleiche Richtung gegen einander behalten; so kann man sich die beiden Parallelen durch eine dritte Gerade geschnitten denken. (Fig. 1.) Die beiden parallelen Geraden seien nun P_1 und P_2, die dritte Gerade sei durch L bezeichnet. Durch L und P_1 kann man sich (nach §. 10.) eine Ebene gelegt denken, und diese muss nun auch P_2 enthalten; denn ein Punkt der P_2 ist schon in der Ebene, nämlich der Durchschnittspunkt von L und P_2, und und würde nicht noch ein zweiter beliebig in P_2 angenommener in die Ebene fallen, so denke man sich in dieser Ebene durch den Punkt, in welchem P_2 von L getroffen wird, eine Gerade $'P$ so gezogen, dass der Winkel, welchen $'P$ mit L bildet, gleich dem auf derselben Seite liegenden Winkel wird, den P_1 mit L bildet. Es wäre nun nach der Definition $'P \neq P_1$, was aber nicht sein kann, weil man nach einem Satze der ebenen Geometrie: durch einen und denselben Punkt nur eine Gerade mit einer andern parallel ziehen kann; mithin muss $'P$ mit P_2 zusammenfallen. Da aber $'P$ in der durch

L und P_1 gelegten Ebene sich befindet, so wird diess auch von P_2 der Fall sein. Es folgt also auch aus dieser Definition, dass man durch zwei parallele Gerade eine Ebene legen kann, welche dann der Lage nach völlig bestimmt ist.

Legt man endlich die dritte in den Lehrbüchern der ebenen Geometrie herrschende Definition zu Grunde: zwei Gerade sind parallel, wenn sie überall gleiche senkrechte Abstände von einander haben; so kann man sich zum Zwecke der vorliegenden Untersuchung eine Gerade denken, die auf beiden senkrecht steht, durch diese und P_1 eine Ebene legen, welche dann auch P_2 enthalten muss. (Fig. 1.) Wäre dieses nicht der Fall, so könnte man sich durch den Durchschnittspunkt von P_2 und L in der gedachten Ebene eine Gerade 'P gezogen denken, welche überall die Entfernung L von der Geraden P_1 hat, und die mithin mit der P_1 parallel sein müsste. Diese Gerade 'P muss aber mit P_2 zusammenfallen, weil sonst durch einen Punkt zwei Parallele mit einer Geraden gezogen werden könnten.

Nimmt man daher irgend eine dieser drei herrschenden Definitionen für parallele Gerade; so lässt sich immer leicht zeigen:

dass durch zwei unter sich parallele Gerade nur eine Ebene gelegt werden kann, und diese der Lage nach (§. 8.) völlig bestimmt ist.

Anmerk. 1. Da ich beim Studium dieses Lehrbuches der descript. Geometrie die Planimetrie voraussetzen muss; so hielt ich es für nothwendig den in diesem §. abgehandelten Satz nach den am meisten im Gebrauche stehenden Definitionen zu behandeln. —

Anmerk. 2. Sind zwei Gerade nicht parallel, und schneiden sich auch nicht, so weit man sie auch verlängern mag; so kann man keine Ebene finden, in welcher beide zugleich enthalten sind. —

§. 12.

Nachdem nun die Bedingungen, unter welchen die Lage einer Ebene bestimmt ist, erläutert sind, so wollen wir die Lage einer Geraden gegen eine Ebene untersuchen.

Denkt man sich zu diesem Ende vor Allem eine Gerade, die mit zweien in einer gegebenen Ebene liegenden und durch ihren Durchgangspunkt gehenden Geraden rechte Winkel bildet; so kann nachgewiesen werden, dass diese Gerade mit jeder durch ihren Durchgangspunkt gehendeu und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss. (Fig. 2.) Es sei zu diesem Ende durch M N eine Ebene bezeichnet, gegen welche eine Gerade S T so liegen soll, dass $\angle$ S T B = R, und $\angle$ S T A = R, und wobei T der Durchgangspunkt der Geraden S T ist, A T und B T in der Ebene angenommene Gerade sind. Verlängert man nun jede der beiden Geraden A T und B T, und macht TF = AT, DT = BT, zieht ferner durch T in der Ebene M N die beliebige Gerade C T E, verbindet ferner F mit D, B mit A, den beliebig in S T angenommenen Punkt S mit F, D, A und B durch Gerade, so ist leicht zu ersehen, dass

1. △ DTF ≅ △ ATB, mithin auch DF = AB und $\angle$ EDF = $\angle$ TBC

sein muss. Ferner ist ebenso leicht einzusehen, dass

2. △ SDT ≅ △ STB, also SD = SB
3. △ SFT ≅ △ STA, also SF = SA
4. △ EDT ≅ △ TBC, also ED = BC, ET = TC, FE = AC
5. △ DFS ≅ △ ASB (aus 1, 2 und 3), also $\angle$ SDE = $\angle$ SAC
6. △ SFE ≅ △ SAC (nach 3, 4, 5), also SE = SC, endlich
7. △ SET ≅ △ SCT (nach 4 und 6), mithin auch $\angle$ STE = $\angle$ STC = R

sein muss. Da also ST auf jeder beliebigen durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden senkrecht steht, so wird dieselbe nach §. 7. auf Ebene MN senkrecht sein, und daher hat man den Satz:

Steht eine Gerade nur auf zweien durch ihren Durchgangspunkt mit einer Ebene gehenden, und in dieser liegenden Geraden senkrecht, so wird dieselbe auch auf der Ebene senkrecht sein.

§. 13.

Bei den folgenden Untersuchungen und Sätzen wird es öfters nothwendig sein noch eine Ebene, die gegen die gegebene beliebig geneigt ist, zu Hülfe zu nehmen; daher wollen wir sehen, welches der Durchschnitt zweier Ebenen ist. Vor Allem muss der Durchschnitt zweier Ebenen, d. h. die geometrische Grösse, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden: eine Linie sein, weil an dem Orte, an welchem sich beide Ebenen schneiden, jede derselben begränzt wird, also ein Raum von nur einer Ausdehnung die gemeinschaftliche Gränze derselben sein kann. Diese Linie muss aber noch die Eigenschaft haben, dass sie in jeder beliebigen Richtung gedacht, in der Ebene ganz und gar liegen muss; denn man kann sich die eine der Ebenen fest, die andere beweglich denken, so

dass auch der Durchschnitt nach und nach auf der festen Ebene sich fortbewegt, und dabei in der beweglichen Ebene bleibt. Da man nun diese Eigenschaft, dass nämlich diese Linie in jeder beliebigen Richtung gedacht in eine Ebene fällt, nur an einer Geraden findet; so ist der Durchschnitt zweier Ebenen eine Gerade.

§. 14.

Gehen wir nun wieder auf die Lage einer Geraden gegen eine Ebene über, und bleiben noch ein wenig bei der Senkrechten stehen. Denkt man sich von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte gezogen, so wird jede andere von demselben Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit jener zusammenfallen müssen. Legt man nämlich durch diese zwei Gerade eine Ebene, und bestimmt ihren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene, so müsste auch jede dieser Geraden senkrecht auf dem Durchschnitte der gegebenen und der durch beide Linien gedachten Ebene sein, was aber nicht sein kann; mithin kann man sagen:

Von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte kann man auf diese nur eine einzige Senkrechte ziehen.

§. 15.

Eben so kann man sich leicht überzeugen, dass man von einem in einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese auch nur eine Senkrechte ziehen kann. Würde eine zweite möglich sein, so könnte man sich durch beide eine Ebene gelegt denken, welche dann die gegebene schneiden muss, und zwar nach §. 13. in einer Geraden. Auf letzterer muss jede von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte auch senkrecht sein; also auch jene zwei Geraden. Da aber dieses nicht der Fall sein kann, weil sie in einer Ebene, nämlich in der Hülfsebene liegen, so muss jede zweite von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit der ersten zusammenfallen, d. h.

Von einem auf einer Ebene angenommenen Punkte aus kann man auf diese nur eine Senkrechte ziehen.

(Fig. 3.) Derselbe Beweis soll mit Benützung einer Figur wiederholt werden. Wäre nämlich AB senkrecht auf Ebene MN, und es würde von A aus noch eine zweite Gerade AC möglich sein, die senkrecht auf Ebene MN steht; so kann man durch AB und AC (§. 10.) eine Ebene legen, und diese wird Ebene MN (§. 13.) in einer Geraden schneiden, die AD sein soll. Es müsste nun nach §. 7., AB sowohl als AC auf AD senkrecht stehen, was aber nicht sein kann, weil beide und AD in derselben Ebene liegen; mithin muss nothwendig jede zweite Gerade, die man von A aus auf Ebene MN senkrecht ziehen könnte mit AB zusammenfallen, oder AB ist die einzige Senkrechte. —

§. 16.

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte, und mehrere andere Gerade, so wird jede der letzteren länger, als jene Senkrechte sein. Denn denkt man sich durch diese Senkrechte und eine beliebige der Geraden eine Ebene gelegt, so wird diese die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden. Letztere bildet mit jenen beiden Geraden (durch welche die Ebene gelegt wurde) ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypothenuse die von dem beliebigen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Gerade ist, und die mithin länger sein muss, als eine der Katheten, also auch länger, als die vom angenommenen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Senkrechte.

§. 17.

Hieraus folgt nun sogleich der Satz:

Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Ebene ist die von diesem Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte, und zwar der Theil von letzterer, welcher zwischen dem gegebenen und ihrem Fusspunkte liegt. —

§. 18.

(Fig. 4.) Nimmt man nun wieder eine Ebene (MN) an, und zieht von einem ausserhalb derselben angenommenen Punkte A auf dieselbe die Senkrechte AB, ferner mehrere andere Gerade AC, AD, AE so, dass ihre Durchgangspunkte C, D, E von dem Fusse B der Senkrechten AB gleichweit entfernt sind, also BC = BD = BE, so werden die hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD und ABE kongruent, folglich auch die schrägen auf die Ebene gezogenen Geraden AC, AD, AE gleich lang sein. — Ist aber vom angenommenen Punkte A aus auf die Ebene noch eine Gerade AF gezogen, deren Durchgangspunkt F weiter von der Senkrechten entfernt ist, als die Durchgangspunkte der vorigen Geraden, so wird sie auch länger, als jede der vorigen Geraden sein. Denn zieht man BF, trägt auf diese die Gerade BG = BC auf, und zieht AG, so wird nach dem ersten Theile dieses §., AG = AC sein. Nun liegen aber AB, AG und AF in einer Ebene, in wel-

cher AB senkrecht auf BF ist, mithin muss nach einem Satze der ebenen Geometrie AF > AG, also auch grösser, als AC, und mithin auch grösser, als jede der Geraden AD und AE sein, weil diese einzeln gleich AC sind. Aus diesem Ganzen folgt nun:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte und mehrere andere Gerade; so werden diejenigen, deren Durchgangspunkte von der Senkrechten gleich weit entfernt sind, unter sich gleich lang sein. Von denjenigen aber, deren Durchgangspunkte ungleich weit von der Senkrechten entfernt sind, wird jene die längere sein, deren Durchgangspunkt auch weiter von der Senkrechten entfernt ist.

§. 19.

(Fig. 5.) Nun sollen umgekehrt die Geraden AC, AD, AE etc. etc., welche von A aus bis zur Ebene MN gezgen werden, gleich lang sein. Zieht man nun von A aus auf Ebene MN die Senkrechte AB, und verbindet die Punkte C, D, E etc. etc. mit B durch Gerade, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD, ABE, welche kongruent sein müssen (weil zwei Seiten des einen immer zweien Seiten des andern einzeln genommen gleich sind). Es ist also < ACB = < ADB = < AEB etc. etc., und ferner BC = BD = BE u. s. w., oder C, D, E etc. etc., liegen in einem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Senkrechten ist. Hieraus folgt also der Satz:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine beliebige Anzahl gleich langer Geraden, so werden

1. diese Geraden mit denjenigen Geraden, die man von ihren Durchgangspunkten nach dem Fusse der Senkrechten zieht, gleiche Winkel bilden;
2. die Durchgangspunkte dieser Geraden in einem Kreisumfange liegen, dessen Mittelpunkt der Fuss der von ihrem gemeinschaftlichen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte ist.

§. 20.

(Fig. 5.) Letzteres könnte man nun sogleich anwenden, um von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Man würde nämlich zu diesem Ende vom Punkte A aus eine Linie AC bis zur Ebene ziehen, und diese sich so bewegt denken, dass sie stets durch A geht und ihre ursprüngliche Länge AC behält; so trifft sie die Ebene in andern Punkten, von welchen wir nur noch zwei, nämlich D und E bezeichnen wollen. Sucht man nun den Mittelpunkt B des Kreisumfanges, der durch C, D, E geht, so wird die Gerade, die von A nach B gezogen wird, senkrecht auf der Ebene sein. Denn zieht man in diesem Kreise einen Durchmesser, und denkt sich von dessen Endpunkten aus nach D gerade Linien gezogen, so entstehen zwei Dreiecke, die kongruent sein müssen, und mithin rechwinklig sind. —

§. 21.

(Fig. 5.) Gehen wir nochmal auf das Resultat des §. 19. zurück, so ersehen wir aus dem 1. Theile des darin bewiesenen Lehrsatzes, dass wenn eine Gerade, die durch einen fixen Punkt geht, stets eine gegebene Ebene trifft, dieselbe Länge beibehält: der Winkel, den diese Gerade mit derjenigen bildet, welche von ihrem Durchgangspunkte nach dem Fusse der von ihrem fixen Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten gezogen wird, sich gleich bleibt, wenn man sich die Gerade in einer beliebigen der erwähnten Lagen denkt. Dieser Winkel ist aber auch ausserdem der kleinste unter allen, die diese Gerade mit allen andern Geraden bildet, welche in der Ebene liegen, und durch ihren Durchgangspunkt gehen. Denn zieht man z. B. durch C eine beliebige Gerade in der Ebene MN, macht CH = CB, und denkt sich AH gezogen, so wird, weil BH = CH, CA = CA, AB < AH ist, auch < ACB < < AHC sein.

Ist also eine Gerade beliebig gegen eine Ebene geneigt, und man zieht von einem auf derselben angenommenen Punkte aus eine Senkrechte auf die Ebene, verbindet den Fuss dieser Senkrechten mit dem Durchgangspunkte der gegebenen Geraden durch eine Gerade, so bildet diese Gerade mit der gegebenen einen Winkel, der unveränderlich bleibt und der kleinste unter allen ist, welche die Gerade mit anderen bildet, die man sich durch ihren Durchgangspunkt in der Ebene gezogen denken kann.

Anmerk. Dieser Winkel wird der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene genannt. Wie er erhalten wird, ist leicht aus dem vorigen Satze zu ersehen. —

§. 22.

(Fig. 6.) Denkt man sich von irgend einem Punkte der Geraden AB auf diese mehrere Senkrechte gezogen, und legt durch zwei derselben eine Ebene MN,

so werden alle durch den Punkt B gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden auf AB senkrecht stehen nach §. 12. Würde nun unter allen auf AB senkrecht stehenden und durch B gehenden Geraden eine sein, die nicht in der Ebene MN liegt, z. B. BD, so könnte man durch diese und eine in Ebene MN liegende Gerade BC (nach §. 10.) eine Ebene legen, welche dann (nach §. 12.) auf BA senkrecht sein müsste. Wäre diese Ebene PQ, und man denkt sich durch AB und BC eine Ebene gelegt, welche die Ebene PQ in BD schneidet, so müsste ∠ ABD ein Rechter, also so gross, als ∠ ABC sein, was nach einem Satze der ebenen Geometrie nicht sein kann, mithin müssen alle durch B gehenden und auf AB senkrechten Geraden in der nämlichen Ebene liegen, woraus also folgt:

Alle auf einer Geraden durch denselben Punkt senkrecht gezogenen Geraden liegen in einer Ebene.

§. 23.

Aus dem im vorigen Paragraphe erwähnten Satze folgt:

1. Wenn eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht ist, und sich so um diese bewegt, dass sie stets durch denselben Punkt geht, und senkrecht bleibt, eine Ebene von der ersten Geraden beschrieben wird. Diese Ebene wird auf der Geraden nach §. 7. senkrecht stehen.
2. Bewegt sich ein Punkt um eine Gerade, und behält stets dieselbe Entfernung von der Geraden, so beschreibt er einen Kreisbogen, dessen Ebene auf der Geraden senkrecht steht. Zieht man also von dem Punkte aus auf die Gerade, um welche er sich bewegt, eine senkrechte Ebene, so wird in dieser der Punkt bei seiner Bewegung stets bleiben, und die Peripherie eines Kreises beschreiben, dessen Mittelpunkt der Durchgangspunkt der Geraden mit der Ebene ist.
3. Nimmt man eine Ebene an, die zwei sich schneidende Ebenen trifft; so müssen ihre Communsektionen mit diesen Ebenen eine einzige Gerade bilden, sobald man die Ebenen um ihre gemeinschaftliche Gerade dreht, und in eine Ebene legt.

§. 24.

(Fig. 7.) Nimmt man in einer Ebene MN einen Punkt B an, zieht BA senkrecht auf die Ebene, und zieht von dem Punkte B auf CE, die in der Ebene MN liegt, die Senkrechte BD, verbindet den beliebig auf BA angenommenen Punkt A mit D durch die Gerade AD, macht DC = DE, und denkt sich nun die Hülfslinien CA, CB, EA und EB gezogen; so muss BC = BE sein (wegen der Congruenz der Dreiecke EDB und BDC), daher auch CA = EA (weil △ CAB ≅ △ ABE ist), und mithin △ ACE gleichschenklig sein. Da nun DC = DE, also die Grundlinie diees Dreieckes in D halbirt ist, so wird AD senkrecht auf CE sein. Es folgt also:

1. Zieht man auf eine Ebene eine Senkrechte, von ihrem Fusse aus auf eine in derselben Ebene liegende Gerade eine Senkrechte, und zieht von dem Punkte, in welchem letztere die Gerade trifft nach einem beliebigen Punkte der ersteren Senkrechteu eine Gerade, so wird diese Gerade auf der in der Ebene angenommenen Geraden senkrecht sein.
2. Die in der Ebene angenommene Gerade wird senkrecht auf der Ebene sein, welche man durch BD und BA legen kann.

§. 25.

Schneidet eine Gerade eine gegebene Ebene nicht, so weit man auch beide verlängern mag, so ist die Gerade parallel zur Ebene, und letztere parallel zur Geraden. — Liegen zwei oder mehrere Ebenen so, dass man dieselben so weit als man will verlängert denken kann, ohne dass sie sich treffen so sind diese Ebenen unter sich parallel.

§. 26.

(Fig. 9.) Sind zwei Gerade AB und ED parallel, und es steht AB senkrecht auf Ebene MN, so muss auch DE senkrecht auf Ebene MN sein. Denn denkt man sich durch AB und DE eine Ebene gelegt, so wird diese die Ebene MN nach BE schneiden, und es wird mithin (nach einem Satze der ebenen Geometrie) DE senkrecht auf BE sein. Zieht man nun EF senkrecht auf BE in der Ebene MN, so muss EF senkrecht auf Ebene EBAD sein nach §. 24., und folglich auch auf ED, weil diese in der Ebene EBAD liegt. Da nun DE senkrecht auf EF und BE steht, und diese beide Gerade in Ebene MN liegen, so folgt also der Satz:

Sind zwei Gerade parallel, und steht eine derselben auf einer Ebene senkrecht, so muss die andere auf derselben Ebene senkrecht sein.

§. 27.

(Fig. 10.) **Zwei Gerade, die auf einer und derselben Ebene senkrecht sind, müssen parallel sein.** Ist nämlich A B sowohl, als C D senkrecht auf Ebene M N, und man zieht von D aus eine Gerade D E, die parallel zu A B ist, so muss D E nach vor. §. senkrecht auf Ebene M N sein, was aber nach §. 15. nur dann statt finden kann, wenn D E mit D C in einer Richtung liegt, so dass also D C selbst die durch D mit B A gezogene Parallele sein muss.

§. 28.

(Fig. 15.) Ist A B ≠ CD, und A B ≠ E F, und man legt durch B eine Ebene M N senkrecht auf A B, so muss nach §. 26., C D sowohl, als E F senkrecht auf Ebene M N sein, und mithin ist nach §. 27. C D ≠ E F, woraus also folgt, **dass wenn zwei Gerade parallel zu einer dritten sind, jene auch unter sich parallel sein müssen; oder wenn eine Gerade parallel mit mehreren anderen Geraden ist, so müssen letztere auch unter sich parallel sein.**

§. 29.

(Fig. 8.) Ist A B ≠ C D, und liegt C D in der Ebene M N, so wird A B die Ebene M N nicht treffen, so weit man beide verlängert. Denkt man sich nämlich durch A B eine beliebige Ebene gelegt, und von einem Punkte der Communsektion dieser Ebene mit M N eine Parallele zu C D gezogen, so muss diese Parallele auch zu A B parallel sein (nach §. 28.), und mithin nach §. 11. in der durch A B gelegten Ebene ganz und gar liegen, so dass sie also Communsektion sein wird von der durch A B gelegten Ebene und M N. Es kann also A B diese Communsektion nicht treffen, und mithin auch die Ebene in keinem Punkte, weil die Communsektion jeder Ebene, welche durch einen Punkt von M N und durch A B gelegt wird, und der Ebene M N, mit A B parallel ist. Hieraus folgt also:

1. **Ist eine Gerade mit einer in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.**
2. **Jede durch die erstere Gerade gelegte Ebene schneidet die gegebene nach einer Geraden, die mit jener parallel ist.** —

§. 30.

Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist sie von der Ebene überall gleich weit entfernt.

Unter Entfernung dieser Geraden von der Ebene versteht man nämlich den zwischen der Geradeu und Ebene enthaltenen Theil einer Geraden, welche auf beiden senkrecht steht. Betrachtet man nun zwei solche Entfernungen, so sind dieselben parallel, und liegen in einem Vierecke, das ein Parallelegramm sein muss, was aus dem vor. §. einleuchtet. —

§. 31.

Soll man zu einer Geraden eine Ebene parallel legen, so darf man nur eine Gerade ziehen parallel der gegebenen Geraden, durch letztere eine Ebene legen, so wird diese parallel zur gegebenen Geraden sein. —

§. 32.

(Fig. 12.) Hat man zwei Ebenen M N und Q R, die beide auf der Geraden A B senkrecht stehen, so können sich beide Ebenen nicht schneiden, so weit man auch jede derselben verlängern mag. Würden dieselben sich schneiden, und wäre C ein Punkt ihres Durchschnittes, so müsste, weil C in jeder der beiden Ebenen liegen würde, C A in Ebene M N, C B in Ebene Q R ganz und gar liegen, und folglich auch A B sowohl auf C A, als auch auf C B senkrecht stehen. Da aber A B nicht auf diesen beiden Geraden zugleich senkrecht sein kann, so kann auch C kein Punkt der Communsektion beider Ebenen sein. Von jedem andern Punkte, der im Durchschnitte beider Ebenen liegen sollte, könnte man aber auf dieselbe Weise zeigen, dass die Verbindungslinien desselben mit A und B senkrecht auf A B sein müssten, was aber ungereimt ist; mithin kann es keinen Punkt geben, der im Durchschnitte beider Ebenen liegt, oder beide Ebenen schneiden sich nicht, so weit man sie auch verlängern mag. **Stehen also zwei Ebenen auf einer Geraden senkrecht, so sind dieselben parallel.**

§. 33.

(Fig. 11.) Sind die beiden Ebenen M N und P Q parallel, und es schneidet eine dritte Ebene D B dieselben nach A B und C D, so können diese beiden Geraden sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängern würde, weil sie in zwei parallelen Ebenen sich befinden. Diese beiden Geraden A B und C D liegen aber zugleich in einer Ebene, und müssen desshalb parallel sein. **Werden also zwei parallele Ebenen durch irgend eine dritte Ebene geschnitten, so sind die Durchschnitte parallel.**

§. 34.

(Fig. 18.) P Q und M N seien zwei parallele Ebenen, A B sei eine Gerade, die senkrecht auf M N ist. Legt man nun durch A B verschiedene Ebenen, z. B. B C und B E, so muss nach vor. §., A E, $\neq$ B F und A C $\neq$ B D sein. Da aber A B senkrecht auf Ebene M N, also nach §. 7. senkrecht auf B F, und aus demselben Grunde auch senkrecht auf B D ist, so muss A E als Parallele zu B F auch senkrecht auf A B, und ebenso A C als Parallele zu B D senkrecht auf A B sein. Da also A B senkrecht auf A E sowohl, als auch auf A C ist, so muss B A senkrecht auf Ebene P Q sein. Es folgt also hieraus:

1. dass wenn eine Gerade senkrecht auf einer von zwei parallelen Ebenen ist, dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht sein muss.
2. Dass man für zwei parallele Ebenen Gerade ziehen kann, die auf beiden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

§. 35.

(Fig. 14.) Derjenige Theil einer solchen auf zwei parallelen Ebenen zugleich senkrecht stehenden Geraden, welcher zwischen beiden Ebenen enthalten ist, wird ihr Abstand oder ihre Entfernung genannt. Denkt man sich für die beiden parallelen Ebenen P Q und M N die Entfernungen A B, C D, E F etc. etc. gezogen; so werden diese Geraden nach §. 27. unter sich parallel sein, und man kann daher nach §. 11. durch je zwei derselben eine Ebene legen. Durch A B und C D die Ebene B C gelegt, gibt die Durchschnitte A C $\neq$ B D; mithin ist A C D B ein Rechteck, und folglich A B = C D. Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass C D = E F ist, folglich auch A B = E F. Hieraus folgt also der Satz:

Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

§. 36.

(Fig. 16.) Es sei $CA \neq C_1 A_1$, $AB \neq A_1 B_1$, von diesen Geraden sei ferner angenommen, dass, wenn $\angle CAB$ ein spitzer Winkel ist, auch $\angle C_1 A_1 B_1$ ein solcher sein soll, und ist $\angle CAB$ ein stumpfer, so soll $\angle C_1 A_1 B_1$ auch ein stumpfer Winkel sein. Macht man nun $AC = A_1 C_1$, $AB = A_1 B_1$, zieht die Hülfslinien CC_1, AA_1, BB_1, CB und $C_1 B_1$, so ist

1. $CC_1 \neq$ und $= AA_1$, weil $AC \neq$ und $= A_1 C_1$ ist,
2. $BB_1 \neq$ und $= AA_1$, weil $AB \neq$ und $= A_1 B_1$, und mithin (nach §. 48.)
3. $CC_1 \neq$ und $= BB_1$, folglich auch
4. $CB \neq$ und $= C_1 B_1$. Da also $CB = C_1 B_1$, $CA = C_1 A_1$, $AB = A_1 B_1$, so ist
5. $\angle CAB = \angle C_1 A_1 B_1$.

Es muss aber auch Ebene $CBA \neq$ Ebene $C_1 A_1 B_1$ sein, denn wäre diess nicht der Fall, so könnte man durch C eine Ebene parallel zur Ebene $C_1 A_1 B_1$ legen. Diese soll AA_1 in D treffen, so müsste (§. 33.) $CD \neq C_1 A_1$ sein, und folglich auch $DA_1 = CC_1 = AA_1$ sein, was absurd ist. Es folgt also:

1. Sind zwei Gerade im Raume parallel zu zwei anderen Geraden, so muss der spitze oder stumpfe Winkel, unter welchen sich die beiden ersteren Geraden schneiden, gleich dem spitzen oder stumpfen Winkel sein, den die beiden letzteren Geraden bilden.
2. Die Ebene, welche durch die ersten zwei Geraden bestimmt ist, muss parallel sein zur Ebene der beiden letzteren Geraden.

§. 37.

(Fig. 17.) Zieht man in einer Ebene $M_1 N_1$ die sich schneidenden Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, legt durch einen Punkt A_2 die Geraden $A_2 B_2$ und $A_2 C_2$ parallel zu den vorigen, so wird die durch $A_2 C_2$ und $A_2 B_2$ gelegte Ebene nach vor. §. parallel zur Ebene $M_1 N_1$ sein müssen. —

§. 38.

Aus den vorigen Paragaphen werden nachfolgende Sätze klar, und können leicht erwiesen werden:

1. Durch einen Punkt im Raume kann man nur eine Ebene parallel zu einer andern ziehen.
2. Die in gleicher Entfernung von einer Ebene parallel zu dieser gelegten Ebenen müssen zusammenfallen, und eine einzige Ebene bilden.
3. Durch eine Gerade kann man auf eine gegebene Ebene nur eine einzige Ebene senkrecht ziehen.
4. Sind zwei Ebenen einzeln parallel zu zwei anderen Ebenen, so muss die Communsektion der ersten beiden, parallel zur Communsektion der beiden letzten Ebenen sein. —

§. 39.

(Fig. 18.) Werden die beiden in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden A B und C D von drei parallelen Ebenen $M_1 N_1$, $M_2 N_2$

$M_3 N_3$ geschnitten, so müssen die Theile AF, FB, DE und EC dieser Geraden, welche zwischen den parallelen Ebenen enthalten sind, in gleichem Verhältnisse stehen.

Legt man, um diess nachzuweisen, durch AB und D eine Ebene, und eine solche durch DC und B, so wird BGD auf der Communsektion von beiden liegen (wobei G der Durchgangspunkt von BD mit Ebene $M_2 N_2$ sein soll). Ebenso müssen AD und FG auf den Durchschnitten von Ebene ABD mit den Ebenen $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ sein; ferner GE und BC auf den Durchschnitten von Ebene DBC mit den Ebenen $M_2 N_2$ und $M_3 N_3$. Es muss mithin

$AD \neq FG$ und $GE \neq BC$ sein,

folglich werden nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie folgende Proportionen statt finden:

$BF : FA = BG : GD$ und

$EC : ED = BG : GD.$

Durch Verbindung dieser beiden Proportionen erhält man die Proportion

$BF : FA = CE : ED$ oder $BF : CE =$
$= FA : ED,$

welche nachzuweisen war. —

Anmerk. Würden diese Geraden sich schneiden, so würde der Satz schon aus dem in der ebenen Geometrie vorgekommenen hervorgehen; und würden diese Geraden parallel sein, so wären die zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Theile derselben einander gleich, mithin der Satz ebenfalls schon klar. —

§. 40.

(Fig. 19.) Nachdem wir nun parallele Ebenen betrachtet haben, wollen wir endlich auch zwei sich schneidende Ebenen in Betrachtung ziehen, und von diesen zuerst ihren Neigungswinkel aufzusuchen lehren. Hat man zwei Ebenen MN und PQ, welche sich nach einer Geraden schneiden, auf welcher MQ enthalten ist, und man zieht durch A_1, A_2 etc. etc., $A_1 B_1 \neq A_2 B_2$ etc. etc. in der Ebene MN, sodann $A_1 C_1 \neq A_2 C_2$ etc. etc. in der Ebene PQ, so ist nach §. 36. $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_2 A_2 C_2$ u. s. w. Nimmt man also auf der Communsektion zweier Ebenen einen Punkt an, zieht von diesem zwei Senkrechte auf die Communsektion, von welchen die eine in der einen Ebene, die andere in der andern Ebene liegt, so bleibt der Winkel dieser beiden Senkrechten unveränderlich, so lange die beiden Ebenen dieselbe Neigung gegen einander haben. Dieser Winkel ist also auch unabhängig von dem Orte, in welchem der Punkt auf der Communsektion angenommen wird. —

§. 41.

(Fig. 20.) Von dem vorhin erwähnten Winkel soll nun nachgewiesen werden, dass er den Winkel beider Ebenen misst. — Vor Allem folgende Betrachtung: Es sei $(P_1 Q_1)$ die eine, $(M_1 N_1)$ die andere Ebene, die sich nach $M_1 Q_1$ schneiden. Zieht man nun $A_1 B_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $M_1 N_1$, dann $A_1 C_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $Q_1 P_1$, so bleibt dieser Winkel $B_1 A_1 C_1$ bei derselben Neigung beider Ebenen unveränderlich (nach §. 40.). Theilt man nun diesen Winkel in gleiche Theile, und denkt sich durch jede dieser Theilungslinien und $M_1 Q_1$ eine Ebene gelegt, so wird der Winkel beider Ebenen in ebenso viele Theile getheilt, als in wie viele der $\angle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde. Diese Theile müssen aber auch einander kongruent sein; denn sind $\angle b_1 A_1 C_1$, $\angle a_1 A_1 b_1$, $\angle a_1 A_1 B_1$ drei gleiche Theile, in welche $\angle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde, und man legt z. B. die Ebene, welche durch $b_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ gedacht werden kann, auf die Ebene, welche man durch $a_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ legen kann, so muss, weil $\angle a_1 A_1 b_1 = \angle a_1 A_1 B_1$ ist, auch $a_1 A_1$ auf $A_1 B_1$ zu liegen kommen, also auch die Ebene, die durch $a_1 A_1$ und $Q_1 M_1$ gedacht wird, mit Ebene $B_1 A_1 M_1$ zusammenfallen nach §. 10. Aus diesem Grunde müssen also die Theile, in welche der Winkel beider Ebenen getheilt wurde so in einander gebracht werden können, dass sie sich decken, also müssen dieselben einander gleich sein. —

§. 42.

(Fig. 20). Hat man nun zwei Winkel, von welchen der eine die Neigung von $P_1 Q_1$ und $M_1 N_1$, der andere die Neigung von $Q_2 P_2$ und $M_2 N_2$ angibt, und man zieht auch $\angle B_2 A_2 C_2$ so, dass $A_2 B_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $M_2 N_2$, und $A_2 C_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $Q_2 P_2$ ist, so kann

1. $\angle B_1 A_1 C_1$ kommensurabel mit $B_2 A_2 C_2$ sein.
2. $\angle B_1 A_1 C_1$ inkommensurabel gegen $\angle B_2 A_2 C_2$.

Ad 1. Haben diese Winkel ein gemeinschaftliches Maass, das m mal im $\angle B_1 A_1 C_1$, und n mal im $\angle B_2 A_2 C_2$ enthalten ist, wobei m und n ganze Zahlen bedeuten, so ist, weil $\angle B_1 A_1 C_1 = m \cdot p$, $\angle B_2 A_2 C_2 = n \cdot p$, auch

$\angle B_1 A_1 C_1 : \angle B_2 A_2 C_2 = m : n$

Trägt man nun den $\angle p$ auf $\angle B_1 A_1 C_1$ sowohl, als auf $\angle B_2 A_2 C_2$ so oft, als diess möglich ist, nämlich m mal auf ersteren und n mal auf letzteren, und legt durch jede Theilungslinie des $\angle B_1 A_1 C_1$ und $M_1 Q_1$ eine Ebene, so wird $\angle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) bildet in so viele gleiche Winkel getheilt, als m angezeigt, und ist daher ein solcher Theil P, so wird $\angle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) $= m \cdot P$. Legt

man ebenso durch $P_2 M_2$ und jede der Theilungslinien des $\lessdot B_2 A_2 C_2$ eine Ebene, so wird $\lessdot$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) in n gleiche Theile getheilt (§. 41.), von welchen ein Theil P sein muss, so dass man hat

$\lessdot$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $=$ n . P,

daher

$\lessdot$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_2 N_2$) : $\lessdot$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $=$ m : n,

also auch

$\lessdot$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_1 N_1$) : $\lessdot$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $= \lessdot B_1 A_1 C_1 : \lessdot B_2 A_2 C_2$

Es verhalten sich also die Winkel, welche Ebenen bilden ebenso zu einander, wie sich die Linienwinkel verhalten, welche man nach §. 40. erhält, wenn diese Linienwinkel kommensurabel sind.

Ad 2. Sind $\lessdot B_1 A_1 C_1$ und $\lessdot B_2 A_2 C_2$ inkommensurabel, so muss jene Proportion doch statt finden. Denn wäre

$\lessdot$ (Ebene $P_1 Q_1$, $M_1 N_1$) : $\lessdot$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $= \lessdot B_1 A_1 C_1$, : einem Winkel, der $>$ oder $<$ als $B_2 A_2 C_2$ ist, z. B. $\lessdot$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) : $\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) $= \lessdot B_1 A_1 C_1 : \lessdot q\ A_2 C_2$, wobei q $A_2 C_2$ ein Theil von $B_2 A_2 C_2$ ist; so kann man durch fortgesetztes Halbiren $\lessdot B_1 A_1 C_1$ in so viele gleiche Theile theilen, dass ein solcher Theil kleiner, als $\lessdot B_2 A_2$ q wird. Trägt man einen solchen Theil auf $\lessdot B_2 A_2 C_2$ so oft, dass eine Theilungslinie einmal zwischen $B_2 A_2$ und A_2 q fällt, z. B. auf A_2 m, legt durch m A_2 und $M_2 Q_2$ eine Ebene, so muss $\lessdot$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene M_2 m) $= \lessdot B_1 A_1 C_1 : \lessdot$ m $A_2 C_2$

Es müsste daher auch

$\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) : $\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene M_2 m) $= \lessdot$ q $A_2 C_2$: $\lessdot$ m $A_2 C_2$

was ungereimt ist, mithin muss

$\lessdot$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) $= \lessdot B_1 A_1 C_1 : \lessdot B_2 A_2 C_2$

Es folgt also: Dass sich der Winkel zweier Ebenen zum Winkel zweier anderer Ebenen verhält, wie sich ihre Linienwinkel zu einander verhalten, die man nach §. 40. erhält. —

§. 43.

(Fig. 20.) Man hat also aus der letzten Proportion des vor. §., $\lessdot$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) $= \lessdot B_2 A_2 C_2 \times \lessdot$ (Ebene $M_1 N_1$, $Q_1 P_1$), wenn $\lessdot B_1 A_1 C_1$ Winkeleinheit für $\lessdot B_2 A_2 C_2$, und $\lessdot$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) Einheit für Winkel zweier Ebenen wäre. Hieraus folgt also der Satz:

Der Winkel, unter dem zwei Ebenen gegen einander geneigt sind, wird gemessen durch einen Winkel, den man erhält, wenn man von einem beliebig in der Communsektion angenommenen Punkte zwei Senkrechte auf diese zieht, von welchen die eine in der ersten Ebene, die andere in der zweiten Ebene liegt. Der Winkel, den diese zwei Senkrechten bilden kann mithin Neigungswinkel beider Ebenen genannt werden. —

§. 44.

Von zwei Ebenen sagt man, dass sie auf einander senkrecht sind, wenn ihr Neigungswinkel ein Rechter ist. — Ferner geht aus dem vor. §. hervor, dass wenn eine Ebene eine andere schneidet, ihre Nebenwinkel in Summe zwei Rechte ausmachen und ihre Scheitelwinkel einander gleich sein müssen, weil diese Sätze für ihre Neigungswinkel, nämlich für ihre Maasse statt finden. —

§. 45.

(Fig 21.) M N sei eine beliebige Ebene, A B eine auf dieser Ebene senkrechte Gerade. Legt man durch A B eine beliebige Ebene P Q, deren Durchschnitt mit Ebene M N die Gerade B P sei, so wird A B senkrecht auf B P stehen. Zieht man ferner B C in Ebene M N senkrecht auf B P, so wird nach §. 43., $\lessdot$ A B C der Neigungswinkel für Ebene M N und Ebene P Q sein. Es ist aber A B senkrecht auf Ebene M N, also senkrecht auf A C, mithin $\lessdot$ A B C ein Rechter; folglich ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N. Steht also eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, und man legt durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so wird diese auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen. —

Anmerk. Soll daher durch eine Gerade eine Ebene gezogen werden, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene ist, so ziehe man von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die Ebene, lege durch letztere und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird diese die verlangte sein. —

§. 46.

(Fig. 21.) Ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N, der Durchschnitt beider Ebenen die Gerade B P, und man zieht von einem beliebigen Punkte B dieser Communsektion die Gerade B A senkrecht auf B P in Ebene P Q, so muss B A auch senkrecht auf Ebene M N sein. Denn zieht man B C senkrecht auf B P in Ebene M N, so muss nach §. 44. der

$<$ ABC $=$ R sein. Nun ist aber $<$ ABP schon ein Rechter, und mithin ist nach §. 12. auch AB senkrecht auf Ebene MN. Da es gleichgültig ist, ob man von B aus oder von einem beliebigen in der Ebene PQ liegenden Punkte die Senkrechte AB zieht, so können wir diesen Satz auch wie folgt, aussprechen:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer zweiten, und man nimmt in der ersteren einen beliebigen Punkt an, fällt von diesem auf die Communsektion beider Ebenen eine Senkrechte, so muss letztere auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

§. 47.

(Fig. 21.) Ist wieder angenommen, dass Ebene PQ senkrecht auf Ebene MN steht, und man zieht von einem Punkte B ihrer Communsektion die Gerade BA senkrecht auf Ebene MN, so wird diess die einzige von B aus auf Ebene MN mögliche Senkrechte (§. 15.) sein. Wenn man aber von B aus auf BP in Ebene PQ eine Senkrechte zieht, so muss diese nach §. 46. auch auf Ebene MA senkrecht stehen; folglich fällt diese Senkrechte mit der angenommenen BA zusammen, woraus folgender Satz hervorgeht:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, und man zieht von einem beliebigen Punkte ihrer Communsektion eine Senkrechte auf die zweite Ebene, so muss diese Senkrechte in der ersten Ebene liegen.

§. 48.

(Fig. 22.) Steht die Ebene PQ sowohl, als auch die Ebene RS senkrecht auf der Ebene MN, so muss der Durchschnitt der beiden ersten Ebenen, nämlich AB, auch senkrecht auf der dritten Ebene stehen. Ist B der Punkt, den die drei Ebenen gemeinschaftlich haben, und man zieht von diesem eine Senkrechte auf Ebene MN, so muss diese Senkrechte nach §. 47. in jeder der beiden andern Ebenen liegen; folglich der Durchschnitt dieser beiden ersten Ebenen sein.

Stehen also zwei Ebenen senkrecht auf einer dritten, so muss auch die Communsektion jener Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene stehen.

§. 49.

(Fig. 23.) Hat man drei Gerade, von welchen je zwei unter rechten Winkeln gegen einander geneigt sind, und man legt durch je zwei derselben eine Ebene, so muss (nach §. 12.) eine jede dieser Geraden senkrecht auf der Ebene der beiden andern sein. Jede dieser Ebenen muss aber auch (nach §. 45.) senkrecht auf den beiden andern sein. Solche drei Ebenen werden uns später unter dem Namen rechtwinklige Corrdinatenebenen oder Projektionstafeln vorkommen; die Geraden AB, BC, BD, durch welche die Ebenen gelegt werden, oder welche die Durchschnittslinien derselben sind, werden dann Corrdinatenaxen oder Axen genannt. —

§. 50.

(Fig. 26.) Für den Neigungswinkel zweier Ebenen MN und PQ können noch folgende Sätze angeführt werden:

1. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Communsektion zweier Ebenen auf dieselbe eine Ebene senkrecht, so schneidet letzere die beiden gegebenen Ebenen nach Geraden, welche auf der Communsektion senkrecht sein müssen (nach §. 12.), und die nach Annahme durch den gegebenen Punkt gehen; folglich werden dieselben den Neigungswinkel beider Ebenen bilden. —
2. Zieht man von einem zwischen beiden Ebenen liegenden Punkte aus auf jede der beiden Ebenen eine Senkrechte, so werden diese beiden Senkrechten unter sich einen Winkel bilden, der den Neigungswinkel beider Ebenen zu zwei Rechten ergänzt.

Ist nämlich D der angenommene Punkt, DA senkrecht auf Ebene MN, DB senkrecht auf Ebene PQ, und man denkt sich nun durch DA und DB eine Ebene gelegt, so muss diese die Gerade PM (nach §. 5.) in einem Punkte schneiden, welches hier der Punkt C sein soll. Trifft nun die eine Senkrechte DA die Ebene MN in A, die andere DB die Ebene PQ in B, und man zieht die Geraden AC und CB, so werden diese den Communsektionen der Hülfsebene und der beiden gegebenen Ebenen angehören, so dass also das Viereck CAMB ganz und gar in der Hülfsebene liegt. Nun muss aber nach §. 7. $<$ MAC gleich $<$ MBC $=$ R sein, mithin $<$ ACB $+$ $<$ AMB $=$ 2R. Da aber $<$ ACB (nach §. 43.) der Neigungswinkel der Ebenen MN und PQ ist, so ergänzt der $<$ AMB, nämlich der Winkel beider Senkrechten den Winkel beider Ebenen zu zwei Rechten. —

§. 51.

(Fig. 25.) L_1 und L_2 seien zwei Gerade, die weder parallel sind, noch sich schneiden, so weit

man sie auch verlängern mag. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_2 eine Gerade $'L_1$ parallel zu L_1, ferner durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_1 eine Parallele $'L_2$ zu L_2, legt durch L_1 und $'L_2$ eine Ebene E_1, durch $'L_1$ und L_2 eine Ebene E_2, so wird nach §. 29., E_1 parallel zu L_2 und E_2 parallel zu L_1 sein müssen.

Man kann also durch jede von zwei sich nicht schneidenden und auch nicht parallelen Geraden eine Ebene legen, die parallel zur andern ist. —

§. 52.

(Fig. 25.) Legt man durch einen beliebigen Punkt und L_1 eine Ebene, sodann durch denselben Punkt und L_2 eine Ebene, so müssen diese beiden Ebenen sich schneiden nach einer Geraden C, welche mit L_1 in der ersten Ebene liegt, und mit L_2 in der zweiten Ebene, also sowohl L_1 als L_2 schneiden muss. Hieraus folgt also:

1. Man kann zwei in verschiedenen Ebenen liegende Gerade durch eine dritte schneiden, welche durch einen gegebenen Punkt geht. Daher kann man auch
2. drei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade, durch eine und dieselbe Gerade schneiden, oder es gibt eine Gerade, welche diese drei Gerade zugleich trifft.

§. 53.

(Fig. 24.) AB und CD seien zwei in verschiedenen Ebenen befindliche und sich nicht schneidende Gerade. Legt man durch CD eine Ebene MN, welche parallel ist zu AB (nach §. 50.), zieht sodann von einem beliebigen Punkte E der Geraden AB eine Senkrechte auf Ebene MN, so wird diese Senkrechte EF die kürzeste Entfernung der Geraden AB von Ebene MN, und mithin nach §. 30. so gross sein, als eine Senkrechte, die von einem andern Punkte 'E auf Ebene MN gezogen wird. Rückt man aber die Senkrechte EF an der Geraden AB so lange fort, bis sie (senkrecht auf Ebene MN bleibend) die Gerade CD in 'F trifft, so wird sie in dieser Lage senkreeht auf CD sein (nach §. 7.), und aus demselben Grunde senkrecht auf A″B″, die durch F′ parallel zu AB gezogen werden kann. Diese Gerade 'E 'F wird also auch senkrecht auf AB sein (nach ebener Geometrie), und mithin die Eigenschaft haben, senkrecht auf den beiden Geraden AB und CD zu sein, woraus also folgt:

1. Für zwei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade gibt es einen Ort, an welchem eine dritte Gerade auf beiden zugleich senkrecht ist.
2. Die Entfernung dieser beiden Punkte, deren Verbindungslinie senkrecht auf beiden Geraden steht, ist die kürzeste Entfernung beider Geraden.

§. 54.

(Fig. 27.) $\angle$ AEB, $\angle$ BEC und $\angle$ AEC sollen in verschiedenen Ebenen liegen, einen gemeinschaftlichen Scheitel E, und je zwei derselben auch einen gemeinschaftlichen Schenkel haben; so wird der durch die Ebene dieser drei Winkel eingehüllte körperliche Raum ein körperliches, dreiseitiges Eck genannt, dessen Scheitel E ist. Von diesem dreiseitigen körperlichen Eck lässt sich zeigen, dass je zwei der Winkel, die dasselbe bilden, in Summe grösser sein müssen, als der dritte. —

Sind die drei Winkel einander gleich, so ist jedenfalls die Summe zweier grösser, als der dritte; folglich ist nur der Fall zu erwähnen, in welchem die drei Winkel ungleich, also einer grösser, als jeder der beiden anderen Winkel ist. Ist diess der Winkel AEC, so schneide man von demselben ein Stück DEC ab, das gleich BEC ist, macht DE = BE, zieht in den Ebenen AEC, AEB und BEC die Hülfslinien ADC, AB und BC, so muss DC = BC sein (weil $\triangle$ DEC $\cong$ $\triangle$ BEC ist). Es ist nun AB + BC > AD + DC oder AB > AD, und da ferner AE des $\triangle$ AEB = AE des $\triangle$ AED, BE = DE ist, so muss $\angle$ AEB grösser als $\angle$ AED sein.

Mithin ist $\angle$ AEB + $\angle$ BEC grösser als $\angle$ AED + $\angle$ DEC oder

$\angle$ AEB + $\angle$ BEC grösser als $\angle$ AEC,

was nachzuweisen war. —

§. 55.

(Fig. 28.) Es seien die $\angle$ AMB, $\angle$ BMC, $\angle$ DMC, $\angle$ EMD und $\angle$ AME gegeben, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel M haben, und einen körperlichen Raum umschliessen; so wird dieser körperliche Raum ein vielseitiges Eck genannt, dessen Seiten die genannten Winkel sind. Schneidet man nun alle diese Winkel durch eine Ebene ab, welche dieselben nach den Geraden AB, BC, CD, DE und EA schneidet, so bilden diese letzteren Geraden ein Vieleck von so vielen Seiten, als von wie vielen Winkeln das körperliche Eck M gebildet wird. Nimmt man daher in dem Vielecke ABCDE den Punkt N an, und zieht von diesem aus nach allen Scheiteln Gerade, nämlich NA, NB etc. etc., so liegen um N herum, ebenso viele Dreiecke, als wie viele das körperli-

che Eck bei M umhüllen. Die Summe der Winkel derjenigen Dreiecke, in welche das Vieleck getheilt ist, muss mithin ebenso gross sein, als die Summe der Winkel derjenigen, welche das Eck bei M umschliessen. Es ist aber nach vor. §.: $\angle MAB + \angle MAE$ grösser als $\angle BAN + \angle NAE$, $\angle MEA + \angle MFD$ grösser als $\angle AEN + \angle NED$, $\angle MDE + \angle MDC$ grösser als $\angle NDC + \angle NDE$, $\angle MCB + \angle MCD$ grösser als $\angle BCD$, $\angle MBC + \angle MBA$ grösser als $\angle ABC$, folglich müssen die Winkel, weiche um N herum liegen in Summe mehr ausmachen, als diejenigen der Dreiecke ABM, MBC, DCM etc. etc., die den gemeinschaftlichen Scheitel M haben. Die aufeinanderfolgenden Winkel aber, deren gemeinschaftlicher Scheitel N ist, betragen in Summe 4 R, **und mithin ist die Summe aller Winkel, welche das körperliche Eck bei M bilden, kleiner als vier Rechte.**

§. 56.

Aus dem vorigen Satze folgt:

1. **Aus regelmässigen Dreiecken kann man** noch ein körperliches Eck bilden, wenn **fünf** einen gemeinschaftlichen Scheitel, und immer zwei auf einanderfolgende eine gemeinschaftliche Seite haben; denn $5 \times 60° = 300° < 4R$. Man kann mithin dreierlei körperliche Ecke aus regelmässigen Dreiecken bilden, nämlich ein körperliches Eck aus drei, eines aus vier regelmässigen Dreiecken und endlich ein körperliches Eck aus fünf regelmässigen Dreiecken. —
2. Drei regelmässige Vierecke können noch ein körperliches Eck bilden, weil die Summe dreier solcher zusummenstossender Winkel nur 3 R ist. —
3. Da in einem regelmässigen Fünfecke ein Winkel $\frac{6}{5}$ R ist, und drei dieser Winkel ein körperliches Eck bilden können, so kann man aus drei regelmässigen Fünfecken ein körperliches Eck bilden. —

Anmerk. Aus regelmässigen Sechsecken, Siebenecken etc. etc. kann kein körperliches Eck mehr gebildet werden. —

Zweite Abtheilung.

Zweites Kapitel.

Principien der geometrischen Projectionslehre.

§. 57.

(Fig. 28.) Es seien drei sich schneidende Ebenen gegeben, die beliebige Neigungswinkel haben, die Durchschnitte derselben seien durch X, Y, Z, die eine dieser Ebenen sei durch (XY), die zweite durch (XZ), die dritte mit (YZ) bezeichnet, und endlich der allen dreien gemeinschaftliche Punkt sei O. Diese Ebenen kann man sich ausgedehnt denken, so weit man will, so dass jede darzustellende Grösse innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen oder ihrer Verlängerungen sich befindet. Der Ort, in welchem sie angenommen werden, richtet sich nach der Lage des darzustellenden Gegenstandes. — Nimmt man nun innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen einen Punkt an, denkt sich von diesem aus parallel zu den Durchschnitten X, Y, Z Gerade gezogen, und diese so weit verlängert, bis sie die Ebenen treffen, so reichen diese Durchgangspunkte oder die vom Punkte aus gezogenen Geraden hin, die Lage des Punktes im Raume wieder bestimmen zu können.

§. 58.

(Fig. 28.) Die vom gegebenen Punkte aus gezogenen Parallelen seien x, y, z, von welchen $x \neq X$ zwischen dem gegebenen Punkte und der Ebene (YZ), $z \neq Z$ zwischen dem Punkte und Ebene (XZ), $z \neq Z$ zwischen dem gegebenen Punkte und Ebene (XY) liegt; der Durchgangspunkt von z mit Ebene (XY) sei a, der von y mit Ebene (XZ) sei a', der Durchgangspunkt von x mit (YZ) sei a''. Wenn man nun von O aus auf X die Gerade $Ob = x$ aufträgt, von dem hiedurch erhaltenen Endpunkte b parallel zu Ebene (YZ) eine Ebene legt; sodann von O aus auf OY die Gerade $Ob'' = y$ trägt, und von b'' aus parallel zur Ebene (XZ) eine Ebene legt; endlich von O aus auf Z die Gerade $Ob' = z$ trägt, und von b' aus parallel zur Ebene (XY) eine Ebene zieht; so werden diese drei Ebenen einen gemeinschaftlichen Punkt haben, welcher der vorhin angegebene sein muss. Es ist also ein Punkt durch die Geraden x, y, z, bestimmt, wenn dabei noch angegeben ist, wie man dieselben auf die Durchschnitte X, Y, Z tragen soll: ob nämlich von O aus auf diese Durchschnitte selbst, oder auf ihre Verlängerungen.

§. 59.

(Fig. 28.) Wären aber die drei Punkte 'a, "a und a gegeben, so reichen diese jedenfalls aus, den zugehörigen Punkt im Raume wieder zu bestimmen, wenn man gewiss ist, dass a, a', a'' die Durchgangspunkte der Geraden x, y, z mit den Ebenen (YZ), (XZ), (XY) sind. Denkt man sich nämlich durch a' eine Parallele zur Y, durch a'' eine Parallele zur X gezogen, so müssen diese — weil durch einen und denselben Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden gezogen werden kann, und diese schon in den Parallelen liegen, die man vom gegebenen Punkte parallel zu X und Y gezogen hat — sich schneiden, und ihr Durchschnittspunkt ist der angegebene Punkt. Auf gleiche Weise könnte man vermittelst a' and a, und ebenso vermittelst a und a'' den Punkt im Raume wieder angeben. — Man ersieht hieraus,

dass wenn die drei Punkte a, a', a'' die Durchgangspuncte der x, y, z, mit den Ebenen (XY), (XZ), (YZ) sind, schon zwei derselben hinreichen, um die Lage des Punktes im Raume aus denselben wieder zu bestimmen. Man dürfte nur durch einen dieser zwei Punkte eine Ebene parallel zur dritten legen, so muss diese den zweiten Punkt enthalten; in dieser Ebene sodann von jedem der beiden Punkte aus parallele Gerade zu den Durchschnitten der dritten Ebene mit den Ebenen, in welchen die zwei Punkte liegen, ziehen, so muss der Durchschnitt dieser beiden Parallelen der gesuchte Punkt im Raume sein. —

§. 60.

Wenn man diese beliebige Lage der Ebenen beibehalten wollte, so müsste man,

1. um aus den Parallelen x, y, z, die Lage des Punktes im Raume genau bestimmen zu können, noch ein Merkmal angeben, durch welches man erkennt, ob dieselben bei der Bestimmung der Lage des Punktes im Raume auf X, Y, Z selbst oder auf ihre Verlängerungen aufgetragen werden müssen; —
2. ein Merkmal bezeichnen, um aus den Durch-

schnitten a, a′, a″ ersehen zu können, ob sich der Punkt innerhalb des Raumes der Ebenen (X Y), (X Z), (Y Z) befindet, oder innerhalb des Raumes, der von ihren Verlängerungen gebildet wird. —

§. 61.

(Fig. 29.) Wir wollen nun die Ebenen, auf welche wir einen Punkt bezogen haben, Coordinatenebenen oder Projektionstafeln, ihre Durchschnitte die Coordinatenaxen oder Axen und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt den Anfangspunkt der Coordinaten nennen. Die von einem Punkte aus parallel zu den Coordinatenaxen gezogenen Geraden werden projicirende Linien des Punktes, und ihre Durchschnitte mit den Tafeln Projektionen des Punktes genannt. Denkt man sich nun durch die projicirende Linien y und z eine Ebene gelegt, so wird diese nach §. 36. parallel mit (Y Z), und folglich auch ihre Communsektion C_1 mit (X Z) nach §. 29., parallel zur Axe Z, und ihre Communsektion C_2 mit (X Y), parallel Y sein. Es muss mithin nach §. 28. auch C_1 parallel mit z, und C_2 parallel mit y sein, und da nach §. 5. die Axe X von der Ebene, die durch (x z) gelegt wurde, nur in einem Punkte getroffen wird, so bilden die vier Gerade z, y, C_1 und C_2 ein Parallelogramm, in welchem $C_1 = z$ und $C_2 = y$ ist. Zieht man also von ′a aus parallel zur Axe Z eine Gerade bis zur Axe X, so ist diese gleich der z, und zieht man parallel zur Y von a aus eine Gerade bis zur X, so ist diese gleich y und beide Gerade müssen in einem Punkte der X zusammentreffen, wenn a und a′ die Projektionen eines einzigen Punktes sein sollen. Analog wird jetzt auch die von a aus in (X Y) parallel zur X bis Y gezogene Gerade gleich x, die von ″a parallel zur Z bis Y gezogene Gerade gleich z sein, und mit der in (X Y) zur X parallel gezogenen Geraden in einem Punkte der Y zusammentreffen. Ebenso wird endlich die von ′a parallel zur Axe X bis Z gezogene Gerade gleich x, und die von ″a aus parallel zur Y bis Z gezogene Gerade gleich y sein, beide Gerade aber in einem Punkte der Z zusammentreffen. Nennen wir die von den Projektionen des Punktes parallel zu den Axen gezogenen Geraden die Coordinaten des Punktes, so ersieht man leicht folgende Sätze:

1. Die in der Ebene (X Y) gezogenen Coordinaten sind gleich und parallel den projicirenden Linien y und z, die in der Ebene (X Z) liegenden Coordinaten des Punktes sind gleich und parallel den projicirenden Linien x und z, und endlich die in Ebene (Y Z) liegenden Coordinaten des Punktes, sind einzeln gleich und parallel den projicirenden Linien y und z. —
2. Zwei der Projektionstafeln haben eine der Coordinaten gemeinschaftlich.
3. Jede der Coordinaten hat dieselbe Richtung in Bezug auf die Axen, als die projicirende Linie, mit welcher sie parallel ist.
4. Die zwei nicht gemeinschaftlichen Coordinaten zweier Tafeln treffen in einem Punkte der Axe dieser Tafeln zusammen.
5. Werden die drei Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet (aufgeklappt), so kommen die Axen Y und Z nach §. 23. in eine Gerade zu liegen, wenn man die Ebene (Y Z) in die Verlängerung der Ebene (X Y) bringt, während die in (X Z) und (Y Z) liegenden Coordinaten, welche parallel zu Z und Y sind, nun eine einzige Gerade bilden, welche parallel zur Z ist; die in (X Z) und (Y Z) liegenden Coordinaten, die parallel zu den Axen X und Z sind, kommen in eine Gerade zu liegen, die parallel zur X ist. —

§. 62.

In §. 60. wurde schon erwähnt, dass zur Bestimmung der Lage eines Punktes durch seine projicirende Linien oder durch seine Projektionen Merkmale nothwendig sind, die uns noch den Raum deutlich bezeichnen, innerhalb welchem sich der Punkt befindet. Setzen wir deshalb den projicirenden Linien, welche auf der Seite der Axen selbst liegen, das Zeichen (+) vor, so werden die mit diesen projicirenden Linien parallelen Coordinaten dasselbe Zeichen haben, und die mit den rückwärtigen Verlängerungen der Axen parallelen projicirenden Linien und Coordinaten das Zeichen (—) bekommen. Ferner werden die Projektionen eines Punktes, der innerhalb des Raumes der drei Tafeln selbst sich befindet, auf diese Tafeln zu liegen kommen, während nicht alle drei Projektionen eines andern Punktes auf die Tafeln selbst zu liegen kommen müssen, sondern auf ihre Verlängerungen zu liegen kommen können. Denkt man sich nämlich die Ebene (X Y) rückwärts über X hinaus verlängert, bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung durch (X Y′), und nimmt nun innerhalb des Raumes der Ebenen (X Z) und (X Y′) einen Punkt an, so wird seine Projektion für die Ebene (X Y) auf (X Y′) fallen, und in (X Z) zu liegen kommen, wenn man die Tafeln auf eine Ebene ausbreitet. Seine Coordinaten in (X Y′) liegen nun in (X Z), die mit y parallele Ordinate hat das Zeichen (—), die mit x parallele das Zeichen (+) vor sich, und sonst bleibt Alles, wie vorher. — Denkt man sich ferner Ebene (X Z) unterhalb (X)

verlängert, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung mit (X Z'), verlängert ferner Ebene (Y Z) unterhalb (Y) und gegen Z hinaus, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung von (Y Z) mit (Y' Z'), nimmt sodann innerhalb des Raumes der Ebenen (X Y'), (X Z') und (Y' Z') einen Punkt an, so wird seine Projektion für (X Y) auf (X Y'), seine Projektion für (X Z) auf (X Z') und seine Projektion für (Y Z) in (Y' Z') liegen. Breitet man die Tafeln wie vorhin auf eine Ebene aus, so wird die Projektion des Punktes für (X Y) in (X Z), die Projektion für (X Z) in (X Y), und endlich die Projektion für (Y Z) in (X' Z) zu liegen kommen, während die Coordinaten, welche mit Y und Z parallel sind, das Zeichen (—) haben, die Abscisse aber, welche mit X parallel ist, das Zeichen (+) hat. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung von (Y Z) unterhalb Z mit (Y Z'), und nimmt innerhalb des Raumes der Ebenen (Y Z'), (X Z') und (X Y) einen Punkt an, so werden seine Projektionen für diese drei Tafeln in (X Y) zu liegen kommen; seine Coordinaten, die parallel zu (X) und (Y) gehen, werden das Zeichen (+) haben, die mit Z parallele Ordinate aber wird das Zeichen (—) haben. Nimmt man die Lage des Punktes auch auf der andern Seite der Ebene (Y Z) an, so werden seine Projektionen für die Tafeln ebenso ermittelt werden können, wie diess im Obigen geschehen ist. Bei einer beliebigen Lage des Punktes kann man also aus seinen Projektionen sowohl, als aus seinen Coordinaten wieder auf die Lage zurückkommen. —

Anmerk. Es wäre nun leicht, auch die Lage eines Systems von Punkten durch ihre Projektionen oder durch ihre Coordinaten anzugeben. Da ferner die einzelnen Punkte dieses Systems durch Gerade verbunden gedacht werden können, und leicht nachgewiesen werden könnte, dass wenn ein Punkt in einer Geraden sich befindet, auch die Projektionen des Punktes in den Projektionen der Geraden liegen müssen; so kann man durch Wiederholung des im vor. §. gegebenen Verfahrens auch die Lage eines Polygons und die eines Polyeders bestimmen. —

§. 63.

Die bisher beliebig angenommene Lage der Projektionstafeln ist im Allgemeinen die unbequemste, weshalb nun eine bequemere Lage dieser Tafeln angenommen werden soll: die Tafeln seien nun unter rechten Winkeln gegen einander gestellt; so dass ihre Communsektionen ein rechtwinkliges Coordinatensystem bilden. Die Ebene der (X Y) können wir horizontal legen, und horizontale Projektionstafel, horizontale Tafel, die Ebene (X Z) erste vertikale Tafel, und die Ebene (Y Z) zweite vertikale Tafel nennen. Ebenso sollen die Projektionen eines Punktes für diese Tafeln, horizontale, vertikale und zweit-vertikale Projektionen, ferner die von der vertikalen Projektion aus parallel zus Z gezogene Ordinate vertikale Ordinate, die von der vertikalen Projektion parallel zu X gezogene Gerade Abscisse, die von der horizontalen Projektion parallel mit Y gezogene Ordinate horizontale Ordinate etc. genannt werden. — Durch diese Lage der Tafeln haben wir auch den Vortheil, dass die projicirenden Linien eines Punktes senkrecht auf den Projektionstafeln sind, und mithin die Abstände des Punktes von den Tafeln durch seine projicirende Linien angegeben werden. Die in den vorigen Paragraphen hergeleiteten Sätze werden nun nicht allein gelten, sondern einzelne derselben noch einfacher werden. Aus §. 61. folgt nämlich:

1. Die Projektion eines Punktes auf einer Ebene ist der Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten.
2. Die Coordinaten eines Punktes stehen senkrecht auf den entsprechenden Projektionsaxen.
3. Die vertikale Ordinate des Punktes ist gleich seiner horizontal projicirenden Linie, und gibt daher den Abstand des gesuchten Punktes von der horizontalen Tafel an. Ebenso gibt die von der zweit-vertikalen Projektion des Punktes aus parallel zur Z gezogene Ordinate die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel an. Die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Axe X gezogene Senkrechte oder die horizontale Ordinate des Punktes gibt die Entfernung desselben von der vertikalen Tafel an. (Fig. 30.) Ist also a' die vertikale, a die horizontale und a'' die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, und man zieht von a' auf Z die Senkrechte a' b', so ist diese die Abscisse des Punktes, une gibt seine Entfernung von der zweit-vertikalen Tafel an. Zieht man ferner von a' auf X die Senkrechte a' b, so ist diese die vertikale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der horizontalen Tafel an. Von a auf X die Senkrechte a b gezogen, so ist diese die horizontale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der vertikalen Tafel an, während die von a auf Y gezogene Senkrechte a b'' gleich a' b' ist, die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel angibt. Endlich ist die von ''a auf Y gezogene Senkrechte a'' b'' gleich der vertikalen Ordinate 'a b, und gibt mithin seine Entfernung von der horitontalen Tafel an, und die von ''a auf Z gezogene Senkrechte ''a b' ist gleich a b der horizontalen Ordinate des Punktes im Raume. —

4. (Fig 29.) Breitet man die Tafeln auf einer Ebene so aus, dass die horizontale Tafel in der unterhalb X gedachten Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, und dreht die zweit-vertikale Tafel um die Axe Z, bis sie in die Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, also die Axe Y in der Verlängerung der X liegt; so wird die horizontale Projektion des Punkes mit seiner vertikalen Projektion in einer auf der Axe X senkrechten Geraden zu liegen kommen, nämlich in a'ba, die vertikale und zweit-vertikale Projektion wird in einer auf Z senkrechten Geraden a'b'a'' liegen, und die horizontale Projektion würde mit der zweit-vertikalen Projektion in einer auf Y senkrechten Geraden liegen, wenn man die zweit-vertikale Tafel um Y drehen, und in die Verlängerung der horizontalen Tafel legen würde. Es ist zwar dieser Satz schon aus §. 61. einleuchtend; allein da derselbe so oft angewendet wird, so soll er für diese neue Lage der Tafeln näher erörtert werden. Denkt man sich nämlich durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die Axe X gelegt, so wird diese in einem Punkte b getroffen, und die Durchschnitte dieser Ebene mit der vertikalen und horizontalen Tafel, die in der Richtung b'a und ba liegen, werden nach §. 12. senkrecht auf X sein. Es ist also 'ab senkrecht auf X in der vertikalen Tafel, und mithin parallel zur Axe Z, und ab senkrecht auf X in der horizontalen Tafel, folglich parallel zur Axe Y. Zieht man nun vom Punkte im Raume auf die vertikale Tafel eine Senkrechte, so muss diese nach §. 47. in der durch den Punkt auf X senkrecht gelegten Ebene liegen, und daher b'a treffen, welches in a' geschehen soll, und a' wird die vertikale Projektion des Punktes sein. Nach §. 47. muss auch die horizontal projicirende Linie (d. h. die vom Punkte auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte) in der gedachten Ebene liegen, also ba treffen, und diess soll in a geschehen, so wird a die horizontale Projektion des Punktes sein. Es bilden nun die Linien 'ab, ab mit der horizontal und vertikal projicirenden Linie des Punktes ein Rechteck, in welchem 'ab parallel der horizontal projicirenden Linie, also auch dieser gleich, und ab der vertikal projicirenden Linie parallel, und folglich auch dieser gleich sein muss. Legt man nun die horizontale Tafel, um X dieselbe drehend, in die Verlängerung der vertikalen Tafel, so muss a'b sowohl, als auch ab während der Drehung (nach §. 23.) in der durch den Punkt im Raume auf X senkrecht gelegten Ebene bleiben; mithin wird 'ab mit ba eine einzige Gerade bilden, die senkrecht auf X steht, nachdem die beiden Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind. Auf gleiche Weise kann diess für die vertikale und zweit-vertikale Projektion des Punktes, und überhaupt für irgend zwei Projektionen eines Punktes bewiesen werden, wenn die Projektionstafeln rechte Winkel unter sich bilden. —

§. 64.

Es ist nach den Erläuterungen des vor. §. leicht zu erkennen, ob zwei Punkte, von welchen der eine in einer und der andere in einer andern Projektionstafel liegt, die Projektionen eines einzigen Punktes sind. Verbindet man nämlich beide Punkte durch eine Gerade, und es steht diese Gerade senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln, so sind die beiden Punkte die Projektionen eines Punktes im Raume; steht aber jene Verbindungslinie nicht senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln (nämlich auf der Projektionsaxe), so sind auch jene zwei Punkte nicht die Projektionen eines einzigen Punktes.

§. 65.

Es bleibt nun noch übrig, den §. 62. auch für dieses neue Coordinatensystem nochmal zu erwähnen, damit man noch aus den Projektionen oder aus den Coordinaten des Punktes, die Lage des letzteren wieder bestimmen kann. Sind nur zwei Projektionen eines Punktes gegeben, so kann man schon die Lage desselben bestimmen. (Fig. 30.) Ist nämlich a die horizontale und a' die vertikale Projektion des Punktes gegeben, und man denkt sich vom Punkte a aus eine Senkrechte auf die horizontale Tafel gezogen, und diese so lange, als ba' (seine vertikale Ordinate) gemacht, so wird, weil ba' die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel ist, der Endpunkt jener Senkrechten der gesuchte Punkt sein. Ebenso hätte man aus der vertikalen Projektion des Punktes und seiner horizontalen Ordinate denselben bestimmen können; indem man von a' aus auf die vertikale Tafel eine Senkrechte gezogen hätte, und diese so lang gemacht, als seine horizontale Ordinate angibt. Wir wollen daher vorläufig bloss zwei Projektionen des Punktes, z. B. die horizontale und vertikale betrachten, und dann erst auf seine zweit-vertikale Projektion Rücksicht nehmen.*) Denken

*) Aus diesem Grunde werden wir auch immer einen Punkt dadurch angeben, dass wir seine horizontale und seine vertikale Projektion bestimmen, und wollen unter a'a auch einen Punkt im Raume verstehen, dessen Projektionen a, 'a sind.

wir uns die horizontale Tafel vor der Axe der X und hinter derselben, die vertikale Tafel oberhalb der Axe der X und unterhalb derselben so weit verlängert, als es in irgend einem Falle nothwendig wird: so kann der Punkt in Bezug auf diese Tafeln vier verschiedene Lagen annehmen, die hier erörtert werden sollen. Nennen wir zu diesem Zwecke den Raum, der von der horizontalen und vertikalen Tafel eingehüllt wird, ersten Quadranten; den Raum, welcher von der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und der vertikalen Tafel eingehüllt wird, den zweiten Quadranten; den Raum, welcher von den rückwärtigen Verlängerungen beider Tafeln eingehüllt wird, dritten Quadranten und endlich den Raum, welcher zwischen der horizontalen und der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt, vierten Quadranten. Liegt nun ein Punkt im ersten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf die Tafeln selbst — nicht auf ihre Verlängerungen — fallen. Klappen wir daher die vertikale Tafel auf, so werden beide Projektionen auch in die entsprechende Tafel zu liegen kommen. (Fig. 32.) Liegt ein Punkte im zweiten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel, seine vertikale Projektion auf den Theil der vertikalen Tafel, der früher durch (X Z) bezeichnet wurde. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel durch (X Y′), so ist leicht einzusehen, dass, wenn beide Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet werden, die horizontale Projektion a_2 des Punktes in die vertikale Tafel zu liegen kömmt, so dass jetzt $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate und $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate des Punktes ist. (Fig. 33.) Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf (X Y′), seine vertikale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der vertikalen Tafel, nämlich auf (X Z′); mithin werden die Projektionen a_1, a'_1 des Punktes bei Ausbreitung der Tafeln in eine Ebene in den entgegengesetzten Tafeln erscheinen, nämlich die horizontale Projektion a_1 in der vertikalen und die vertikale Projektion a'_1 in der horizontalen Tafel, wobei aber wieder $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate, $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate des Punktes sein wird. Befindet sich endlich ein Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf (X Y) fallen, also bei Ausbreitung der Tafeln auf eine Ebene beide Projektionen in der horizontalen Tafel erscheinen. Hieraus folgt also:

Ist die vertikale Tafel in die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel gelegt oder umgekehrt, so hat man folgende Merkmale für die Lage des Punktes im Raume:

1. Erscheint die horizontale Projektion in der horizontalen, die vertikale Projektion eines Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt dieser Punkt im ersten Quadranten.
2. Ist jede der Projektionen des Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt der Punkt im zweiten Quadranten.
3. Liegt die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen und seine vertikale Projektion in der horizontalen Tafel, so ist der Punkt im dritten Quadranten.
4. Ist endlich jede der beiden Projektionen in der horizontalen Tafel, so liegt der Punkt im vierten Quadranten.

§. 66.

Was die Coordinaten des Punktes betrifft, so wollen wir ihre Richtungen für einen Punkt im ersten Quadranten als positiv betrachten. Die vertikale Ordinate eines im zweiten Quadranten liegenden Punktes wird sodann positiv, seine horizontale Ordinate aber negativ sein, also ist in diesem Falle entweder die horizontale Ordinate ein Theil der vertikalen, oder letztere ein Theil der horizontalen Ordinate. Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so werden seine Coordinaten die entgegengesetzten Richtungen von denen eines Punktes im ersten Quadranten haben, also beide negativ sein. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Ordinate dieselbe Richtung, wie im ersten Quadranten haben, also positiv sein, seine vertikale Ordinate aber die entgegengesetzte von der eines im ersten Quadranten liegenden Punktes haben, mithin negativ sein.

(Fig. 32.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion eines Punktes, so ist $a_1 b_1$ seine horizontale Ordinate, $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate. Für den Punkt, der seine horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 hat, ist $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate. —

(Fig. 33.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion des Punktes so ist $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate, $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate. Für einen Punkt, dessen horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 ist, wird $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate sein.

§. 67.

(Fig. 30.) Berücksichtigen wir nun auch die zweit-vertikale Tafel, und wollen daher zuerst aus der horizontalen und vertikalen Projektion die zweit-vertikale Projektion des Punktes bestimmen. — Ist a die horizontale und a′ die vertikale Projektion eines Punktes, und man dreht die zweit-vertikale Tafel so weit um die Axe Z, bis sie links von dieser mit der vertikalen Tafel zusammenfällt, so wird nach (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes mit seiner vertikalen in der Senkrechten 'a b′ liegen müssen, die von a′ auf Z gezogen wird. Nach (§. 63, 3.) muss aber auch die zweit-vertikale Projektion des Punktes von der Axe Z so weit entfernt sein, als seine horizontale Ordinate ab angibt: trägt man daher a b von 'b auf die Verlängerung der Senkrechten a′ b′, so wird der hierdurch erhaltene Punkt a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes sein. — (Fig. 31.) Dreht man die zweit-vertikale Tafel so weit um Y, bis sie mit der horizontalen Tafel zusammenfällt, so wird (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion mit der horizontalen Projektion in der von a aus auf Y senkrecht gezogenen a b″ a″ liegen, und (nach §. 63, 3.) von Y so weit entfernt sein, als der Punkt selbst von der horizontalen Tafel entfernt ist. Trägt man daher auf die Verlängerung von a b″ von b″ aus die Gerade b″ a″ = b a′, so wird die zweit-vertikale Projektion "a des Punktes erhalten. Es folgt hieraus das Verfahren, aus zwei Projektionen eines Punktes die dritte zu bestimmen. (Fig. 30.) Zieht man nämlich, wenn die Tafeln, wie in dieser Figur angegeben wird, in einer Ebene liegen, von der horizontalen Projektion auf Y eine Senkrechte a b″, und beschreibt von O aus mit O b″ einen Bogen, so wird dieser die neue Lage der Y in b″ treffen. Von diesem Punkte b″ aus eine Senkrechte a″ b″ = a′ b auf Y gezogen, oder die Senkrechte a′ b′ so weit verlängert, bis b″ a″ getroffen wird, gibt in a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes. (Fig. 31.) Wäre die zweit-vertikale Tafel in die horizontale Tafel gelegt worden, so würde Z nach der rückwärtigen Verlängerung von X zu liegen kommen. Man müsste nun von 'a auf Z die Senkrechte a′ b′ ziehen, und von O aus mit O b′ einen Kreisbogen beschreiben, der die neue Lage der Z in b′ schneidet, von diesem Durchschnittspunkte in der horizontalen Tafel auf Z die Senkrechte b′ a″ = a b ziehen, oder a b″ so weit verlängern, bis b′ a″ getroffen wird, so wird man in dem hierdurch erhaltenen Punkte a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten. — (Fig. 30.) Wäre die zweit-vertikale und die horizontale Projektion, nämlich a und a″ gegeben, so könnte man die vertikale Projektion durch ein ähnliches Verfahren erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion aus auf X eine Senkrechte, so muss (§. 63, 4.) in dieser auch die vertikale Projektion des Punktes liegen, und so weit von der Axe X entfernt sein, als der Punkt von der horizontalen Tafel entfernt ist, also wird die vertikale Ordinate des Punktes = a″ b″ sein; diese also von b aus auf die genannte Senkrechte in der vertikalen Tafel getragen, gibt die vertikale Projektion a′ des Punktes. Verlängert man die von a″ auf Z gezogene Senkrechte, bis sie die Senkrechte a b trifft, so erhält man die vertikale Projektion a′ als Durchschnittspunkt beider Senkrechten. (Fig. 30.) Wäre endlich die zweit-vertikale und vertikale Projektion eines Punktes gegeben, so erhält man die horizontale Projektion a entweder dadurch, dass man von a′ aus auf X die Senkrechte a′b zieht, und von b aus die Gerade 'b a″ auf a′ a trägt, oder indem man mit O b″ einen Bogen beschreibt, welcher dann die erste Lage der Axe Y in b″ treffen wird, von b″ auf Y in der horizontalen Tafel eine Senkrechte zieht, so wird in dem Durchschnittspunkte derselben mit der von a′ auf X gezogenen Senkrechten a′ b a″ die horizontale Projektion a des Punktes liegen. —

§. 68.

In dem vorigen §. wurde angenommen, dass sich der Punkt im ersten Quadranten befindet, und wurde überhaupt nicht Rücksicht auf die zweit-vertikale Tafel genommen. Wollte man auch diese berücksichtigen, so müsste man den ganzen Raum, in welchem sich ein darzustellender Punkt befinden könnte, nicht in vier, sondern in acht Theile getheilt denken, von welchen der erste von der vertikalen, horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gebildet wird; der zweite von den Theilen der vertikalen und horizontalen Tafel, die links der der zweit-vertikalen Tafel liegen und von dieser selbst, der dritte von dem Theile der vertikalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, dann von dem Theile der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, und von der rückwärtigen Verlängerung der letztern eingehüllt wird, u. s. f. Da aber die horizontale und vertikale Projektion eines Punktes immer hinreichend sind, den Punkt zu bestimmen, so brauchen wir auf die Lage des Punktes gegen die zweit-vertikale Tafel nicht Rücksicht nehmen, sondern können diese jedesmal, wenn es nothwendig ist angeben. (Fig. 32.) Ist a_2 die horizontale und a'_2 die vertikale Projektion eines Punktes, so liegt (§. 65.) der Punkt im zwei-

ten Quadranten, folglich wird bei Ausbreitung der Tafeln seine zweit-vertikale Projektion zwischen (X und Z) fallen, nach a''_2, und wird nach §. 67. erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion a_2 des Punktes eine Senkrechte auf Y, so trifft diese Senkrechte die rückwärtige Verlängerung der Y in b''_2, und in dieser Senkrechten würde (nach §. 63. 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes liegen, wenn die Tafel (YZ) in der horizontalen Tafel liegen würde. Da aber die Tafel (YZ) um Z gedreht und in die vertikale Tafel gelegt wurde, so fällt die rückwärtige Verlängerung von Y mit X zusammen, und daher wird auch die Gerade $a_2\ b''_2$ nun auf X senkrecht zu stehen kommen, und in der Senkrechten $b''_2\ a''_2$ liegt mithin die zweit-vertikale Projektion des Punktes. Letztere muss aber auch (§. 63. 4.) mit der vertikalen Projektion a'_2 in der Senkrechten $a'_2 b'_2$ liegen, und liegt daher in a''_2, dem Durchschnitte dieser beiden Senkrechten. Es gibt hier wieder die Gerade $a'_2 b'_2$ oder $a_2 b''_2$ die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel an. Würde sich der Punkt links der zweit-vertikalen Tafel befinden, so würde seine horizontale Projektion sowohl, als seine vertikale Projektion zwischen (YZ) gefallen sein, also seine zweit-vertikal projicirende Linie die entgegengesetzte Richtung von der vorigen haben. (Fig. 33.) Auch bei der Lage des Punktes im dritten Quadranten fällt die zweit-vertikale Projektion rechts von (YZ), und zwar nach a''_1, und wird (genau nach §. 67.) erhalten, wenn man von der vertikalen Projektion a'_1 des Punktes auf die rückwärtige Verlängerung von Z eine Senkrechte $a_1 b_1$ zieht, und auf diese von b'_1 aus die Entfernung $a_1 b_1$ des Punktes von der vertikalen Tafel trägt. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten und rechts von (YZ), so fällt seine zweit-vertikale Projektion zwischen (YY). Da sie (§. 63.) in der Senkreehten $a'_2 b'_2$ liegen, und von der rückwärtigen Verlängerung der Axe Z (die nach Y fällt) so weit entfernt sein muss, als $a_2 b_2$ angibt, so darf man nur von b'_2 aus die Gerade $b'_2 a''_2 = a_2 b_2$ machen, und es wird in a''_2 die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten werden. — Für einen Punkt, der links von (YZ) liegt, kömmt keine Aenderung in Bezug auf seine zweit-vertikale Projektion vor, aber seine horizontale und vertikale Projektion werden links von (YZ) zu liegen kommen, also die Abscisse des Punktes, welche (nach 61.) der horizontalen und vertikalen Tafel gemeinschaftlich ist, die entgegengesetzte Richtung von der eines rechts von (YZ) liegenden Punktes haben.

§. 69.

Es soll nun kurz wiederholt werden, wie man die Lage eines Punktes sich wieder vorstellen könnte. Deshalb seien

1. die Projektionen, und zwar horizontale und vertikale Projektion gegeben; so denke man sich die horizontale Tafel wieder um X gedreht, bis sie senkrecht auf der vertikalen Tafel ist. Ist nun die horizontale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel, wie a_1 Fig. 32 und a_2 Fig. 33, so denke man sich von derselben aus eine Senkrechte gezogen, und auf dieser oberhalb der horizontalen Tafel die Länge der vertikalen Ordinate aufgetragen, wenn letztere in der vertikalen Tafel liegt (Fig 32.); liegt aber die vertikale Ordinate des Punktes in der horizontalen Tafel, so muss man die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte unterhalb der horizontalen Tafel verlängern, und auf diese Verlängerung die vertikale Ordinate auftragen. Befindet sich aber die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen Tafel, so hat man auf diese die Senkrechte zu ziehen, und die vertikale Ordinate auf letztere zu tragen, und zwar vor derselben, wenn die vertikale Projektion des Punktes in dieser Tafel liegt, hingegen rückwärts in der Richtung der rückwärtigen Verlängerung dieser Tafel, wenn die vertikale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel liegt, oder seine vertikale Ordinate negativ ist. —
2. Sind die Coordinaten des Punktes gegeben, und man soll die Lage des Punktes durch dieselben bestimmen; so trage man die Abscisse vom Anfangspunkte O aus auf X, wenn sie positiv ist, auf die rückwärtige Verlängerung von X, wenn sie negativ ist. Vom Endpunkte der Abscisse aus ziehe man eine Senkrechte auf X, die in der vertikalen Tafel oder ihrer Verlängerung liegt, je nachdem die vertikale Ordinate positiv oder negativ ist, und mache diese Senkrechte gleich der vertikalen Ordinate, so erhält man die vertikale Projektion des Punktes. Ebenso ziehe man auch auf X eine Senkrechte, die in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, je nachdem die horizontale Ordinate positiv oder negativ ist, und mache diese Senkrechte gleich der horizontalen Ordinate; so erhält man die horizontale Projektion des Punktes, und kann also aus diesen beiden Projektionen die dritte (§. 67.), und (nach 1 dieses §.) den Punkt im Raume angeben. —

§. 70.

Liegt ein Punkt in einer der Projektionstafeln selbst, so muss jede der übrigen Projektionen in den entsprechenden Axen liegen, welche die Durchschnitte dieser Tafel mit den andern Projektionstafeln sind. (Fig. 33.) Ist z. B. a_1 ein in der horizontalen Tafel liegender Punkt, so muss seine vertikale Projektion (§. 63.) in der Senkrechten $a_1 a_1'$ liegen, und (§. 63.) von X so weit entfernt sein, als die vertikale Ordinate angibt. Da aber letztere für dieses Beispiel Null ist, so muss a'_1 selbst die vertikale Projektion sein. Ist a'_2 die vertikale Projektion eines in der vertikalen Tafel liegenden Punktes, also a'_2 der gegebene Punkt, so muss (§. 63.) seine zweit-vertikale Projection in der Senkrechten $a'_1 a''_2$ liegen, und a''_2, nämlich der Durchschnitt dieser Senkrechten mit Z sein, weil der Punkt von der vertikalen Tafel nicht entfernt, also die der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gemeinschaftliche horizontale Ordinate Null sein muss. Aus demselben Grunde wird a_2 die horizontale Projektion des Punktes a'_2 sein. Ebenso ist auch die vertikale Projektion des in der zweit-vertikalen Tafel liegenden Punktes a''_3 in a'_3 und seine horizontale Projektion in a_3. —

Will man daher, dass ein Punkt in einer der Tafeln liege, so hat man diese letztere so weit parallel mit sich selbst zu verschieben, bis sie durch den Punkt geht, und daher ihre Durchschnitte mit den beiden übrigen Tafeln so weit parallel mit sich selbst verrücken, bis sie durch die übrigen Projektionen des Punktes gehen. (Fig. 30.) Soll z. B. die horizontale Tafel durch den gegebenen Punkt gehen, so hat man nur die Axe X parallel zu ihrer ersten Lage zu verschieben, bis sie die vertikale Projektion 'a des Punktes enthält, so wird bei dieser neuen Lage der horizontalen Tafel und dem neuen Anfangspunkte O' der Punkt a in dieser Tafel enthalten sein. —

§. 71.

Bisher wurde von der Darstellung eines Punktes gesprochen, welche zuerst durch schiefe und dann durch rechtwinklige Projektionen geschah. Wenn wir von nun an von Projektion eines Punktes auf einer Ebene sprechen, so verstehen wir darunter immer den Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten. — (Fig. 35.) Ist nun eine Gerade im Raume gegeben, die dargestellt werden soll, so denke man sich durch dieselbe eine Ebene gelegt, die senkrecht auf der Projektionsebene steht, und bezeichne den Durchschnitt dieser Ebene mit der Projektionstafel. Diesen Durchschnitt nennt man Projektion der Geraden, und jene Ebene, die senkrecht auf der Projektionstafel steht, wird projicirende Ebene genannt, und zwar horizontal-, vertikal-, oder zweit-vertikal-projicirende Ebene, je nachdem man die Projection der Geraden auf der horizontalen Tafel, oder die horizontale Projektion, oder die Projektion der Geraden auf der vertikalen Tafel, nämlich die vertikale Projektion derselben, oder ihre Projektion auf der zweit-vertikalen Tafel, nämlich die zweit-vertikale Projektion der Geraden, bestimmt hat. — Hier ist ac die horizontale Projektion, a'c' die vertikale Projektion einer Geraden, und zugleich ist die zweit-vertikale Projektion ersichtlich für den Fall sowohl, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der vertikalen Tafel, als auch für den Fall, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der horizontalen Tafel niedergelegt ist. — Um die Gerade im Raume wieder angeben zu können, sind zwei Projektionen derselben hinreichend und nothwendig, wenn nicht einzelne Punkte der Geraden zu ihrer Darstellung benützt werden sollen. Ist z. B. die horizontale und vertikale Projektion einer Geraden bekannt, und man denkt sich durch die horizontale Projektion eine Ebene senkrecht auf die horizontale Tafel gelegt, so muss in dieser die Gerade enthalten sein. Letztere muss aber auch in der Ebene enthalten sein, die man durch die vertikale Projektion senkrecht auf die vertikale Tafel legt, und muss daher im Durchschnitte dieser und der vorigen Ebene enthalten sein. Auf gleiche Weise könnte man aus der vertikalen und zweit-vertikalen Projektion einer Geraden, oder aus ihrer horizontalen und zweit-vertihalen Projektion die Lage derselben im Raume bestimmen. —

§. 72.

(Fig. 35.) Es sei nun auf einer Geraden ein Punkt angegeben, der projicirt werden soll; so suche man zuerst eine Projektion der Geraden, z. B. ihre horizontale Projektion ac, indem man durch diese Gerade ihre projicirende Ebene legt. Zieht man nun die horizontal projicirende Linie des Punktes, so muss dieselbe nach §. 46. in der horizontal projicirenden Ebene der Geraden liegen; folglich liegt die horizontale Projektion des Punktes in der horizontalen Projektion der Geraden. Aus gleichem Grunde muss die vertikale Projektion des Punktes in der vertikalen Projektion und die zweit-vertikale Projektion des Punktes in der zweit-vertikalen Projektion der Geraden liegen, so dass man den Satz aussprechen kann: Die Projektionen eines auf einer Geraden sich befinden-

den Punktes liegen in den entsprechenden Projektionen der Geraden. (Fig. 35.) Sind die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden angegeben, wie $a_1 a'_1 a''$, und man denkt sich die projicirenden Ebenen der Geraden und die projicirenden Linien des Punktes gezogen, so müssen letztere (nach §. 46.) sich in den projicirenden Ebenen der Geraden befinden, und mithin der Punkt im Raume auf der Geraden sein, so dass also auch der umgekehrte Satz wahr ist:

Liegen die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden, so muss der Punkt auf der Geraden sich befinden.

§. 73.

(Fig. 36.) Aus den im vorigen §. entwikelten Sätzen und dem §. 63. kann man folgende Folgerungen ziehen:

1. Ist eine Gerade durch ihre Projektionen $a'_1 b'_1$, $a''_1 b''_1$, $a_1 b_1$ gegeben, und man will einen Punkt durch seine Projektionen bestimmen, der auf der Geraden im Raume liegen soll, so nehme man eine seiner Projektionen, z. B. seine vertikale Projektion in a'_1 an. Zieht man nun die Senkrechten $a'_1 a_1$, $a_1 a''_1$ auf die Axen X und Z, so muss in jener die horizontale und in dieser die zweit-vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) liegen; mithin wird (nach vor. §.) in a_1, dem Durchschnitte von $a_1 a'_1$ mit $a_1 b_1$ die horizontale Projektion und in a''_1, dem Durchschnitte der Senkrechten $a'_1 a''_1$ mit $a''_1 b''_1$ die zweit-vertikale Projektion des Punktes liegen.
2. Soll eine begränzte Gerade angegeben werden, so darf man nur die Projektonen der Geraden begränzen, und es werden dann die Endpunkte der Projektionen auch die Projektionen der Endpunkte im Raume sein. —
3. Theilt man die Gerade in gleiche Theile, so werden die Projektionen der Geraden d rch die Projektionen ihrer Theilpunkte in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt. Denn denkt man sich die Theilpunkte projicirt, so werden ihre Projektionen in den Projektionen der Geraden (nach vor. §.) liegen. Zieht man nun in einer der projicirenden Ebenen, z. B. in der horizontal projicirenden Ebene vom Endpunkte der horizontalen Projektion aus zur Geraden eine Parallele gezogen, so bilden die Theile der projicirenden Linien, welche zwischen dieser Parallelen und der Projektion der Geraden liegen, mit den Theilen dieser letzteren Linie ähnliche Dreiecke, aus welchen sich ergibt, dass die Theile der Geraden sich verhalten, wie die entsprechenden Theile ihrer Projektionen. Ist also die Gerade in gleiche Theile getheilt, und man projicirt ihre Theilungspunkte, so werden die Projektionen der letzteren auch die Projektionen der Geraden in gleiche Theile theilen. —
4. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Tafel, so wird ihre Projektion in dieser Tafel ihr Fusspunkt sein, in welchen auch die Projektionen aller Punkte fallen müssen, die auf dieser Geraden liegen. —

§. 74.

(Fig. 36.) Betrachten wir nun noch einige besondere Lagen der Geraden im Raume. Es sei $a_1 b_1$ die horizontale, $a'_1 b'_1$ die vertikale, $a''_1 b''_1$ die zweit-vertikale Projektion einer begränzten Geraden; von diesen sei $a_1 b_1$ parallel zu Axe X, und $a''_1 b''_1$ parallel zur Axe Z. Da nun die horizontale Ordinate des ersten Punktes gleich der horizontalen Ordinate des zweiten Punktes, gleich der horizontalen Ordinate irgend eines Punktes der Geraden ist, und (nach §. 63, 3.) die horizontale Ordinate eines Punktes seine Entfernung von der vertikalen Tafel angibt; so müssen alle Punkte dieser Geraden gleich weit von der vertikalen Tafel entfernt sein, und mithin ist diese Gerade mit der vertikalen Tafel parallel. Wir hätten dasselbe auch aus der Entfernung $a''_1 b''_1$ der Punkte von der Axe Z entnehmen können, denn diese ist gleich den horizontalen Ordinaten der Punkte der Geraden. Es folgt also:

Ist die hori zontale Projektion einer Geraden parallel zur Axe X, so ist die zweit-vertikale Projektion der Geraden parallel mit Z, die Gerade im Raume aber parallel zur vertikalen Tafel. (Fig. 36.) Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Gerade, deren vertikale Projektion ($a'_2 b'_2$) parallel mit X ist, parallel zur horizontalen Tafel, ihre zweit-vertikale Projektion ($a''_2 b''_2$) parallel mit Y sein muss; dass ferner die Gerade, deren vertikale Projektion ($a'_3 b'_3$) parallel mit Z und deren horizontale Projektion ($c_3 b_3$) parallel mit Y ist, zur zweit-vertikalen Tafel parallel sein wird. (Fig. 38.) Ist eine Gerade parallel zur horizontalen Tafel, so muss auch ihre vertikale Projektion parallel zur Axe X sein, weil die vertikalen Ordinaten aller ihrer Punkte (§. 63.) gleich den horizontal projicirenden Linien dieser Punkte, also unter sich in

diesem Falle gleich sein müssen. Ebenso muss die horizontale Projektion einer mit der vertikalen Tafel parallelen Geraden, zur Axe X parallel, und mithin auch die zweit-vertikale Projektion mit Z parallel sein. — Wenn endlich die Gerade parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist; so muss ihre horizontale Projektion parallel zur Axe Y, ihre vertikale Projektion aber zur Axe Z parallel sein. — (Fig. 38.) Die Projektionen ($a'_1 b'_1$, $a_1 b_1$) sowohl, als auch die ($^z,q^z,v$) und (a_2 b_2) gehören also zu einer Geraden, die parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist.

§. 75.

(Fig. 37.) Steht eine Gerade senkrecht auf einer der Tafeln, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so gibt der Fuss der Geraden ihre horizontale Projektion in $a_1 b_1$ an, ihre vertikale Projektion $a'_1 b'_1$ sowohl, als auch ihre zweit-vertikale Projektion $a''_1 b''_1$ muss (§. 74.) parallel mit Z sein, weil die Gerade parallel mit jeder dieser beiden Tafeln ist. — Umgekehrt wird uns auch aus den Projektionen $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$, $a''_1 b''_1$ ersichtlich sein, dass die Gerade senkrecht auf der horizontalen Tafel ist; denn dieselbe muss nach vor. §. parallel mit der vertikalen Tafel sowohl, als auch mit der zweit-vertikalen Tafel sein, also senkrecht auf der horizontalen Tafel, was übrigens schon aus der horizontalen und vertikalen Projektion allein hervorgeht. — In derselben Figur ist $a'_2 b'_2$ die vertikale, $a_2 b_2$ die horizontale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden, die senkrecht auf der vertikalen Tafel steht. — Ist eine Gerade parallel mit zwei Tafeln, so muss sie senkrecht auf der dritten, also auch ihre Projektionen in den Tafeln, die ihr parallel sind, mit dem Durchschnitte dieser beiden Tafeln parallel. —

§. 76.

Sind zwei Gerade im Raume gegeben, so können dieselben entweder in einer Ebene liegen, oder nicht. Im ersten Falle, in welchem man durch beide eine Ebene legen kann, sind entweder diese Geraden unter sich parallel, oder sie schneiden sich, wenn sie genugsam verlängert werden. — Angenommen, es seien die Geraden parallel unter sich, und man sucht ihre Projektionen, so muss man zu diesem Zwecke durch jede derselben die projicirenden Ebenen legen, und es seien (Fig. 39.) die horizontalen Projektionen der Geraden $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, die vertikalen Projektionen derselben seien $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$. Betrachtet man die beiden horizontal projicirenden Ebenen der Geraden, so liegen in der einen die horizontal projicirenden Linien der Endpunkte der einen Geraden (§. 70.) und in der andern liegen die horizontal projicirenden Linien der anderen Geraden. Die horizontal projicirenden Linien aller Punkte sind aber unter sich parallel, und da hier die Geraden auch unter sich parallel angenommen wurden, so muss (§. 36.) die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein, mithin ist (nach §. 33.) auch $a_1 b_1$ parallel mit $a_2 b_2$. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass auch $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$ und endlich $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$ ist. **Sind also zwei Gerade im Raume parallel, so müssen ihre horizontalen Projektionen unter sich parallel sein, ebenso auch ihre vertikalen Projektionen und ihre Projektionen in der zweit-vertikalen Tafel.** Liegen beide Gerade so, dass die durch sie gelegte Ebene eine projicirende Ebene wird, so fallen die Projektionen einer Tafel in eine einzige Gerade zusammen, die in den andern müssen aber parallel sein. Sind beide Gerade in einer Ebene, die senkrecht auf einer Axe, z. B. auf X ist, so werden die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die vertikalen Projektionen in einer einzigen Geraden liegen, die zweit-vertikalen Projektionen müssen aber unter sich parallel sein. Diese Fälle machen aber durchaus keine Ausnahme. —

Ist nun $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$, und mithin auch $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$, und man denkt sich die projicirenden Ebenen dieser Geraden gezogen, so muss, weil $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, ferner weil die horizontal projicirende Linie von a_1, parallel mit der horizontal projicirenden Linie von a_2 (§. 27.) ist, auch die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein. Ebenso kann gezeigt werden, dass die vertikal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur vertikal projicirenden Ebene der andern Geraden sein muss. Da also die zwei projicirenden Ebenen der einen Geraden einzeln parallel zu den beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden sind, so muss (§. 38.) die Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der einen Geraden parallel sein zur Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden, oder die beiden Geraden, deren horizontale Projektionen unter sich parallel sind, und deren vertikale Projektionen auch parallel unter sich sind, müssen parallel sein. — **Sind also die horizontalen Projektionen zweier Geraden sowohl, als auch ihre vertikalen Projektionen unter sich parallel, so**

sind die Geraden im Raume ebenfalls parallel zu einander.

§. 77.

(Fig. 40.) Sind die Projektionen zweier Geraden gegeben, und zwar $a_1 b_1$ die horizontale Projektion der einen, $a'_1 b'_1$ ihre vertikale und $a''_1 b''_1$ ihre zweit-vertikale Projektion, $a_2 b_2$ die horizontale Projektion, $a'_2 b'_2$ die vertikale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion der andern Geraden, ferner p die horizontale, p' die vertikale und p'' die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, der sich auf beiden Geraden befindet, so müssen sich die Geraden schneiden; denn da (nach §. 63.) p, p', p'' die Projektionen eines einzigen Punktes bedeuten, und diese Projektionen sich auf den Projektionen beider Geraden befinden, so muss der Punkt selbst (§. 72.) sich auf beiden Geraden befinden, oder beide Gerade schneiden sich. Es folgt also hieraus:

Schneiden sich die horizontalen Projektionen zweier Geraden, so wie auch ihre vertikalen Projektionen so, dass die Verbindungsgerade ihrer Durchschnittspunkte senkrecht auf der X steht; so müssen sich die Geraden im Raume schneiden.

Dasselbe würde auch statt finden, wenn sich die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die zweit-vertikalen Projektionen schneiden, und zwar so, dass die Durchschnittspunkte die Projektionen eines Punktes sind, also die Bedingungen des §. 63. erfüllen. Derselbe Satz findet auch umgekehrt statt. Schneiden sich nämlich die Geraden im Raume, so müssen die Projektionen des Durchschnittspunktes sich auf den entsprechenden Projektionen der Geraden (§. 72.) befinden, also die Projektionen einer und derselben Tafel sich entweder schneiden, oder in einer Geraden liegen. Steht nämlich die Ebene, welche durch beide Gerade gelegt werden kann, senkrecht auf einer der Projektionstafeln, so ist diese Ebene projicirende Ebene der Geraden, und es fallen dann beide Projektionen der Geraden auf dieser Tafel in eine einzige Gerade zusammen. Liegen beide Gerade so, dass die durch dieselben gelegte Ebene senkrecht auf einer Axe steht, z. B. auf der Axe X, so fallen sowohl vertikale als horizonlae Projektionen in einer einzigen Geraden, und es müssen sich dann die zweit-vertikalen Projektionen so schneiden, dass ihr Durchschnittpunkt mit der vertikalen Projektion des Durchschnittspunktes beider Geraden in einer auf Z senkrechten Geraden liegt. Es ist also zur Genüge gezeigt, wie man erkennen kann, ob durch zwei Gerade im Raume eine einzige Ebene gelegt werden kann, und ob diese Geraden parallel sind, oder sich schneiden. — Erfüllen die Projektionen zweier Geraden weder die im §. 76. festgesetzten noch die in diesem Parapraphe ausgesprochenen Bedingungen, so liegen dieselben in verschiedenen Ebenen, oder man kann keine Ebene finden, in welcher beide Gerade zugleich liegen.

§. 78.

Der im §. 72. erläuterte Satz kann auch angewendet werden, um jede Figur, die von Geraden begränzt wird, zu projiciren. So zeigt Fig. 41. die Projektionen eines Dreieckes, dessen Lage im Raume leicht durch die Projektionen $a_1 a'_1 a''_1$, $a_2 a'_2 a''_2$, $a_3 a'_3 a''_3$ seiner Scheitel angegeben werden kann, so dass also dieses Dreieck durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine vertikale Projektion $a'_1 a'_2 a'_3$, oder durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine zweit-vertikale Projektion $a''_1 a''_1 a''_3$ völlig bestimmt ist. — In Fig. 42. ist $a_1 a_2 a_3 a_4$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ die vertikale und $a''_1 a''_2 a''_3 a''_4$ die zweit-vertikale Projektion eines Viereckes, dessen Lage ebenfalls leicht durch die Projektionen seiner Scheitel angegeben werden kann. Zugleich bemerkt man, dass jede dieser Projektionen ein Parallelogramm ist, folglich müssen je zwei gegenüberstehende Seiten des Viereckes im Raume (§. 76.) unter sich parallel sein, und das projicirte Viereck ist mithin ein Parallelogramm. Ferner ersieht man hieraus, dass wenn zwei begränzte Gerade im Raume parallel und gleich sind, auch ihre zusammengehörigen Projektionen es sein müssen. — Auf dieselbe Weise könnte jede geradlinig begränzte Figur projicirt, und durch ihre Projektionen die Lage und Grösse derselben im Raume wieder angegeben werden. —

§. 79.

Nachdem die Darstellung eines Punktes, einer Geraden und einer von Geraden begränzten Figur gezeigt wurde, soll auf die Darstellung einer Ebene übergegangen werden. Dass eine Ebene durch die Projektionen dreier auf ihr liegender Punkte der Lage nach bestimmt ist, lässt keinen Zweifel übrig, weil (§. 8.) durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, die Lage der Ebene vollkommen bestimmt ist. Geht man aber auf die Erzeugung einer Ebene zurück, und benützt diese für ihre Darstellung, so wird durch die Projektionen zweier Geraden die sich in der Ebene befinden, letztere der Lage nach bestimmt sein. Man wählt als solche Gerade die Communsektionen der

Ebene mit den Projektionstafeln, weil die Projektionen jeder dieser Geraden sehr einfach werden, und nur eine ihrer Projektionen zur Bestimmung ihrer Lage nothwendig ist. Die Communsektion einer Ebene mit einer der Projektionstafeln wird Spur oder Grundschnitt genannt, und zwar nennt man die Communsektion einer Ebene mit der horizontalen Tafel ihre horizontale Spur, die Communsektion einer Ebene mit der vertikalen Tafel ihre vertikale Spur, endlich die Communsektion einer Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel die zweit-vertikale Spur dieser Ebene. Man nennt auch Spur einer Geraden den Durchgangspunkt der letzteren mit einer der Projektionstafeln, und zwar ihren Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel die horizontale Spur, ihren Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel die vertikale Spur, und ihren Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel die zweit-vertikale Spur derselben.

§. 80.

Denkt man sich nun eine Ebene im Raume gegeben, so wird ihre Lage nicht verändert, wenn man sich dieselbe so weit man will, verlängert denkt. Verlängert man daher diese Ebene, so wird sie entweder jede der Tafeln treffen, oder nicht. Trifft sie eine der Tafeln nicht, so ist sie (§. 25.) mit derselben parallel; ist dieselbe aber mit keiner der Tafeln parallel, so werden letztere von dieser Ebene (§. 13.) nach einer Geraden geschnitten. Eine jede der Axen wird (§. 5.) von einer Ebene in einem Punkte getroffen, wenn die Ebene nicht parallel zu denselben ist. — (Fig. 43.) Ist nun eine Ebene nicht parallel zu einer der Axen, also auch mit keiner der Tafeln, so muss sie die Axe der X in einem Punkte (A) treffen, die Axe der Y ebenfalls in einem Punkte (A″) und die Axe der Z in einem Punkte (′A). Da nun der Punkt A, in welchem die Axe X von der Ebene getroffen wird, sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Tafel angehört, so muss derselbe auch sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Spur der Ebene zugleich angehören, woraus also folgt, dass horizontale und vertikale Spur einer Ebene, die mit X nicht parallel ist, in einem Punkte der Axe X sich schneiden müssen. Es wird auch Z von der Ebene in einem Punkte ″A getroffen, weshalb also die vertikale und zweit-vertikale Spur der Ebene ebenfalls in einem Punkte von Z zusammentreffen müssen, und ebenso müssen sich die horizontale und zweit-vertikale Spur der Ebene in einem Punkte der Axe Y treffen, wenn die Ebene nicht mit Y parallel ist.

Wird die Axe X von der horizontalen Spur nicht getroffen, so ist letztere (§. 11.) mit X parallel, und mithin (§. 29.) auch X mit der Ebene parallel, weshalb also auch die vertikale Spur (als eine in der Ebene liegende Gerade) die Axe X nicht treffen kann, also mit ihr (§. 11.) parallel sein muss. Da aber die horizontale Spur sowohl, als auch die vertikale in diesem Falle mit X parallel ist, so ist (§. 28.) auch die horizontale Spur mit der vertikalen Spur parallel. Aus diesem geht also hervor:

dass wenn die horizontale oder vertikale Spur parallel zur Axe X ist, beide sowohl unter sich parallel, als auch parallel zur Axe X sein müssen. Ebenso muss auch die vertikale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Z ist, und endlich muss die horizontale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Y ist. —

§. 81.

Sind nun zwei Spuren, und zwar horizontale und vertikale Spur einer Ebene gegeben, so kann man sich durch dieselben wieder die Lage der Ebene, zu welcher sie gehören, vorstellen. Schneiden sich nämlich erstens die beiden Spuren, was nach vor. §. in einem Punkte der X statt finden muss, so kann man die eine derselben, z. B. die horizontale Spur als Generatrix, und die andere als Direktrix der Ebene betrachten. Bewegt sich nun die horizontale Spur parallel zu ihrer ersten Lage, also auch (§. 29.) parallel mit der horizontalen Tafel bleibend fort, und trifft bei ihrer Bewegung stets die vertikale Spur, so wird (§. 5.) dieselbe Ebene erzeugt, welche durch ihre Spuren dargestellt ist, und es ist also diese Erzeugung ein Mittel, die Ebene im Raume vorstellen zu können. Denkt man sich aber durch beide Spuren eine Ebene gelegt, so wird letztere auch die durch ihre Spuren dargestellte Ebene sein, wodurch man sich also ebenfalls die Lage der Ebene im Raume versinnlichen kann. (Fig. 43.) Es sei E die horizontale, ′E die vertikale und ″E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, bringt man die Tafel in ihre erste Lage, und die Gerade E bewegt sich parallel mit sich selbst (also auch parallel mit der horizontalen Tafel) an ′E oder an ″E fort, so wird der geometrische Ort dieser Erzeugenden die Ebene sein. Dieselbe Ebene wird erhalten, wenn sich ′E parallel zu ihrer ersten Lage

(also parallel mit der vertikalen Tafel) fortbewegt, und dabei stets E oder "E trifft. Endlich ist die Ebene, die man durch E und 'E oder durch 'E und "E etc. etc. legen kann dieselbe, wie die vorhin erzeugte. —

(Fig. 46.) Sind *zweitens* beide Spuren parallel mit X, so kann man sich auch wieder auf zweierlei Weise die Lage der Ebene versinnlichen, wenn man die horizontale und vertikale Tafel in ihre erste Stellung (rechtwinklig auf einander) bringt. Legt man nämlich durch diese beiden Spuren (T und 'T) eine Ebene, so ist diese die durch T und 'T vorgestellte; oder lässt man eine beliebige Gerade so fortbewegen, dass sie stets diese beiden Spuren trifft, so wird der durch jene Gerade beschriebene geometrische Ort die Ebene sein, wodurch also ihre Lage im Raume versinnlicht werden kann.

Aus dem, was in diesem und dem vorigen §. erläutert wurde, folgt also,

dass eine Ebene durch zwei ihrer Spuren völlig bestimmt ist, und dass diese Spuren entweder in einem einzigen Punkte der Projektionsaxe (also die horizontale und vertikale Spur in einem Punkte der Axe X) zusammentreffen, oder unter sich parallel sein müssen. —

§. 82.

Da durch zwei Spuren einer Ebene die Lage der letzteren völlig bestimmt ist, so wird die dritte aus den beiden andern angegeben werden können. (Fig. 43.) Ist also E die horizontale und E' die vertikale Spur einer Ebene gegeben, so sind zur Auffindung der zweit-vertikalen Spur zwei Punkte nothwendig, die sowohl in der Ebene, als auch in der zweit-vertikalen Tafel liegen. Verlängert man aber 'E bis zur Axe Z und E bis zur Axe Y, so wird 'A sowohl, als auch "A die verlangten Bedingungen erfüllen, und mithin werden diese beiden Punkte 'A und "A der zweit-vertikalen Spur angehören. Bringt man also die zweit-vertikale Tafel in die vertikale Tafel, so bleibt 'A liegen, während "A einen Kreisbogen beschreibt vom Halbmesser "A O, dessen Mittelpunkt O ist, und nach "A der neuen Lage von Y (Verlängerung der Axe X) zu liegen kömmt. Verbindet man nun 'A mit "A durch eine Gerade, so wird letztere die zweit-vertikale Spur "E der Ebene sein. Ein ähnliches Verfahren würde man einschlagen, wenn aus der vertikalen und zweit-vertikalen Spur die horizontale, oder aus der horizontalen und zweit-vertikalen die vertikale Spur bestimmt werden sollte. (Fig. 44.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y, die vertikale Spur aber nicht die Axe Z, so muss (§. 80.) die zweit-vertikale Spur parallel mit Z sein. Ist also "A der Punkt, in welchem Y von der horizontalen Spur T getroffen wird, so bringe man diesen Punkt, wenn die Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind, nach "A der Verlängerung von X, indem man von O aus mit O"A einen Kreisbogen beschreibt, der sodann die neue Lage von Y in "A trifft. Zieht man nun durch "A die Gerade "T parallel mit Z, so wird diese Gerade die gesuchte zweit-vertikale Spur der Ebene sein. — (Fig. 45.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y nicht, so ziehe man durch den Punkt 'A, in welchem Z von der vertikalen Spur 'T getroffen wird, die Gerade "T parallel mit X oder der neuen Lage Y, so wird hierdurch die zweit-vertikale Spur der Ebene erhalten. Trifft endlich weder die horizontale Spur die Axe Y, noch die vertikale Spur die Axe Z, so ist (§. 36.) die Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel parallel, folglich auch keine zweit-vertikale Spur vorhanden. —

Anmerk. Es wurde hier nicht darauf Rücksicht genommen, dass die Axe Z von der vertikalen Spur auch unterhalb der X getroffen werden kann. Da nun durch diesen Punkt die zweit-vertikale Spur gehen muss, so wird ein Theil derselben in der horizontalen Tafel sichtbar sein. Würde die Axe Y von der horizontalen Spur aberhalb X getroffen, so würde dieser Punkt auch rechts von Z auf die Axe X zu liegen kommen, sobald man die zweit-vertikale Tafel um Z dreht, und links von Z in die vertikale Tafel legt. In Fig. 49. trifft die vertikale Spur S'_2 einer Ebene die Axe Z in 'A_2, die Axe Y aber in "A_2, wobei aber "A_2 nach "A_2 der Axe X zu liegen kömmt, und mithin wird 'A_2"A_2 oder "S_2 die zweit-vertikale Spur dieser Ebene sein, deren horizontale Spur in S_2, und deren vertikale Spur in 'S_2 ist. —

§. 83.

(Fig. 44.) Ist T die horizontale Spur einer Ebene, 'T ihre vertikale Spur, und ist letztere senkrecht auf X, so muss (§. 45.) die Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Die Ebene (T A T'), deren vertikale Spur senkrecht auf X, also auch (§. 46.) senkrecht auf der horizontalen Tafel ist, wird mithin senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Ist umgekehrt eine Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel, so muss (§. 48.) ihre vertikale Spur senkrecht auf der Axe X oder auf der horizontalen Tafel sein. (Fig. 45.) Hieraus geht mithin auch hervor, dass wenn die horizontale Spur T einer Ebene T A 'T senkrecht auf der Axe X, also (§. 46.) senkrecht auf der vertikalen Tafel

steht, diese Ebene selbst senkrecht auf der vertikalen Tafel sein muss, und ist eine Ebene senkrecht auf der vertikalen Tafel, so muss ihre horizontale Spur senkrecht auf X sein. Ist daher eine Ebene senkrecht auf beiden Tafeln, so müssen auch beide Spuren senkrecht auf X sein und umgekehrt. Derselbe Satz gilt auch für die zweit-vertikale Tafel, und mithin ist (Fig. 46.) durch die Spuren T ''T eine Ebene dargestellt, die senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel steht. — (Fig. 47.) 'E'A''E stellt eine Ebene dar, die parallel zur horizontalen Tafel ist, und die Geraden T, ''T stellen eine Ebene dar, die parallel zur vertikalen Tafel, also senkrecht auf der horizontalen und zweit-vertikalen ist. —

Anmerk. Steht eine Ebene senkrecht auf einer, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so fallen die horizontalen Projektionen aller geometrischen Grössen in die horizontale Spur der Ebene, weil in diesem Falle die Ebene für die in ihr enthaltenen Grössen horizontal-projicirende Ebene ist. —

§. 84.

(Fig. 48.) Es sei eine Ebene gegeben, auf welcher eine Gerade senkrecht steht, man soll die Lage der Projektionen der Geraden gegen die Spuren der Ebene suchen. Denkt man sich zu diesem Ende die Ebene bis zur horizontalen Tafel verlängert, so dass ihre horizontale Spur E erhalten wird, und projicirt die Gerade, so wird ihre horizontal projicirende Ebene senkrecht auf der gegebenen Ebene stehen (§. 45.), weil sie eine Gerade enthält, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Da nun die horizontale Tafel und die gegebene Ebene senkrecht auf dieser projicirenden Ebene stehen, so muss (§. 48.) die horizontale Spur der Ebene, nämlich E senkrecht auf der horizontal projicirenden Ebene der Geraden stehen, mithin diese horizontale Spur auch senkrecht sein auf jeder Geraden, die die durch ihren Durchgangspunkt mit der Ebene geht, und in dieser liegt; folglich ist die horizontale Spur der Ebene senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden. Auf dieselbe Weise kann aber auch gezeigt werden, dass die vertikale Spur 'E senkrecht auf der vertikalen Projektion m'n' der Geraden und die zweit-vertikale Spur senkrecht auf der zweit-vertikalen Projektion der Geraden sein muss, mithin folgt hieraus der Lehrsatz:

Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so müssen die Projektionen der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Spuren der Ebene stehen, also die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene, die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der vertikalen Spur, und die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der zweit-vertikalen Spur der Ebene sein.

(Fig. 49.) $S_1 A_1 S'_1$ ist eine Ebene, deren horizontale Spur S_1, deren vertikale Spur S'_1 und deren zweit-vertikale Spur S''_1 ist, m_1 die horizontale, m'_1 die vertikale und m''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, von welchem eine Senkrechte auf die Ebene gezogen werden soll. Man wird also nur von m_1 auf S_1 die Gerade P_1 senkrecht ziehen, so erhält man die horizontale Projektion, von m'_1 auf S'_1 eine Senkrechte $'P_1$ ziehen, so wird man die vertikale Projektion erhalten, und endlich von m''_1 auf S''_1 die Senkrechte $''P_1$ ziehen, wodurch dann die zweit-vertikale Projektion der Senkrechten erhalten wird. — (Fig. 49.) *Wenn nun die Projektionen einer Geraden einzeln senkrecht auf den zugehörigen Spuren einer Ebene stehen, nämlich die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene etc. etc., so wird die Gerade im Raume senkrecht auf der Ebene stehen.* Sind (S_2, S'_2, S''_2) die Spuren dieser Ebene, P_2 die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf S_2, P'_2 die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $'S_2$ und $''P_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $''S_2$ gezogen, und sind m_2, m', m''_2 die Projektionen eines auf dieser Geraden liegenden Punktes, so müssen jedenfalls diese Projektionen einer auf der Ebene senkrechten Geraden angehören, die durch den gegebenen Punkt geht. Da aber schon durch zwei Projektionen einer Geraden letztere der Lage nach völlig bestimmt ist (§. 71.), so können die gegebenen Projektionen nicht zugleich einer zweiten Geraden angehören, mithin geben diese Projektionen bloss die durch den Punkt ($m_2 m'_2$) gehende auf der Ebene senkrechte Gerade an. —

§. 85.

(Fig. 50.) Es seien zwei parallele Ebenen gegeben, welche dargestellt werden sollen; so denke man jede derselben (§§. 80. 81.) verlängert, bis sie die Projektionstafeln schneiden, um ihre Spuren zu erhalten. Betrachtet man nun ihre horizontalen Spuren, so sind diese die Durchschnitte der horizontalen Tafel mit den beiden parallelen Ebenen, und es müssen mithin (§. 33.) die horizontalen Spuren parallel unter sich sein. Aus demselben Grunde sind aber auch die vertikalen Spuren

sowohl, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel, woraus also folgt:

Sind zwei oder mehrere Ebenen parallel, so müssen ihre zusammengehörigen Spuren unter sich parallel sein. (Fig. 50.) Ist also $S_1 A_1 S'_1$ die eine, $S_2 A_2 {}'S_2$ die andere durch ihre Spuren dargestellte Ebene, so muss $S_1 \neq S_2$, ${}'S_1 \neq {}'S_2$ und endlich ${}''S_1 \neq {}''S_2$. *Sind aber die vertikalen Spuren sowohl, als auch die horizontalen Spuren einer Ebene unter sich parallel, und sind die Ebenen nicht parallel zu einer Projektionsaxe, so sind dieselben nach §. 36. unter sich parallel.*

(Fig. 51.) Sind die Ebenen parallel mit einer Axe, z. B. mit der Axe X, so müssen die Spuren (§. 81.) parallel unter sich sein. Liegen nun die Spuren der einen Ebene zwischen den Spuren der andern Ebene, so sind auch die zweit-vertikalen Spuren ${}'E_2$ und ${}'E_1$ unter sich parallel, uud da ${}''E_2 \neq {}''E_1$, ${}'E_2 \neq {}'E_1$, ferner ${}'E_2$ von ${}''E_2$ in A'_2 und ${}''E_1$ von ${}''E_1$ in ${}'A_1$ getroffen wird, so müssen die Ebenen (§. 36.) unter sich parallel sein. (Fig. 52.) Sind aber die Spuren parallel unter sich und parallel zur Axe X, ohne dass die beiden Spuren der einen Ebene zwischen den beiden Spuren der andern Ebene liegen, so schneiden sich die zweit-vertikalen Spuren T''_1 und ${}''T_2$, weshalb also auch die Ebenen nicht unter sich parallel sein können.

Wenn also die Ebenen parallel zu einer der Projektionsaxen sind, und es sind sowohl die horizontalen, als auch die vertikalen, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel, so sind die Ebenen unter sich parallel, sind aber bloss die horizontalen Spuren und die vertikalen Spuren unter sich parallel, und die zweit-vertikalen Spuren nicht, so sind die Ebenen nicht parallel unter sich.

§. 86.

Durch die Sätze des vor. §. ist man im Stande, mit einer Ebene eine andere parallel zu ziehen, und zu erkennen, ob zwei Ebenen parallel unter sich sind, oder nicht. Ist eine Ebene nur durch ihre horizontale und vertikale Spur gegeben, und schneiden sich dieselben, was (§. 80.) in einem Punkte von X geschehen muss, so ist nur ein Punkt von einer der Spuren der zweiten Ebene anzugeben nothwendig, um dieselben bestimmen zu können. (Fig 50.) Ist z. B. in ${}'S_2$ ein Punkt gegeben, so ziehe man durch diesen parallel zu ${}'S_1$ eine Gerade, welche die Axe X in A_2 treffen wird. Durch A_2 die Gerade $S_2 \neq S_1$ gezogen, gibt $S_2 A_2 {}'S_2$ die zweite Ebene, welche parallel zur ersten Ebene $S_1 A_1 {}'S_1$ ist. Schneiden aber die Spuren der einen Ebene die X auf den Zeichnungstafeln nicht, und können letztere wegen Mangel an Raum nicht weiter verlängert werden, so muss man entweder die zweit-vertikale Spur dieser Ebene suchen, oder zwei Punkte angeben, die schon in der Ebene und einer der Projektionstafeln zugleich liegen, um die Spuren der andern Ebene angeben zu können. — Selten ist aber ein Punkt einer Spur selbst gegeben, sondern es sind grösstentheils die Projektionen eines Punktes gegeben, der sich auf der Ebene befindet, die mit der gegebenen parallel gezogen werden soll. In diesem Falle muss man durch den Punkt eine Generatrix der Ebene legen, ihren Durchgangspunkt mit einer der Projektionstafeln suchen, so wird dieser ein Punkt einer Spur der gesuchten Ebene sein. Die Ausführung dieser Aufgabe kann erst im nächsten Kapitel geschehen. —

Drittes Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 87.

Aufgabe 1. Es seien die Projektionen zweier Punkte gegeben, man soll ihre Entfernung angeben.

Auflösung. (Fig. 53.) Es sei OX der Durchschnitt der horizontalen mit der vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der vertikalen und zweit-vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel, der ursprünglich in der horizontalen Tafel senkrecht auf X liegt, aber nach OZ der Verlängerung von X zu liegen kömmt, wenn die zweit-vertikale Tafel um OZ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt wird. Ferner sei a_1 die horizontale Projektion des einen, a'_1 seine vertikale und a''_1 seine zweit-vertikale Projektion, a_2 die horizontale Projektion des zweiten Punktes, a'_2 seine vertikale und a''_2 seine zweit-vertikale Projektion, so muss (§. 72.) $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden sein, welche die Entfernung dieser Punkte angibt. Suchen wir daher von dieser Geraden die wahre Länge, so muss diese die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Um nun diese Länge zu bestimmen, betrachte man eine

der projicirenden Ebenen, z. B. die horizontal-projicirende Ebene der Geraden, so ist in dieser ein Viereck enthalten, dessen eine Seite die horizontale Projektion der Geraden ist, von welchem ferner zwei andere Seiten die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte sind, und dessen vierte Seite die Gerade im Raume ist. Nun ist aber jede dieser projicirenden Linien (§. 63.) senkrecht auf der horizontalen Tafel, also auch jede derselben (§. 7.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden und (§. 27.) unter sich parallel, so dass also das erwähnte in der horizontal-projicirenden Ebene liegende Viereck im Allgemeinen ein Trapez ist, dessen parallele Seiten die projicirenden Linien beider Punkte sind. Legt man daher die horizontal-projicirende Ebene, indem man dieselbe um ihre horizontale Spur, nämlich der horizontalen Projektion der Geraden dreht, in die horizontale Tafel, so wird jeder Punkt derselben einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene (§. 23.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden ist, und deren horizontale Spur mithin (§. 84.) auf dieser horizontalen Projektion der Geraden senkrecht ist. Es werden mithin auch die beiden Endpunkte der Geraden solche Kreise beschreiben, und daher in den horizontalen Spuren der Ebenen dieser Kreise liegen bleiben, aber so weit von der horizontalen Projektion der Geraden (Drehungsaxe) entfernt bleiben, als diess vorher der Fall war. Zieht man daher von dem Endpunkte der horiontalen Projektionen der Geraden Senkrechte auf diese und zwar nach derjenigen Seite hin, wo man die horizontal-projicirende Ebene niedergelegt hat, so werden die beiden Endpunkte der Geraden in diesen liegen, und in ihrer wahren Entfernung sichtbar sein. Man hat daher nur diese beiden Senkrechten gleich den horizontal-projicirenden Linien beider Punkte zu machen, also (§. 63.) gleich ihren vertikalen Ordinaten, so wird die Entfernung ihrer Endpunkte die vierte Seite des erwähnten Trapezes. also die gesuchte Entfernung der beiden gegebenen Punkte im Raume sein. — (Fig. 53.) Zieht man also von a_1 eine Senkrechte auf $a_1 a_2$, und macht dieselbe, nämlich $a_1 A_3 = a'_1 m_1$, zieht ferner $a_2 B_3$ senkrecht auf $a_1 a_2$, und macht $a_2 B_3 = a'_2 n$, so wird $A_3 B_3$ gleich der gesuchten Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung hätte man gefunden, wenn man die vertikal-projicirende Ebene um $a'_1 a'_2$ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt hätte. Es wird nämlich hierdurch das Viereck $A_1 a'_1 a' B_1$ sichtbar, in welchem $a'_1 A_1 = m a_1$ (§. 63.) und senkrecht auf $a'_1 a'_2$, $a'_2 B_1 = n a_2$ und senkrecht auf $a'_1 a'_2$ ist, dessen vierte Seite $A_1 B_1$ mithin dieselbe Entfernung oder die Länge der begränzten Geraden im Raume ist, so dass also $A_1 B_1 = A_3 B_3$ sein muss. Endlich wird man $A_2 B_2 = A_3 B_3 = A_1 B_1$ finden, wenn man das zweit-vertikal-projicirende Trapez um $a''_1 a''_2$ dreht, und in die zweit-vertikale Tafel legt, wobei das Viereck $A_2 B_2 a''_2 a''_1$ sichtbar wird, in welchem $a_1 A_2 = a'_1 p$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$, $a''_2 B_2 = a'_2 q$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$ sein muss. —

§. 88.

(Fig. 53.) Zieht man $B_3 C_3 \neq a_2 a_1$, so wird $B_3 C_3$ gleich der Differenz der beiden vertikalen Ordinaten, also $A_3 C_3 = a'_1 m - a'_2 n$ sein. Ebenso muss, wenn man $A_1 C_1 \neq a'_1 a'_2$ zieht, $B_1 C_1 = B_1 a'_2 - A_1 a'_1 = a_2 n - a_1 m$, und endlich, wenn man $A_2 C_2 \neq a''_1 a''_2$ zieht: $B_2 C_2 = B_2 a''_2 - A_2 a''_1 = a'_2 q - a'_1 p$ sein, so dass also hieraus geschlossen werden kann:

Die Entfernung beider Punkte ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die Entfernung der horizontalen Projektionen beider Punkte, und dessen andere Kathete die Differenz ihrer vertikalen Ordinaten ist; oder dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte ist, und die andere die Differenz ihrer beiden horizontalen Orinaten: oder endlich dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte, und die andere der Unterschied der Abscissen (zweit-vertikalen Ordinaten) beider Punkte ist.

§. 89.

Es ist nach dem, was im vorigen Paragraphe gesagt wurde, zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte oder der Länge einer begränzten Geraden nichts zu wissen nothwendig, als die Länge der horizontalen Projektion der Geraden, und die vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder die Länge der vertikalen Projektion der Geraden und die horizontalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder endlich die Länge der zweit-vertikalen Projektion der Geraden und die Abscisse ihrer Endpunkte. Man kann aber auch leicht erkennen, dass zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte ihre Coordinaten hinreichen. (Fig. 53.) Denkt man sich nämlich von a_1 aus eine Parallele zu X gezogen, so ist der zwischen $a_1 m$ und $a_2 n$ liegende Theil derselben gleich $m n = a'_2 q - a'_1 p$, und es bildet diese Parallele mit $a_1 a_2$ ein recht-

winkliges Dreieck, dessen eine Kathete also gleich $a'_2 q - a'_1 p$ gleich der Differenz der beiden Abscissen, dessen andere Kathete aber gleich $a_2 n - a_1 m$ oder gleich der Differenz beider horizontalen Ordinaten ist, so dass also die horizontale Projektion als die Hypothenuse dieses Dreieckes leicht konstruirt werden kann. Betrachtet man nun diese als Kathete eines neuen Dreieckes dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte ist, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes die gesuchte Entfernung sein.

Anmerk. 1. Denkt man sich die ganze Construktion im Raume vorgenommen, so erscheint die Entfernung der beiden Punkte als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen eine Kante die Differenz der horizontalen Ordinaten, dessen zweite Differenz der vertikalen Ordinaten, und dessen dritte Kante die Differenz der Abscissen ist.

Anmerk. 2. Diese gesuchte Entfernung kann leicht durch Rechnung gefunden werden. Ist nämlich

$a_2 n = y_1$, $a_1 m = y_2$, $a'_2 n = z_1$, $a'_1 m = z_2$, $a'_1 p = x_2$, $a'_2 q = x_1$,

so ist

$$\overline{a_1 a_2}^2 = \overline{B_3 C_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

und da

$$\overline{A_3 B_3}^2 = \overline{C_3 B_3}^2 + \overline{A_3 C_3}^2 \text{ ist,}$$

so hat man

$$\overline{A_3 B_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

folglich

$$A_3 B_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

§. 90.

Einige Beispiele zur Uebung sollen nun vorgenommen werden.

Beispiel 1. (Fig. 54.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Dabei soll $a_1 a_2 \neq X$ sein, mithin wird auch $a''_1 a''_2 \neq Z$, und diese Gerade muss (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel sein; folglich ist $a'_1 a'_2$ die Entfernung der beiden Punkte oder die Länge dieser begränzten Geraden. Diess geht auch daraus hervor, weil das vertikal-projicirende Trapez hier in ein Parallelelogramm übergeht, in welchem $a'_1 A = a'_2 B = m a_1$ ist, und mithin auch $a'_2 a'_1 = BA$ der Entfernung der beiden Punkte sein muss.

Beispiel 2. (Fig. 57.) Sind (a_1, a'_1, a''_1) die Projektionen eines Punktes, a_2, a'_2, a''_2 die Projektionen eines zweiten Punktes, so muss die Gerade, welche ihre Entfernung angibt (§. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel oder in einer auf X senkrechten Ebene liegen; mithin wird $a''_1 a''_2$, nämlich die zweit-vertikale Projektion dieser Geraden gleich ihrer wahren Länge sein, und die Entfernung der beiden Punkte (a_1, a'_1, a''_1), (a_2, a'_2, a''_2) angeben. — Sollte man die Länge dieser Geraden ohne Benützung ihrer zweit-vertikalen Projektion suchen, so könnte man nach §. 87. verfahren, das horizontal-projicirende Trapez $a_1 B A a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B =$ der Entfernung der Projektion a'_1 des ersten Punktes von X, $a_2 A$ gleich der Entfernung der vertikalen Projektion a'_2 des Punktes von X wird, und daher $AB = a''_1 a''_2 =$ der Länge der Geraden oder der Entfernung beider Punkte ist. Oder man könnte nach §. 88. verfahren, und sogleich das rechtwinklige Dreieck $a_1 B' a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B' =$ der Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte $= a'_1 q - a'_2 q$ ist, so wird $a_2 B'$ die Länge derselben Geraden angeben. —

Beispiel 3. (Fig. 55.) Nun sei die Entfernung zweier Punkte anzugeben, von welchen der eine im vierten Quadranten liegt, und rechts von der zweit-vertikalen Tafel. Dieser Punkt ist durch seine horizontale Projektion a_2, seine vertikale Projektion a'_2 und durch seine zweit-vertikale Projektion a''_2 gegeben, der andere Punkt sei durch die Projektionen a_1, a'_1, a''_1 gegeben. Für den zweiten Punkt geht die horizontale Ordinate in derselben Richtung wie für den ersten, also haben auch die vertikal-projicirenden Linien beider Punkte dieselbe Richtung. Die vertikalen Ordinaten beider Punkte hingegen haben entgegengesetzte Richtung, mithin auch ihre vertikal-projicirenden Linien. Sucht man daher die Entfernung beider Punkte, indem man die horizontal-projicirende Ebene dieser Geraden um $a_1 a_2$ dreht, und in die horizontale Tafel legt, sodann das in §. 87. erwähnte Trapez konstruirt, so wird, weil die horizontal-projicirende Linie des einen Punktes entgegengesetzte Richtung, wie die des andern hat, auch $a_2 B = a'_2 n$ entgegengesetzte Richtung haben, wie $a_1 A = a'_1 m$. Trägt man also $a_1 A = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ von a_1, und auf der andern Seite $a_1 a_2$ senkrecht auf diese $a_2 B = a'_2 n$, so wird die Gerade AB die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Zieht man nun $a_2 'A \neq AB$, so ist $A'A = a_1 B$, und mithin $a_1 'A = 'a_1 m + a'_2 n =$ der Summe der vertikalen Ordinaten beider Punkte. Das vertikal-projicirende Trapez wird ebenfalls dieselbe Entfernung $CD = AB$ angeben, allein die vertikal-projicirenden Linien $a'_1 D = a_1 m$ und $a'_2 C = a_2 m$ werden dieselbe Richtung haben, und mithin auch auf einer und derselben Seite von $a'_1 a'_2$ aufgetragen werden; so dass wieder $a'_1 D' = a_1 m - a_2 n$, wie §. 87. ist. Dasselbe gilt in Bezug auf das zweit-vertikal-projicirende Trapez. —

Beispiel 4. (Fig. 56.) Es sei a_1 die horizontale Projektion, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, $a_2\,a'_2\,a''_2$ seien die Projektionen eines zweiten Punktes, so liegt (§. 65.) der erste Punkt im ersten Quadranten, der zweite im dritten Quadranten, aber beide rechts der zweit-vertikalen Tafel. Die vertikal-projicirenden Linien beider Punkte sowohl, als auch ihre horizontal-projicirenden Linien haben mithin entgegengesetzte Richtung, weshalb also bei der Construktion des vertikal-projicirenden Trapezes die Seite $a'_2 B_1 = a_2 n$, die senkrecht auf $a'_2 a'_1$ von a_2 aus ausgezogen wurde, auf entgegengesetzter Seite aufgetragen werden, also $a'_1 A_1 = a_1 m$ gemacht werden muss, so dass $a' A_1$ auf $a'_1 a_2$ in a'_1 senkrecht steht. Zieht man $B_1 A_1$, so wird diese die Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung ist auch durch $A_1 B_1$ gefunden, die erhalten wurde, indem man $a_2 B_2 = a'_2 n$ und $a_1 A_2 = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ aber in entgegengesezten Richtungen in Bezug $a_1 a_2$ getragen hat. Ebenso ist $A_3 B_3 = A_2 B_2 = A_1 B_1$ gleich der Entfernung beider Punkte, welche nach dem schon mehrmals angegebenen Verfahren gefunden wurde. Zieht man $a'_2 C \neq A_1 B_1$ und $a_2 C_2 \neq B_2 A_2$ so ist auch $A_1 B_1 = C_1 a'_2$ und $a_2 C_2 = B_2 A_2$, mithin die Länge dieser Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der horizontal-projicirenden Linien oder der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist; oder die vertikale Projektion $a'_1 a'_2$ die eine Kathete, und $(a'_1 A_1 + A_1 C_1 = a_1 m + a_2 n)$ die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte oder ihre vertikal-projicirenden Linien, die andere Kathete ist. —

Beispiel 5. (Fig. 59.) Nun seien wieder die Projektionen zweier Punkte gegeben, und zwar a_1 die horizontale, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion des ersten Punktes, a_2 die horizontale, a'_2 die vertikale und a''_2 die zweit-vertikale Projektion des zweiten Punktes, welcher letztere (§. 66.) im zweiten Quadranten liegt, und weil seine horizontale und vertikale Projektion links von Z, seine zweit-vertikale Projektion aber rechts von Z ist, so befindet sich dieser Punkt links der zweit-vertikalen Tafel. Die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte oder ihre vertikalen Ordinaten, nämlich $a'_1 n$ und $a'_2 m$ haben gleiche Richtung, und werden mithin auf einer und derselben Seite von $a_2 a_1$ aufgetragen, wenn man BA die Länge der Geraden finden will. Das vertikal-projicirende Trapez wird nach Beispiel 4. erhalten; das zweit-vertikal-projicirende Trapez $a''_1 C D a''_2$ muss aber hier, weil $a'_2 q$ in entgegengesetzter Richtung von $a'_1 a$ liegt so konstruirt werden, dass $a''_2 D = a'_2 q$ entgegengesetzt von $a''_1 C = a'_1 r$ aufgetragen werden muss; denn die zweit-vertikal-projicirenden Linien beider Punkte haben entgegengesetzte Richtung, und kommen mithin in ihren Ebenen auch entgegengesetzt von $a''_2 a''_1$ zu liegen.

§. 91.

Die im vorigen Paragraphe enthaltenen Beispiele führen zu folgenden Folgerungen:

1. Befindet sich der eine der Punkte, deren Entfernung bestimmt werden soll, im ersten, der andere im zweiten Quadranten, so ist die Länge dieser Entfernung die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, von welchem ihre vertikale Projektion die eine, die Summe der horizontalen Ordinaten beider Punkte die andere Kathete oder die horizontale Projektion die eine Kathete und die Differenz beider vertikalen Ordinaten die andere Kathete ist. — Liegt der zweite Punkt im dritten Quadranten, so ist die gesuchte Entfernung beider Punkte Hypothenuse eines rehtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe beider vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und sodann die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Liegt endlich der zweite Punkt im vierten Quadranten so ist die Länge der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet, Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und die Differenz der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Befinden sich beide Punkte in einem und demselben Quadranten, so haben ihre projicirenden Linien gleiche Richtung, und man kann mithin bei der Aufsuchung ihrer Entfernung ganz nach den §§. 87. und 88. verfahren; befinden sich aber beide Punkte in verschiedenen Quadranten, so ist auf die Richtung der projicirenden Linien oder der Ordinaten, denen sie gleich sind, Rücksicht zu nehmen. Wie man darauf Rücksicht nehmen kann, ist leicht aus den Beispielen und dem Eingange dieses Paragraphes zu ersehen. Eben so wird man auch das Verfahren erkennen, welches man einzuschlagen hat, wenn man die Länge der Geraden durch das zweit-vertikal-projici-

rende Trapez suchen will, und sich der Punkt rechts oder links der zweit-vertikalen Tafel befindet. —

2. Da die Projektion einer Geraden gleich ihrer Länge sein wird, wenn die Gerade parallel zur Projektionstafel ist, so kann man ein zweites in manchen Fällen bequemeres Verfahren einschlagen, um die Länge einer Geraden zu finden. Dieses Verfahren besteht nämlich darin, dass man einen Endpunkt der Geraden fix liegen lässt, während man die Gerade um diesen Punkt dreht, bis sie parallel mit einer der Projektionstafeln ist. Dreht man also die Gerade um ihren Anfangspunkt, bis sie parallel mit der horizontalen Tafel ist, und zwar so, dass der andere Endpunkt in einer Geraden bleibt, die parallel zur vertikalen Tafel ist, so kömmt die Gerade nach der Drehung in eine Ebene zu liegen, die parallel zur horizontalen Tafel, und deren vertikale Spur mithin (§. 85.) parallel mit X ist. In letztere wird (§. 83.) die vertikale Projektion der Geraden nach der Drehung zu liegen kommen, und ihre vertikale Projektion die vorige Länge beibehalten, weil die vertikal-projicirenden Linien beider Endpunkte, also ihre horizontalen Ordinaten sich nicht verändert haben; die horizontal-projicirenden Linien beider Endpunkte aber, oder ihre vertikalen Ordinaten müssen nun einander gleich sein, und gleich der vertikalen Ordinate des fixen Punktes. Zieht man daher von der vertikalen Projektion des fixen Punktes aus eine Gerade parallel mit X, und macht diese gleich der vertikalen Projektion der Geraden, so erhält man die neue vertikale Projektion der Geraden, zu welcher die entsprechende horizontale Projektion gefunden wird, indem man die vorigen horizontalen Ordinaten beider Endpunkte beibehält, und die in §. 63. erwähnten Sätze berücksichtiget. Diese neue horizontale Projektion der Geraden muss nun (§. 74.) gleich der Länge der Geraden sein. Analog wird man verfahren, wenn man die Gerade parallel zur vertikalen oder zur zweit-vertikalen Tafel dreht. Im folgenden §. sind auch über dieses Verfahren einige Beispiele enthalten. —

§. 92.

Beispiel 1. (Fig. 60.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion einer begränzten Geraden, $a'_1 a'_2$ ihre vertikale Projektion, so lasse man den Punkt $a_1 a'_1$ fix liegen, denke sich die Gerade so gedreht, dass ihr Endpunkt in einer auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Geraden also von der vertikalen Tafel in gleicher Entfernung bleibt, die Gerade selbst aber nach der Drehung in eine Ebene zu liegen kömmt, die parallel zur vertikalen Tafel ist; so wird ihre neue vertikale Projektion $a'_1 b'_2 \neq X$ und $= a'_1 a'_2$ werden, die horizontale Projektion des ersten Punktes bleibt in a_1, die des zweiten aber muss in $b'_2 b_2$ (§. 63.) liegen, und nach vorigem §. in der mit X parallelen Geraden $a_2 b_2$, und ist mithin b_2. Zieht man also die Gerade $a_1 b_2$, so ist diese die neue horizontale Projektion der Geraden, und gibt mithin ihre wahre Länge an. — Zieht man $a_1 b_1 \neq X$ und gleich $a_1 a_2$, zieht ferner $b_1 b'_1$ senkrecht auf X und $a'_2 a'_1 \neq X$, verbindet den Durchschnittspunkt b'_1 mit a'_1 durch die Gerade $a'_1 b'_1$, so wird letzere (§. 91.) auch gleich der Länge der Geraden sein. Auf gleiche Weise kann man durch $a''_2 b''_3$ die Länge der Geraden erhalten. —

Beispiel 2. (Fig 58.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion einer Geraden, deren Endpunkte (§. 65.) im zweiten Quadranten liegen. Da nun diese beiden Endpunkte in einem und demselben Quadranten liegen, so ändert sich gar nichts, und wir können ebenso unsere Construktion machen, als wenn sich die Punkte im ersten Quadranten befinden würden, nur müssen wir jetzt die horizontale Tafel an der Stelle der vertikalen Tafel, und die vertikale Tafel in der gewöhnlichen Lage der horizontalen Tafel uns denken. Zieht man also $a_1 b \neq X$ und macht $a_1 b = a_1 a_2$, zieht $b b'$ senkrecht auf X, $a'_2 b' \neq X$, und verbindet a'_1 und b' durch die Gerade $a'_1 b$, so muss (§. 91.) letztere gleich der Entfernung beider Punkte sein, weil sie (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel ist. Dieselbe Länge A B hat man (§. 87.) durch das vertikal-projicirende Trapez $a'_1{}'_2$ A B. —

§. 93.

Aufgabe 2. **Eine Gerade ist durch ihre Projektionen gegeben; man soll ihre Durchgangspunkte mit den Tafeln suchen, vorausgesetzt, dass sie jede der Tafeln bei gehöriger Verlängerung trifft.**

Auflösung. Der Durchgangspunkt einer Geraden mit einer der Tafeln wird auch Spur der Geraden genannt, und zwar ihr Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel horizontale Spur, ihr Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel vertikale Spur, endlich ihr Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel zweit-vertikale Spur. Diese Spuren werden offenbar erhalten, wenn man sich die Gerade so weit verlängert denkt, bis sie die Tafeln trifft. Um also die horizontale Spur der Geraden zu erhalten, müssen wir uns die Gerade

verlängert denken, bis sie die horizontale Tafel trifft, wobei also auch ihre Projektionen länger werden. Nun ist die horizontale Spur der Geraden ein Punkt der letzteren sowohl, als auch ein Punkt der horizontalen Tafel; mithin müssen sich die Projektionen dieser horizontalen Spur (§. 72.) in den Projektionen der Geraden befinden, und (§. 70.) ihre vertikale Projektion in der Axe liegen. Letztere ist also im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Geraden mit der Axe X, und wird erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert. Da nun die horizontale Projektion dieses Punktes (§. 72.) in der horizontalen Projektion der Geraden, und (§. 63.) mit seiner vertikalen Projektion in einer auf X senkrechten Geraden liegen muss, so ist seine horizontale Projektion im Durchschnitte der horizontalen Projektion der Geraden mit der von der vertikalen Projektion des Punktes auf X gezogenen Senkrechten. Diese horizontale Projektion des Punktes ist aber die horizontale Spur der Geraden, und es wird mithin diese erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, von dem erhaltenen Durchschnittspunkte auf X eine Senkrechte zieht, so wird im Durchschnitte der letzteren mit der horizontalen Projektion der Geraden die gesuchte horizontale Spur sein. Diese horizontale Spur kann man auch erhalten, wenn man die zweit-vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe Y verlängert, den erhaltenen Punkt von letzterer in seine richtige Lage auf Y bringt, indem man die zweit-vertikale Tafel in ihre erste Lage gebracht denkt, sodann von diesem Punkte auf Y eine Senkrechte zieht, deren Durchschnitt mit der horizontalen Projektion der Geraden der gesuchte Punkt sein wird. — Analog ergibt sich die Regel für die Auffindung der vertikalen Spur; indem man die horizontale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, wodurch die horizontale Projektion der vertikalen Spur erhalten wird, sodann von diesem Punkte auf X eine Senkrechte zieht, die in der vertikalen Tafel oder deren Verlängerung liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der vertikalen Projektion der Geraden die gesuchte vertikale Spur sein. —

§. 94.

Beispiel 1. (Fig. 61.) Ist $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion der Geraden, und $a''_1 a''_2$ ihre zweit-vertikale Projektion, und man soll denjenigen Punkt derselben finden, in welchem sie die horizontale Tafel trifft; so verlängere man (§. 93.) $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X, wodurch man den Punkt s'_1 erhält, der die vertikale Projektion der gesuchten horizontalen Spur ist. Von s'_1 auf X eine Senkrechte gezogen, die in der horizontalen Tafel liegt, und $a_1 a_2$ verlängert bis zum Durchschnitte s_1 mit dieser Senkrechten, so wird dieser Punkt die gesuchte horizontale Spur sein. Verlängert man $a''_1 a''_2$ bis Y, und dreht den erhaltenen Punkt s''_1, bis er die richtige Lage von OY trifft, so ist s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, welche letztere also im Durchschnitte der von s''_1 auf Y gefällten Senkrechten mit $a_1 a_2$ sein wird. Ebenso erhält man die vertikale Spur der Geraden, wenn man ihre horizontale Projektion bis X oder ihre zweit-vertikale Projektion bis Z verlängert, es wird dann s_2 die horizontale und s''_2 die zweit-vertikale Projektion der gesuchten vertikalen Spur sein. Die von s_2 auf X und die von s''_2 auf Z gezogenen Senkrechten müssen sich daher in dem Punkte s'_2 der vertikalen Projektion $a'_2 a'_1$ treffen, welcher die gesuchte vertikale Spur der Geraden ist. Auf gleiche Weise erhält man die zweit-vertikale Spur s''_3 der Geraden, indem man die vertikale Projektion der Geraden bis Z verlängert, wodurch die vertikale Projektion s'_3 der zweit-vertikalen Spur erhalten wird. Zieht man nun von s'_3 auf Z eine Senkrechte, so wird im Durchschnittspunkte s''_3 derselben mit $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Spur der Geraden erhalten werden. —

Beispiel 2. (Fig. 62.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und mithin $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden; man soll ihre Spuren bestimmen. Die horizontale Spur s_1 wird (§. 93.) erhalten, wenn man $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X verlängert, von der hierdurch erhaltenen vertikalen Projektion s_1 der horizontalen Spur auf X eine Senkrechte $s'_1 s_1$ zieht, die in der horizontalen Tafel (oder deren Verlängerung) liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden, nämlich in s_1 die gesuchte horizontale Spur sein. Die vertikale Spur wird erhalten, wenn man die horizontale Projektion $a_1 a_2$ bis X verlängert, von der hierdurch erhaltenen horizontalen Projektion s_2 der vertikalen Spur auf X eine Senkrechte zieht, die hier in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegen muss, damit sie von der Verlängerung der vertikalen Projektion $a'_1 a'_2$ getroffen wird. Der hierdurch erhaltene Durchschnittspunkt ist die gesuchte horizontale Spur.

Beispiel 3. (Fig. 63.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, deren zweit-vertikale Projektion also in "L sein muss, so findet man durch Verlängerung von L bis zur Axe X in s_2 die horizontale Projektion der vertikalen Spur. Die vertikale Spur selbst wird also erhalten, wenn man $s_2 s'_2$ senkrecht auf X in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel zieht, und diese Senkrechte von 'L durchschneidet, was in s'_2 geschieht, weshalb man also in s'_2 die vertikale Spur der Geraden findet, die in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt. Ebenso findet man durch Verlängerung der vertikalen Projektion 'L bis zur Axe in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur der Geraden, und folglich in s_1 diese horizontale Spur selbst, die in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und links der zweit-vertikalen Tafel liegt. Endlich wird die zweit-vertikale Spur dieser Geraden gefunden, wenn man 'L bis zur Axe Z verlängert, von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_3 auf Z eine Senkrechte zieht, deren Verlängerung in s''_3 von der zweit-vertikalen Projektion "L der Geraden getroffen wird, und worin auch ihre zweit-vertikale Spur liegt. Man kann, wie aus der Fig. zu ersehen durch die horizontale Projektion s_3 dieser Spur dieselbe auch finden. Diese zweit-vertikale Spur liegt in der rückwärtigen Verlängerung der zweit-vertikalen Tafel unterhalb der horizontalen Tafel. —

Beispiel 4. Es sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale, folglich $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Diese Gerade ist (nach §. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel, weshalb also von einer zweit-vertikalen Spur dieser Geraden nicht die Rede sein kann. Ihre vertikale Spur wird erhalten, wenn man die zweit-vertikale Spur bis Z verlängert, von der hierdurch erhaltenen zweit-vertikalen Projektion s''_2 der vertikalen Spur auf Z eine Senkrechte zieht, diese bis zum Durchschnitte mit $a'_1 a'_2$ verlängert, so erhält man den Punkt s_2, der die vertikale Spur der Geraden ist. Ebenso ist in s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, die in ihre richtige Lage gebracht werden muss, indem man mit Os''_1 einen Bogen von O aus beschreibt, der in der ursprünglichen Lage der Axe Y die richtige Lage der zweit-vertikalen Projektion s''_1 dieser Spur bezeichnet. Von s''_1 auf Y eine Senkrechte in der horizontalen Tafel gezogen, so erhält man in s_1, dem Durchschnitte dieser Senkrechten mit der Verlängerung der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden ihre horizontale Spur. —

§. 95.

Ohne eine zweite Projektion zu benützen, kann man jede Spur der Geraden durch ein zweites Verfahren erhalten. Betrachten wir die horizontale Spur, so muss diese **erstens** in der Geraden liegen, und mithin (§. 72.) ihre horizontale Projektion in der horizontalen Projektion der Geraden, **zweitens** in der horizontalen Tafel selbst; folglich ist die horizontale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer horizontalen Projektion. Hieraus ist auch klar, dass die vertikale Spur im Durchschnittspunkte der Geraden mit ihrer vertikalen Projektion, und die zweit-vertikale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer zweit-vertikalen Projektion liegen muss. — (Fig. 61.) Legt man daher (§. 87.) das horizontal-projicirende Trapez um die horizontale Projektion $a_1 a_2$ in die horizontale Tafel, und verlängert in dieser horizontal-projicirenden Ebene die Gerade, bis sie ihre horizontale Projektion trifft, was hier in s_1 geschieht, so wird die horizontale Spur der Geraden erhalten. Legt man die vertikal-projicirende Ebene der Geraden um $a'_1 a'_2$ drehend in die vertikale Tafel, konstruirt in dieser (§. 87.) das Trapez $A_2 a'_2 a'_1 B$, so wird im Durchschnitte der Geraden $A_2 B_2$ mit ihrer vertikalen Projektion, nämlich s'_2 die vertikale Spur der Geraden sein, deren zweit-vertikale Spur auf ähnliche Weise in s''_3 erhalten wird. Wenn daher eine unbegränzte Gerade gegeben ist, so kann man dieselbe zuerst nach den Regeln des §. 73. begränzen, und dieses Verfahren einschlagen. Dieses Verfahren macht in Fig. 64. die zweit-vertikale Tafel überflüssig, indem man nur das vertikal-projicirende Trapez $a'_2 a'_1 B_2 A_2$ konstruiren darf, um die vertikale Spur s_2, und das horizontal-projicirende Trapez $a_1 A_1 B_1 a_2$ konstruiren darf, um die horizontale Spur s_1 der Geraden zu erhalten. —

§. 96.

Aufgabe 3. Die horizontale und vertikale Spur einer Geraden sind gegeben; man soll die Gerade durch ihre Projektionen angeben.

Auflösung. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion der horizontalen Spur in der Axe X, und nach §. 63. muss dieselbe auch in der Senkrechten liegen, die man von der horizontalen Projektion dieser Spur auf X zieht; mithin wird die vertikale Projektion dieser horizontalen Spur im Durchschnittspunkte der Senkrechten mit X liegen, die man von der horizontalen Spur auf X zieht. Ebenso wird die horizontale Projektion der angegebenen vertikalen Spur erhalten, wenn man von

letzterer auf X eine Senkrechte zieht. Nun liegen die beiden Spuren auf der Geraden, und mithin (§. 72.) ihre Projektionen auf den Projektionen der Geraden; daher müssen die Projektionen der Geraden durch die Projektionen der beiden Spuren gehen. Verbindet man daher die vertikale Spur der Geraden mit der vertikalen Projektion der horizontalen Spur, so erhält man die vertikale Projektion, und zieht man von der horizontalen Spur nach der horizontalen Projektion der vertikalen Spur eine Gerade, so erhält man die horizontale Projektion der Geraden, die mithin der Lage nach (§. 71.) völlig bestimmt ist. — (Fig. 51.) Ist z. B. s_1 die horizontale und s'_2 die vertikale Spur einer Geraden gegeben, so ziehe man von s_1 aus auf X eine Senkrechte, und man wird (§. 70) in s'_1 die vertikale Projektion von s_1 erhalten. Zieht man ferner von s'_2 auf X eine Senkrechte, so muss in s_2 die horizontale Projektion von s'_2 liegen. Zieht man nun die Gerade $s'_2 s'_1$ und $s_2 s_1$, so werden diese (§. 72.) die Projektionen der gesuchten Geraden sein, aus welchen auch ihre zweit-vertikale Projektion $s''_2 s''_1$, und die Lage derselben bestimmt werden kann. —

§. 97.

Aufgabe 4. Aus den Projektionen einer Geraden die Winkel zu bestimmen, welche dieselbe mit den Projektionstafeln macht.

Auflösung. Nach §. 21. wird der Winkel, den eine Gerade mit einer beliebigen Ebene macht erhalten, wenn man

1. die Gerade bis zur Ebene verlängert, und sodann ihre Spur nach §. 93. bestimmt;
2. von einem beliebig auf derselben angenommenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zieht, und den Fuss der letzteren bezeichnet, wodurch aber (§. 63.) die Projektion jenes Punktes auf dieser Ebene erhalten wird;
3. den Fuss der Senkrechten mit der Spur der Geraden durch eine Gerade (welche nach §. 73. die Projektion der Geraden ist) verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der gegebenen Geraden bildet der gesuchte sein.

Suchen wir daher den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so haben wir zuerst die horizontale Spur der Geraden zu bestimmen, sodann von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die horizontale Tafel eine Senkrechte zu ziehen, und den Fuss der letzteren mit der horizontalen Spur zu verbinden, um die Gerade zu erhalten, welche mit der gegebenen den gesuchten Winkel bildet. Da aber hierdurch zuerst die horizontale Projektion der Geraden gesucht wurde, welche in unserer Aufgabe schon als bekannt vorausgesetzt werden kann, so kann man hieraus schliessen, dass der Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet kein anderer ist, als der, den diese Gerade mit ihrer horizontalen Projektion bei genugsamer Verlängerung einschliesst. Ebenso ist der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel einschliesst kein anderer, als der, welchen dieselbe mit ihrer vertikalen Projektion macht; so dass man also sagen kann:

Der Winkel, welchen eine Gerade mit einer der Projektionstafeln einschliesst, wird erhalten, wenn man die Spur der Geraden in dieser Tafel sucht, dann die projicirende Ebene um die Projektion der Geraden dreht und in die Tafel legt, und in dieser projicirenden Ebene einen beliebigen Punkt der Geraden bestimmt, diesen mit der Spur durch eine Gerade verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der Projektion der Geraden macht, der gesuchte sein.

§. 98.

Beispiel. 1. (Fig. 65.) Ist b die horizontale und b' die vertikale Spur einer Geraden, deren Projektionen a'b' und ab gegeben sind, und man sucht den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so lege man die horizontal-projicirende Ebene, um ab dieselbe drehend in die horizontale Tafel, ziehe von a aus auf ab eine Senkrechte gleich a'a, wodurch man sodann den Punkt A in der horizontal-projicirenden Ebene erhält, dessen Projektionen a und a' sind. Zieht man nun von A nach b eine Gerade, so wird $\angle Aba = \angle h$ der gesuchte sein, während Ab derjenige Theil der Geraden ist, der zwischen den beiden Spuren liegt. Legt man die vertikal-projicirende Ebene um a'b' in die vertikale Tafel, zieht von b' auf a'b' die Senkrechte $b'B = 'bb$, so wird B in der vertikal-projicirenden Ebene den Punkt angeben, dessen Projektionen b und b' sind. Verbindet man B mit a' durch a'B, so wird $\angle Ba'b' = v$ der Winkel sein, den die Gerade mit der vertikalen Tafel macht. Auf ähnliche Weise kann man $\angle v' = Bc''b''$ erhalten, unter welchen die Gerade gegen die zweit-vertikale Tafel geneigt ist. —

Beispiel 3. (Fig. 63.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, deren zweit-vertikale Projektion also in "L sein muss, so findet man durch Verlängerung von L bis zur Axe X in s_2 die horizontale Projektion der vertikalen Spur. Die vertikale Spur selbst wird also erhalten, wenn man $s_2 s'_2$ senkrecht auf X in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel zieht, und diese Senkrechte von 'L durchschneidet, was in s'_2 geschieht, weshalb man also in s'_2 die vertikale Spur der Geraden findet, die in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt. Ebenso findet man durch Verlängerung der vertikalen Projektion 'L bis zur Axe in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur der Geraden, und folglich in s_1 diese horizontale Spur selbst, die in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und links der zweit-vertikalen Tafel liegt. Endlich wird die zweit-vertikale Spur dieser Geraden gefunden, wenn man 'L bis zur Axe Z verlängert, von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_3 auf Z eine Senkrechte zieht, deren Verlängerung in s''_3 von der zweit-vertikalen Projektion "L der Geraden getroffen wird, und worin auch ihre zweit-vertikale Spur liegt. Man kann, wie aus der Fig. zu ersehen durch die horizontale Projektion s_3 dieser Spur dieselbe auch finden. Diese zweit-vertikale Spur liegt in der rückwärtigen Verlängerung der zweit-vertikalen Tafel unterhalb der horizontalen Tafel. —

Beispiel 4. Es sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale, folglich $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Diese Gerade ist (nach §. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel, weshalb also von einer zweit-vertikalen Spur dieser Geraden nicht die Rede sein kann. Ihre vertikale Spur wird erhalten, wenn man die zweit-vertikale Spur bis Z verlängert, von der hierdurch erhaltenen zweit-vertikalen Projektion s''_2 der vertikalen Spur auf Z eine Senkrechte zieht, diese bis zum Durchschnitte mit $a'_1 a'_2$ verlängert, so erhält man den Punkt s'_2, der die vertikale Spur der Geraden ist. Ebenso ist in s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, die in ihre richtige Lage gebracht werden muss, indem man mit Os''_1 einen Bogen von O aus beschreibt, der in der ursprünglichen Lage der Axe Y die richtige Lage der zweit-vertikalen Projektion s''_1 dieser Spur bezeichnet. Von s''_1 auf Y eine Senkrechte in der horizontalen Tafel gezogen, so erhält man in s_1, dem Durchschnitte dieser Senkrechten mit der Verlängerung der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden ihre horizontale Spur. —

§. 95.

Ohne eine zweite Projektion zu benützen, kann man jede Spur der Geraden durch ein zweites Verfahren erhalten. Betrachten wir die horizontale Spur, so muss diese **erstens** in der Geraden liegen, und mithin (§. 72.) ihre horizontale Projektion in der horizontalen Projektion der Geraden, **zweitens** in der horizontalen Tafel selbst; folglich ist die horizontale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer horizontalen Projektion. Hieraus ist auch klar, dass die vertikale Spur im Durchschnittspunkte der Geraden mit ihrer vertikalen Projektion, und die zweit-vertikale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer zweit-vertikalen Projektion liegen muss. — (Fig. 61.) Legt man daher (§. 87.) das horizontal-projicirende Trapez um die horizontale Projektion $a_1 a_2$ in die horizontale Tafel, und verlängert in dieser horizontal-projicirenden Ebene die Gerade, bis sie ihre horizontale Projektion trifft, was hier in s_1 geschieht, so wird die horizontale Spur der Geraden erhalten. Legt man die vertikal-projicirende Ebene der Geraden um $a'_1 a'_2$ drehend in die vertikale Tafel, konstruirt in dieser (§. 87.) das Trapez $A_2 a'_2 a'_1 B$, so wird im Durchschnitte der Geraden $A_2 B_2$ mit ihrer vertikalen Projektion, nämlich s'_2 die vertikale Spur der Geraden sein, deren zweit-vertikale Spur auf ähnliche Weise in s''_3 erhalten wird. Wenn daher eine unbegränzte Gerade gegeben ist, so kann man dieselbe zuerst nach den Regeln des §. 73. begränzen, und dieses Verfahren einschlagen. Dieses Verfahren macht in Fig. 64. die zweit-vertikale Tafel überflüssig, indem man nur das vertikal-projicirende Trapez $a'_2 a'_1 B_2 A_2$ konstruiren darf, um die vertikale Spur s_2, und das horizontal-projicirende Trapez $a_1 A_1 B_1 a_2$ konstruiren darf, um die horizontale Spur s_1 der Geraden zu erhalten. —

§. 96.

Aufgabe 3. Die horizontale und vertikale Spur einer Geraden sind gegeben; man soll die Gerade durch ihre Projektionen angeben.

Auflösung. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion der horizontalen Spur in der Axe X, und nach §. 63. muss dieselbe auch in der Senkrechten liegen, die man von der horizontalen Projektion dieser Spur auf X zieht; mithin wird die vertikale Projektion dieser horizontalen Spur im Durchschnittspunkte der Senkrechten mit X liegen, die man von der horizontalen Spur auf X zieht. Ebenso wird die horizontale Projektion der angegebenen vertikalen Spur erhalten, wenn man von

letzterer auf X eine Senkrechte zieht. Nun liegen die beiden Spuren auf der Geraden, und mithin (§. 72.) ihre Projektionen auf den Projektionen der Geraden; daher müssen die Projektionen der Geraden durch die Projektionen der beiden Spuren gehen. Verbindet man daher die vertikale Spur der Geraden mit der vertikalen Projektion der horizontalen Spur, so erhält man die vertikale Projektion, und zieht man von der horizontalen Spur nach der horizontalen Projektion der vertikalen Spur eine Gerade, so erhält man die horizontale Projektion der Geraden, die mithin der Lage nach (§. 71.) völlig bestimmt ist. — (Fig. 51.) Ist z. B. s_1 die horizontale und s'_2 die vertikale Spur einer Geraden gegeben, so ziehe man von s_1 aus auf X eine Senkrechte, und man wird (§. 70) in s'_1 die vertikale Projektion von s_1 erhalten. Zieht man ferner von s'_2 auf X eine Senkrechte, so muss in s_2 die horizontale Projektion von s'_2 liegen. Zieht man nun die Gerade $s'_2 s'_1$ und $s_2 s_1$, so werden diese (§. 72.) die Projektionen der gesuchten Geraden sein, aus welchen auch ihre zweit-vertikale Projektion $s''_2 s''_1$, und die Lage derselben bestimmt werden kann. —

§. 97.

Aufgabe 4. Aus den Projektionen einer Geraden die Winkel zu bestimmen, welche dieselbe mit den Projektionstafeln macht.

Auflösung. Nach §. 21. wird der Winkel, den eine Gerade mit einer beliebigen Ebene macht erhalten, wenn man

1. die Gerade bis zur Ebene verlängert, und sodann ihre Spur nach §. 93. bestimmt;
2. von einem beliebig auf derselben angenommenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zieht, und den Fuss der letzteren bezeichnet, wodurch aber (§. 63.) die Projektion jenes Punktes auf dieser Ebene erhalten wird;
3. den Fuss der Senkrechten mit der Spur der Geraden durch eine Gerade (welche nach §. 73. die Projektion der Geraden ist) verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der gegebenen Geraden bildet der gesuchte sein.

Suchen wir daher den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so haben wir zuerst die horizontale Spur der Geraden zu bestimmen, sodann von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die horizontale Tafel eine Senkrechte zu ziehen, und den Fuss der letzteren mit der horizontalen Spur zu verbinden, um die Gerade zu erhalten, welche mit der gegebenen den gesuchten Winkel bildet. Da aber hierdurch zuerst die horizontale Projektion der Geraden gesucht wurde, welche in unserer Aufgabe schon als bekannt vorausgesetzt werden kann, so kann man hieraus schliessen, dass der Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet kein anderer ist, als der, den diese Gerade mit ihrer horizontalen Projektion bei genugsamer Verlängerung einschliesst. Ebenso ist der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel einschliesst kein anderer, als der, welchen dieselbe mit ihrer vertikalen Projektion macht; so dass man also sagen kann:

Der Winkel, welchen eine Gerade mit einer der Projektionstafeln einschliesst, wird erhalten, wenn man die Spur der Geraden in dieser Tafel sucht, dann die projicirende Ebene um die Projektion der Geraden dreht und in die Tafel legt, und in dieser projicirenden Ebene einen beliebigen Punkt der Geraden bestimmt, diesen mit der Spur durch eine Gerade verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der Projektion der Geraden macht, der gesuchte sein.

§. 98.

Beispiel. 1. (Fig. 65.) Ist b die horizontale und b' die vertikale Spur einer Geraden, deren Projektionen a'b' und ab gegeben sind, und man sucht den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so lege man die horizontal-projicirende Ebene, um ab dieselbe drehend in die horizontale Tafel, ziehe von a aus auf ab eine Senkrechte gleich a'a, wodurch man sodann den Punkt A in der horizontal-projicirenden Ebene erhält, dessen Projektionen a und a' sind. Zieht man nun von A nach b eine Gerade, so wird $\angle Aba = \angle h$ der gesuchte sein, während Ab derjenige Theil der Geraden ist, der zwischen den beiden Spuren liegt. Legt man die vertikal-projicirende Ebene um a'b' in die vertikale Tafel, zieht von b' auf a'b' die Senkrechte $b'B = 'bb$, so wird B in der vertikal-projicirenden Ebene den Punkt angeben, dessen Projektionen b und b' sind. Verbindet man B mit a' durch a'B, so wird $\angle Ba'b' = v$ der Winkel sein, den die Gerade mit der vertikalen Tafel macht. Auf ähnliche Weise kann man $\angle v' = Bc''b''$ erhalten, unter welchen die Gerade gegen die zweit-vertikale Tafel geneigt ist. —

Beispiel. 2. (Fig. 61.) Bei der Aufsuchung der Länge der Geraden $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3$ hat man schon $\sphericalangle B_1 s_1 a_1$ = dem Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel, $\sphericalangle A_2 s'_2 a'_2$ gleich dem Winkel, dem die Gerade mit der vertikalen Tafel macht, und endlich auch $\sphericalangle A_3 s''_3 a''_2$ gleich dem, den die Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel macht. —

Beispiel 3. (Fig. 60.) Hier hat man die Gerade zuerst so um (a'_1, a_1) gedreht, dass dieselbe parallel zur vertikalen Tafel wurde, mithin wird $\sphericalangle 'b_1 'a_1 'b_2$ der Winkel sein, den die Gerade mit der horizontalen Tafel macht. Denn diese Gerade macht nach dieser Drehung mit der horizontalen Tafel denselben Winkel, welchen sie vorher bildete. Denken wir uns nämlich durch den fixen Punkt dieser Geraden eine zur horizontalen Tafel parallele Ebene gezogen, so macht diese mit der Geraden denselben Winkel, den letztere mit der horizontalen Tafel macht. Projicirt man nun den beweglichen Endpunkt der Geraden auf diese neue Ebene, so ist der Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten, dessen Hypothenuse die Länge dieser Linie, dessen eine Kathete die horizontale Projektion derselben; und dessen andere Kathete die Entfernung des Endpunktes von der Projektionstafel ist. Da aber diese drei Seiten auch während und nach der Drehung dieselben bleiben, so bleibt der Winkel auch derselbe. Sodann ist dieselbe Gerade um den Punkt $(a'a_1)$ gedreht, bis sie parallel zur horizontalen Tafel ist, wobei ihre horizontale Projektion $a_1 b_2$ ist, und endlich ist dieselbe parallel zur zweit-vertikalen Tafel gelegt, wobei $a''_1 b_3$ ihre zweit-vertikale Projektion ist; mithin ist $\sphericalangle b_2 a_1 b_1 = b''_3 a''_2 b''_1$ gleich dem Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel, und $\sphericalangle a_1 b_2 'b_2$ der Winkel, den diese Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel bildet.

§. 99.

Aufgabe 5. Aus den Winkeln, die eine Gerade mit den Projektionstafeln bildet und den Projektionen eines auf ihr liegenden Punktes, ihre Projektionen zu bestimmen.

Auflösung. Da (§. 76.) parallele Gerade auch parallele Projektionen haben, so denken wir uns vor Allem die Gerade durch einen Punkt der Axe gezogen, bestimmen in dieser Lage derselben die Projektionen noch eines ihrer Punkte, ziehen dann durch diesen Punkt nach dem in der Axe angenommenen eine Gerade, mit dieser sodann durch den gegebenen Punkt eine Parallele gezogen, gibt die gesuchte Gerade.

(Fig. 66.) Ist nun in der Axe X ein Punkt a angenommen, durch welchen die gesuchte Gerade gehen soll, und wir wollten den Winkel suchen, den sie mit der vertikalen Tafel bildet, so müssten wir von a aus ein beliebiges Stück derselben abschneiden, dieses vertikal-projiciren, und es wird der Winkel, den diese vertikale Projektion mit der Geraden bildet, der gesuchte sein. Dieser Winkel ist also in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypothenuse ein beliebig langer von a aus bezeichneter Theil der Geraden, dessen eine Kathete die Projektion dieses Theiles und dessen andere Kathete die vertikal-projicirende Linie ihres Endpunktes oder die horizontale Ordinate des letzteren ist. Da nun die Länge dieses Theiles der Geraden beliebig angenommen, mithin als bekannt vorausgesetzt werden kann, der Winkel v aber, den sie mit der vertikalen Tafel bildet gegeben ist; so kann dass genannte Dreieck konstruirt werden. Man denke sich dasselbe in die horizontale Tafel gelegt, dass der angenommene Theil L_2 der Geraden mit der Axe X den gegebenen Winkel v bildet, so wird ac' die Länge der vertikalen Projektion von L_2, $C_2 c'$ aber die horizontale Ordinate des Endpunktes C_2 der Geraden L_2 sein. Ebenso wird der Winkel h, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten sein, dessen Hypothenuse der Theil L_1, dessen eine dem Theile L_2 anliegende Kathete die horizontale Projektion von L_2, und dessen andere Kathete die horizontal-projicirende Linie des Endpunktes von L_2 oder seine vertikale Ordinate ist. Legt man also $L_1 = L_2$ in a an X unter dem Winkel h, und konstruirt das rechtwinklige Dreieck $a C_1 c$, so wird ac gleich der horizontalen Projektion von L_1 (oder L_2) sein.

Da nun ac gleich der horizontalen Projektion von L_2 ist, und diese horizontale Projektion durch den Punkt a der Geraden gehen muss, so wird der Endpunkt der horizontalen Projektion von L_2 von a so weit entfernt sein, als ac angibt, und mithin in dem Kreisbogen liegen, den man von a aus mit ac beschreibt. Da aber ferner $C_2 c'$ gleich der horizontalen Ordinate des Endpunktes von L_2 ist, so muss der Endpunkt der horizontalen Projektion dieser Geraden auch in der Parallelen liegen, die man in der Entfernung $C_2 c'$ mit X zieht. Es muss mithin die horizontale Projektion des Endpunktes der Geraden in dem Punkte liegen, in welchem der Kreisbogen von der durch C_2 mit X parallel gezogenen Geraden getroffen wird. Zieht man nun die Gerade ba, so ist diese die gesuchte horizontale Projektion von L_2. Um jetzt die vertikale Projektion der Geraden zu erhalten, kann man ent-

weder von b aus auf X eine Senkrechte, und in der Entfernung C_1c mit X eine Parallele ziehen, so wird in dem Durchschnittspunkte C′ dieser beiden Geraden die vertikale Projektion des Endpunktes von L_2 sein; oder man kann ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie bei der Aufsuchung der horizontalen Projektion. Zieht man nämlich aus a mit dem Halbmesser ac′ einen Kreibogen, so muss in diesem die vertikale Projektion von C_1 (oder C_2) liegen, weil ac′ gleich der vertikalen Projektion von L_2 (oder L_1) ist; die vertikale Projektion dieses Endpunktes muss aber auch in der von C_1 aus in der Entfernung C_1c mit X parallel gezogenen Geraden liegen, weil C_1c die vertikale Ordinate dieses Punktes ist; mithin ist die vertikale Projektion dieses Punktes dort, wo die Parallele C_1b' den Kreisbogen 'c'b trifft, also in 'b. Zieht man die Gerade ab′, so ist diese die vertikale Projektion und ab ist die horizontale Projektion einer Geraden, welche die gegebenen Winkel mit den Projektionstafeln bildet. Legt man daher durch die vertikale Projektion jenes Punktes der Geraden mit a′b′ und mit ab durch die horizontale Projektion jenes Punktes eine Parallele, so erhält man (§. 76.) die Projektionen derjenigen Geraden, die man suchte, und welche letztere mithin völlig bestimmt ist. —

Anmerkung. Ist einer dieser beiden Winkel ein rechter, so steht die Gerade auf der Tafel, mit der sie einen rechten Winkel bildet, senkrecht, und ist mithin parallel zur andern Tafel. In diesem Falle sind die Projektionen der Geraden also leicht zu bestimmen. Ist einer der Winkel gleich 0, der andere aber ein spitzer, so ist der Winkel, den sie mit der zweit-vertikalen Tafel bildet, auch spitz, und die beiden letzteren in Summe gleich einem rechten; die Gerade selbst ist aber parallel mit der Tafel, mit der sie einen Winkel von o Grad bildet. —

§. 100.

Aufgaben zur Uebung.

1. Aus den horizontalen Projektionen zweier Punkte und ihren vertikalen Ordinaten ihre übrigen Projektionen sowohl, als auch ihre Entfernung zu konstruiren. —
2. Aus den Coordinaten zweier Punkte einer Geraden (für die drei Tafeln) die Projektionen der Geraden und die Entfernung dieser beiden Punkte zu bestimmen.
3. Es ist die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und der Winkel gegeben, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet; man soll ihre Projektionen bestimmen.
4. Die vertikale Projektion einer Geraden, ihr Winkel mit der vertikalen Tafel und ein Punkt ihrer vertikalen Projektion ist angegeben, man soll ihre Projektionen bestimmen. —
5. Die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und die Entfernung der horizontalen Spur von dem Punkte, dessen horizontale Projektion gegeben ist; man soll alles Uebrige bestimmen. —
6. Die horizontale Projektion eines Theiles einer Geraden ist gegeben, und der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel bildet; man soll die andere Projektion der Geraden und den Winkel, den sie mit der horizontalen Tafel einschliesst, bestimmen. —

Anmerkung. In welchen Fällen die eine oder die andere dieser Aufgaben unmöglich wird, soll der Anfänger selbst bestimmen. —

§. 101.

Aufgabe 6. Es sind zwei sich schneidende Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide Gerade gelegt werden kann.

Auflösung. Nach §. 10. kann man durch zwei Gerade, die sich schneiden, eine Ebene legen, und es sind daher die Spuren dieser Ebene anzugeben. Nun sollen die beiden Geraden ganz und gar in der gesuchten Ebene liegen, mithin muss sich auch jede ihrer Spuren in der Ebene befinden. Die Spuren dieser Geraden liegen aber zugleich in den entsprechenden Projektionstafeln, nämlich die horizontalen Spuren dieser Geraden in der horizontalen Tafel und ihre vertikalen Spuren in der vertikalen Tafel; suchen wir daher diese Spuren der Geraden, so haben wir in jeder der beiden Projektionstafeln zwei Punkte, die auch in der Ebene liegen. Verbinden wir nun die vertikalen Spuren beider Geraden durch eine Gerade, so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene, und die horizontalen Spuren beider Geraden verbunden, gibt die horizontale Spur der Ebene. Da nun von jeder dieser gegebenen Geraden zwei Punkte in der Ebene liegen, so müssen (§. 4.) diese beide Gerade ganz und gar in der Ebene enthalten sein, und mithin ist die Aufgabe gelöst. — Die zweit-vertikale Spur kann nach dem im §. 82. angegebenen Verfahren aus den beiden andern bestimmt werden. Man hätte dieselbe übrigens auch dadurch finden können, indem man die zweit-vertikalen Spuren beider Geraden gesucht, und diese durch eine Gerade verbunden hätte.

Anmerk. Zur Probe der gemachten Construktion dient der im §. 81. ausgesprochene Satz, dass nämlich

die Spuren einer Ebene in einem Punkte der Projektionsaxe zusammentreffen müssen,

§. 102.

(Fig. 67.) Ist b'c' die vertikale Projektion der einen, bc ihre horizontale Projektion, ad die horizontale Projektion der zweiten, 'ad' ihre vertikale Projektion, aa' die Projektionen des Durchschnittspunktes beider Geraden, so findet man (§. 93.) die horizontale Spur der ersten c, c', ihre vertikale Spur f, 'f; die horizontale Spur der zweiten in d, d', ihre vertikale Spur in m, 'm. Die beiden horizontalen Spuren durch eine Gerade verbunden gibt die horizontale Spur E der Ebene, und die beiden vertikalen Spuren der Geraden durch eine Gerade verbunden, gibt die vertikale Spur 'E der Ebene, wobei 'E und E in einem Punkte der Axe X sich treffen müssen, wenn kein Zeichnungsfehler gemacht wurde. Die zweit-vertikale Spur ''E kann nun leicht gefunden werden. —

§. 103.

Aufgabe 7. Es sind zwei parallele Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche diese beiden Geraden enthält.

Auflösung. Da nach §. 80. eine Ebene durch zwei ihrer Spuren der Lage nach bestimmt ist; so bestimmen wir die horizontale und vertikale Spur dieser Ebene. Nun soll jede der gegebenen Geraden ganz und gar in der Ebene liegen, folglich liegen auch die Spuren dieser Geraden in der gesuchten Ebene. Diese Spuren sind aber zugleich Punkte der Projektionstafeln, und es werden daher (§. 79.) die Spuren der Ebene durch dieselben gehen müssen. Um also die Aufgabe zu lösen, bestimmen wir die horizontalen Spuren beider Geraden, verbinden diese horizontalen Spuren durch eine Gerade, so wird letztere die horizontale Spur der Ebene sein. Suchen wir sodann die vertikalen Spuren beider Geraden, und verbinden dieselben durch eine Gerade; so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene. Da von jeder der gegebenen Geraden zwei Punkte nun in der Ebene enthalten sind, so ist (§. 4.) jede dieser Geraden ganz und gar in der Ebene enthalten, und mithin (§. 11.) die Lage der Ebene völlig bestimmt. —

§. 104.

Beispiel. (Fig. 68.) Es sei $s_1 s_2$ die horizontale Projektion der ersten Geraden, $s'_1 s'_2$ ihre vertikale Projektion, $s_3 s_4$ die horizontale und $s'_3 s'_4$ die vertikale Projektion der zweiten Geraden, so suche man (§. 93.) die horizontale Spur s_1 der ersten und die horizontale Spur s_4 der zweiten Geraden, ziehe die Gerade $s_1 s_4$, so wird diese die horizontale Spur E der gesuchten Ebene sein. Sucht man auch (§. 93.) die vertikalen Spuren s'_2 und s'_3 beider Geraden, zieht $s'_2 s'_3$, so wird diese die vertikale Spur 'E der gesuchten Ebene sein. Beide Spuren müssen genugsam verlängert in einem Punkte der Axe zusammentreffen.

§. 105.

Aufgabe 8. Durch drei nicht in einer Geraden liegende und im Raume angegebene Punkte eine Ebene zu legen, und ihre Spuren zu bestimmen.

Auflösung. Verbindet man den ersten Punkt mit jedem der beiden andern durch Gerade, so erhält man zwei sich im ersten Punkte schneidende Gerade, auf welchen die beiden andern Punkte enthalten sind. Bestimmt man daher (§. 101.) die Spuren der Ebene, welche diese beiden Geraden enthält, so enthält diese Ebene auch die drei gegebenen Punkte. —

Beispiel. (Fig. 69.) Es seien a, a' die Projektionen des ersten, b, b' die Projektionen des zweiten, c, c' die Projektionen des dritten Punktes, so hat man von einem Punkte, dessen Projektionen c, c' sind, nach jedem der beiden anderen Gerade zu ziehen. Die Projektionen der einen dieser Geraden sind daher (§. 73.) c'a' und ca, die Projektionen der anderen sind 'cb' und cb. Sucht man nun (§. 93.) die horizontalen Spuren s_2, s_3 und die vertikalen Spuren $'s_1$, $'s_4$ dieser Geraden, zieht $s_2 s_3$ und $s'_1 s'_4$, so werden hierdurch die Spuren der Ebene erhalten, die in dem Punkte A der Axe X zusammentreffen müssen. —

§. 106.

Aufgabe 9. Es ist eine Gerade und ein Punkt ausserhalb der letzteren gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide gelegt werden kann.

Auflösung. Man kann hier eine der vorhergegangenen Aufgaben benützen zur Lösung dieser Aufgabe. Nimmt man nämlich (nach §. 73.) auf der Geraden einen Punkt an, verbindet denselben mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade, und legt nach §. 101. durch diese und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird man die gesuchte Ebene erhalten. Man kann aber auch die Aufgabe dadurch lösen, indem man vom gegebenen Punkte aus mit der Geraden (nach §. 76.) eine Parallele zieht, also durch die vertikale Projektion des Punk-

tes eine Parallele zur vertikalen Projektion der Geraden, und durch die horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Projektion der Geraden zieht, sodann durch diese beiden Parallelen, deren Projektionen bekannt sind (nach §. 103.) eine Ebene legt, so wird diese die gesuchte sein. — Endlich kann man auf der gegebenen Geraden zwei Punkte durch ihre Projektionen (§. 73.) annehmen, von denselben aus (§. 72.) Gerade nach dem gegebenen Punkte ziehen, und durch dieselben (§. 101.) eine Ebene legen; so wird die gegebene Gerade sowohl, als auch der Punkt in dieser Ebene enthalten, und letztere völlig bestimmt sein. —

(Fig. 70.) Ist z. B. C die horizontale und C′ die vertikale Projektion des gegebenen Punktes, A B die horizontale und ′A B′ die vertikale Projektion der Geraden, so nehme man (§. 72.) auf letzterer einen Punkt durch seine Projektionen a, a′ an, ziehe von diesem aus nach dem Punkte C, C′ eine Gerade, deren Projektionen also (§. 72.) a C und a′′C sein werden. Sucht man nun die Spuren B und ′A der gegebenen Geraden, bestimmt sodann auch die der Hülfslinie a′′C, a C, verbindet die horizontalen Spuren beider Geraden sowohl, als auch ihre vertikalen Spuren durch gerade Linien, so erhält man die Spuren E und ′E der gesuchten Ebene. —

Anmerk. 1. Man wendet die eine oder die andere dieser Lösungen an, wenn man eine Ebene durch ihre Spuren bestimmen soll, und wählt jedenfalls jene, die am bequemsten ist. So wird man die erste Lösung anwenden, wenn die Spuren der Geraden noch auf den Projektionstafeln liegen; die letztere hingegen, wenn diess nicht der Fall ist. —

Anmerk. 2. Ist eine der gegebenen Geraden, durch welche eine Ebene gelegt werden soll, senkrecht auf einer Tafel, so wird (§. 45.) die Ebene auf derselben Projektionstafel senkrecht sein. — Soll durch zwei Gerade, die sich schneiden, oder unter sich parallel sind, eine Ebene gelegt werden, und sind beide Linien parallel mit einer Projektionstafel, so wird die Ebene (§. 36.) mit derselben Tafel parallel sein. —

§. 107.

Aufgabe 10. **Es ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, ferner die horizontale Projektion eines auf der Ebene sich befindenden Punktes; man soll seine vertikale Projektion bestimmen.**

Auflösung. Denkt man sich die Ebene durch ihre Spuren erzeugt, und nimmt zu diesem Zwecke die horizontale Spur der Ebene als Generatrix, und ihre vertikale Spur als Direktrix an, so wird (§. 5.) die Generatrix parallel mit der horizontalen Spur, also auch (§. 29.) mit der horizontalen Tafel parallel bleiben, und die vertikale Spur treffen. Die Generatrix wird aber auch bei ihrer Bewegung einmal durch den anzugebenden Punkt gehen, folglich (§. 72.) die horizontale Projektion dieser Lage der Generatrix durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes gehen. Da nun dieselbe parallel zur horizontalen Spur ist, so wird ihre horizontale Projektion parallel zur horizontalen Spur, ihre vertikale Projektion parallel zur Axe (§. 76.) sein. Zieht man daher durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Spur der Ebene, so wird diese die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den Punkt geht. Verlängert man nun diese horizontale Projektion bis zur Axe, so erhält man im Durchschnittspunkte mit letzterer die horizontale Projektion der vertikalen Spur dieser Generatrix (§. 93.). Die vertikale Spur selbst liegt in der vertikalen Spur der Ebene, weil die Generatrix diese stets trifft. Zieht man daher (§. 63.) von der horizontalen Projektion dieser vertikalen Spur auf X eine Senkrechte, und verlängert dieselbe, bis sie von der vertikalen Spur der Ebene getroffen wird, so erhält man in diesem Durchschnittspunkte die vertikale Spur, und durch diese eine Parallele zur Axe gezogen, gibt die vertikale Projektion der Generatrix. Da nun die gesuchte vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) mit der horizontalen Projektion in einer auf X senkrecht stehenden Geraden, und (§. 72.) in der vertikalen Projektion der erwähnten Lage der Generatrix liegen muss, so wird die vertikale Projektion des Punktes im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Generatrix mit der Senkrechten liegen, die man von seiner horizontalen Projektion aus auf X zieht, und kann mithin leicht gefunden werden. Die ganze Lösung dieser Aufgabe besteht also darin, dass man diejenige Lage der Generatrix der Ebene projicirt, die durch den gegebenen Punkt geht, sodann auf dieser Linie (§. 73.) die vertikale Projektion des Punktes bestimmt, dessen horizontale Projektion angegeben ist. —

Anmerk. 1. Auf gleiche Weise würde man verfahren, wenn die vertikale Projektion des Punktes gegeben, seine horizontale Projektion aber gesucht wäre. Man kann hierbei die horizontale Spur der Ebene als Generatrix und sodann ihre vertikale Spur als Direktrix, oder die vertikale Spur als Generatrix, und die horizontale Spur als Direktrix betrachten, und nach der in dem letzten §. angegebenen Lösung diejenige Lage der Generatrix projiciren, welche durch den Punkt geht, dessen vertikale oder horizontale Projektion gegeben ist. —

Anmerk. 2. Wäre die horizontale und vertikale Ordinate des Punktes gegeben, der in der Ebene liegen soll, so lege man — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix derselben betrachtend — in der Entfernung, welche die vertikale Ordinate des Punktes angibt, eine Ebene parallel zur horizontalen Tafel, so ist diese die

Math. P. 181 m

Kuhn

DESCRIPTIVE
GEOMETRIE
MIT EINSCHLUSS
DER PRINCIPIEN
DER
ISOMETRISCHEN
PROJECTIONSLEHRE
FÜR
SCHULEN UND ZUM SELBSTUNTERRICHTE

BEARBEITET VON
C. KUHN,
Professor der Analysis und angewandten Mathematik an der königlichen polytechnischen Schule
zu Augsburg.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

AUGSBURG.
VERLAG VON V. ZANNA & COMP.

186. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Das vorliegende Lehrbuch soll dem Selbslernenden den Weg zeigen, welchen er einzuschlagen hat, um sich die nothwendigsten Kenntnisse der descriptiven Geometrie eigen machen zu können, und den verehrlichen Lehrern dieses Gegenstandes zum Leitfaden bei ihrem Unterrichte an technischen Lehranstalten dienen. — Was nun die Art und Weise der Abfassung und Anwendung der in diesem Buche abgehandelten Gegenstände betrifft, so hatte ich besonders den Anfänger im Auge, und begann daher mit demjenigen Theile der Geometrie, auf welchen die descriptive Geometrie basirt ist, und welcher in den Principien der Projektionslehre seine grösste Anwendung findet. Dieser Theil in Verbindung mit der Lehre von den Polyedern ist für das erste Buch der descriptiven Geometrie gleichsam das, was das die Planimetrie für die Construktionen in der Ebene ist. Ausser diesem unter dem Namen „Geometrie im Raume" vorkommenden Kapitel ist wohl für den Anfänger das erste Buch, welches die geraden Linien, Ebenen und Polyeder behandelt, das wichtigste, weil durch dieses zuerst die Anschauung geübt werden muss, um alles Folgende verstehen zu können. — Da nun ein sehr behutsamer Weg nothwendig ist, um den Lernenden in dem vorliegenden Gegenstand einzuführen, so hielt ich mich beim ersten Buche am längsten auf, versuchte es, jede darin vorkommende Aufgabe zuerst allgemein ohne Berücksichtigung eines besonderen Falles zu lösen, und wendete dann nach gegebener allgemeiner Lösung die Aufgabe auf einzelne Beispiele an. Dabei liess ich aber auch nicht aus dem Auge, zu zeigen, dass die descriptive Geometrie die Construktionen desjenigen liefert, was die analytische Geometrie in Gleichungen vorstellt. —

In diesem ersten Buche erwähnte ich eine Projektionsmethode, die beim Aufnehmen von Maschinen und Werkzeugen viel Bequemlichkeit darbietet, nämlich die isometrische Projektionslehre. Mehr als die Principien derselben und einige Beispiele über die entwickelten Regeln anzugeben, erlaubten mir die Gränzen dieses Buches nicht, wesbalb ich auch die isometrischen Projektionen krummer Linien und Flächen weglassen musste. Uebrigens wird man sich bei den isometrischen Projektionen von Curven nicht schwer thun, weil die Regeln, welche für die isometrische Projektion von Polygonen so genau als möglich gegeben wurden. Im zweiten Buche musste ich mich so kurz als möglich bei einzelnen Kapiteln aufhalten, weil mir die Gränzen im Umfange des Buches festgesetzt waren. So konnte ich über Erzeugung

der Flächen nur das Wichtigste sagen und Manches, was zur Vollständigkeit des Lehrbuches nothwendig gewesen wäre, konnte nur kurz berührt, oder musste ganz weggelassen werden. Deshalb behalte ich mir vor, in einem eigenen isolirten Anhange das zu ergänzen, mit welchem ich dieses Buch noch zu versehen beabsichtigte. Derselbe wird ausser einer ausführlichen Abhandlung über die windschiefen und nicht abwickelbaren Flächen überhaupt, noch die Theorie und Construktion der Curven abhandeln, welche bei Verzahnungen ihre Anwendnug finden, manche andere Uebungsaufgaben enthalten, und die Principien der Schattenkonstruktion sowie die der Linear-Perspective liefern. —

Uebrigens ist der von mir im Auge gehabte Zweck, nämlich den Lernenden in den Gegenstand gehörig einzuführen, erfüllt, und sollten desfalls von den verehrlichen Lehrern der descriptiven Geometrie noch Wünsche an mich gemacht werden, so werde ich dieselben mit Dank annehmen, und berücksichtigen so weit es mir möglich ist. —

Zum Schlusse bitte ich einiger sich beim Drucken des Textes und Graviren der Zeichnungen eingeschlichen und übersehenen Fehler halber um Entschuldigung, und erlaube mir die verehrlichen Leser auf ein in Fig. 121. vorgekommenes Versehen aufmerksam zu machen, worin die in Beispiel 2. des §. 173. beschriebene Construktion zur Aufsuchung der Durchgangspunkte der Kanten des gegebenen Prisma mit der Schnittebene nicht berücksichtiget ist, und bloss die andere angezeigte Construktion, welche aber auch die Aufgabe vollständig löste, gezeichnet wurde. —

Augsburg im Juli 1844.

K.

Inhalts - Verzeichniss.

ERSTES BUCH.

Erste Abtheilung.

Seite

Einleitung.

Zweck und Mittel der darstellenden Geometrie §. 1. — §. 3. . . 3

Erstes Kapitel.

Geometrie im Raume.

Ebene, Erzeugung derselben, Gerade und Ebene, Bestimmung der Lage einer Ebene §. 4. — §. 11. . . 4

Senkrechte Gerade und Ebene, Communsektion zweier Ebenen, Abstand eines Punktes von einer Ebene, Winkel einer Geraden mit einer Ebene §. 12. — §. 24. . . 5

Parallelismus von Geraden und Ebenen und zugehörige Sätze §. 25. — §. 39. . . 8

Winkel zweier Ebenen und zugehörige Sätze, senkrechte Ebenen, Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen und Nebenwinkel des letzteren §. 40 — §. 50. . . 11

Zwei oder mehrere Gerade, die in verschiedenen Ebenen liegen, kürzester Abstand zweier solcher Geraden §. 51. — §. 53. . 13

Körperliche Ecke, regelmässige Körper §. 54. — §. 56. . . 14

Zweite Abtheilung.

Zweites Kapitel.

Schiefe Projektionen.

Aus zwei Projektionen eines Punktes den letzteren zu bestimmen, Coordinatenebenen und Sätze für die Projektionen eines Punktes §. 57. — §. 62. . . 16

Rechtwinklige Projektionen.

Projektionen eines Punktes, Coordinaten desselben, Kennzeichen für seine Lage, aus zwei Projektionen die dritte anzugeben und die Lage des Punktes §. 63. — §. 70. . . 18

Projektionen einer Geraden, Projektionen eines auf einer Geraden liegenden Punktes, Projektionen der Theile einer Geraden, Senkrechte und zu den Tafeln parallele Gerade §. 71. — §. 75. 23

Projektionen paralleler und sich schneidender Geraden, Projektionen einer Figur §. 75. — §. 78 . . 25

Spuren gerader Linien und Ebenen, aus zwei Spuren einer Ebene die dritte zu bestimmen, senkrechte Ebenen §. 79. — §. 83. 26

Eine Ebene und eine darauf senkrechte Gerade, parallele Ebenen §. 84. — 86. . . 29

Drittes Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

Die Länge einer begränzten Geraden anzugeben und Beispiele hierzu §. 87. — §. 92. . . 30

Die Spuren einer Geraden zu bestimmen und aus den Spuren die Gerade anzugeben, mit Beispielen §. 93. — 96. . . 34

Die Winkel anzugeben, welche eine Gerade mit den Tafeln macht, aus den Winkeln die Projektionen der Geraden anzugeben, Beispiele §. 97. — §. 99. . . 37

Vermischte Aufgaben §. 100. . . 39

Eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade, zwei parallele Gerade, drei Punkte oder durch eine Gerade und einen ausserhalb dieser gegebenen Punkt zu legen, mit Beispielen §. 101. — 106. . . 39

Aus den Spuren einer Ebene und einer Projektion eines Punktes die andere anzugeben, die Projektionen einer Lage der Erzeugenden der Ebene, Beispiele, §. 107. — 108. . . 41

Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die parallel einer andern Geraden ist §. 109. . . 43

Communsektion zweier Ebenen bei verschiedenen Lagen der Ebenen, Beispiele hierzu §. 110. — §. 113. . . 43

Den Durchgangspunkt einer Geraden mit einer Ebene zu suchen, die Entfernung eines Punktes von einer Ebene anzugeben, Beispiele, §. 114. — §. 117. . . 46

Durch einen Punkt eine Ebene zu ziehen, die mit einer gegebenen parallel ist; eine Ebene senkrecht auf eine Gerade zu legen; die Entfernung eines Punktes von einer Geraden anzugeben, Beispiele, §. 118. — §. 122. . . 47

Die Entfernung zweier paralleler Geraden und den kürzesten Abstand zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden anzugeben, Beispiele, §. 123. — §. 125. . . 49

Die Winkel zu finden, welche eine Ebene mit den Tafeln macht, aus diesen Winkeln die Spuren wieder zu bestimmen, Beispiele, §. 126. — §. 129. . . 50

Eine Ebene mit einem auf derselben liegenden Punkte in eine der Tafeln zu legen, umgekehrte Aufgabe, Beispiele, §. 130. — §. 133. . . 52

Den Winkel zweier Geraden, den einer Geraden und einer Ebene, und endlich den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen, Beispiele hierzu, §. 134. — §. 141. . . 54

Seite

Eine Gerade zu ziehen, die zwei oder drei gegebene Gerade schneidet, und gegebene Bedingungen erfüllt, Beispiele, §. 142. — §. 144. . . 58

Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer gegebenen einen bestimmten Winkel bildet, Beispiel, §. 145. — §. 146. 60

Einen Punkt um eine gegebene Axe zu drehen und die neuen Projektionen zu bestimmen, Beispiele, §. 147. — §. 148. . . 61

Vermischte Aufgaben, §. 149 . . 62

Dritte Abtheilung.

Viertes Kapitel.

Dreiseitiges körperliches Eck.

Erklärungen hierüber, Sätze über das Supplementareck, über körperliche Ecke überhaupt und über sphärische Dreiecke, §. 150. — §. 154. . . 64

Aus drei Bestimmungsstücken eines dreiseitigen körperlichen Eckes die drei übrigen Stücke und die Projektionen desselben zu finden, dieselben Aufgaben für das sphärische Dreieck, Beispiele, §. 155. — 160. . . 68

Fünftes Kapitel.

Polyeder.

Erklärungen, Erzeugungsarten des Prisma, parallele Schnitte desselben, Projektionen eines Prisma, §. 162. — §. 165 . . 71

Die Projektionen eines Punktes des Prisma und die Spuren des letzteren zu bestimmen, Beispiele, §. 166. — §. 167. . . 73

Den Durchschnitt einer Ebene mit einem Prisma zu finden, Entwickelung des Prisma und des Schnittes, Beispiele, §. 168. — §. 175. . . 74

Erzeugung und Darstellung einer Pyramide, Schnitt einer Pyramide durch eine Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, ferner durch eine Ebene, welche durch das Centrum geht, §. 176. — §. 179. . . 80

Die Projektionen einer Pyramide und eines auf ihrer Oberfläche liegenden Punktes, so wie auch ihre Spuren anzugeben, Beispiel hierzu, §. 180. — §. 181. . . 80

Die Durchschnitte von einer Pyramide durch Ebenen, welche verschiedene Lagen haben können zu finden, Entwickelung der Pyramide und des Schnittes, Beispiele, §. 182. — §. 185. 81

Die Durchschnittslinie zweier Prismen zu finden, Beispiel, §. 186. — §. 187. . . 83

Die Durchdringungslinie eines Prisma und einer Pyramide, sodann den Durchschnitt zweier Pyramiden anzugeben, Beispiele, §. 188. — §. 190. . . 85

Ein auf der horizontalen Tafel senkrecht stehendes Parallelepipedum so zu drehen, dass seine Grundfläche mit dieser Tafel einen angegebenen Winkel bildet, Beispiel, §. 191. . . 87

Die fünf regelmässigen Körper §. 192. . . 88

Sechstes Kapitel.

Principien der isometrischen Projektionslehre.

Lehrsätze hierüber, §. 193. — 194. . . 89

Isometrische Projektion eines Würfels, isometrische Projektionen von Parallelepipeden, von ebenen Figuren, §. 195. — §. 198. 91

Isometrische Projektion eines beliebigen Prisma, einer Pyramide, Beispiele, §. 199 — §. 200. . . 93

Aus den isometrischen Projektionen einer begränzten Geraden ihre wahre Länge zu bestimmen, §. 201. . . 96

ZWEITES BUCH.

Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Construktion und Tangirung einiger ebener krummer Linien.

Entstehung einer Curve, Kreis und Tangenten desselben, §. 202. — §. 207. . . 99

Construktion der Ellipse und ihrer Tangenten, §. 208. — §. 212. 100

Parabel, Construktion und ihre Tangenten, §. 213. — §. 217. . 102

Hyperbel, Construktion und ihre Tangenten, §. 218 — §. 222. . 104

Zweites Kapitel.

Curven im Raume.

Enstehung einer Curve, Projektionen derselben, Projektionen eines auf derselben liegenden Punktes, aus zwei Projektionen die dritte anzugeben, §. 223 — §. 225 . . 105

Aus einer Projektion einer ebenen Curve und den Spuren ihrer Ebene ihre andere Projektion anzugeben, Durchschnitt einer ebenen Curve mit einer Ebene, Beispiele, §. 226. — §. 228. 107

Zweite Abtheilung.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen, Tangirung und Durchschnitte derselben durch Ebenen.

Seite

Drittes Kapitel.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen.

Erklärungen, Darstellung einer Fläche, Tangentialebene derselben, §. 229. — §. 231. 110

Allgemeine Erzeugungsart der entwickelbaren Flächen, Eigenschaften derselben und ihre Tangentialebenen, §. 232. — §. 233. . 111

Erzeugung des Cylinders, senkrechter und schiefer Cylinder etc. etc., Durchschnitte desselben mit Ebenen, die parallel zur Generatrix oder parallel zur Direktrix sind, §. 234. — §. 236. 111

Erzeugung des Conus, sein Mantel etc. etc., senkrechter Conus, Schnitte desselben durch Ebenen, welche durch sein Centrum gehen, oder die parallel zu seiner Direktrix sind, §. 237. — §. 240. 112

Einen Cylinder, dessen Direktrix und Generatrix gegeben ist, zu projiciren, seine Spuren zu bestimmen und einen Punkt seiner Oberfläche, dessen eine Projektion angegeben ist, zu projiciren. Beispiel, §. 241. — §. 242. 114

Aus der Direktrix eines Kegels und seinem Centrum seine Projektionen zu bestimmen und die vertikale Projektion eines Punktes seiner Oberfläche anzugeben, dessen horizontale Projektion bekannt ist. Beispiel. §. 243. 114

Sätze über die Entwickelung eines Cylinders, §. 244. 115

Entstehung der Schraubenlinie, Schraubengang, Höhe desselben, Construktion der Schraubenlinie, Entwickelung derselben, Zusammenstellung der Eigenschaften der Schraubenlinie, Tangente derselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 245 — 250 115

Entstehung der Schraubenfläche und ihre Construktion, §. 251. . 119

Viertes Kapitel.

Tangirung der entwickelbaren Flächen.

Die Tangentialebene einer solchen Fläche hat eine Erzeugende mit derselben gemein, Regeln über die Construktion einer Tangentialebene für einen gegebenen Berührungspunkt, die Spuren einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche sind Tangenten der Spuren dieser Fläche, §. 252. — §. 254 . . 120

Zwei Tangentialebenen eines Cylinders schneiden sich nach einer Geraden, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, §. 255. 121

Die Projektion der Tangente einer Curve ist Tangente der Projektion der Curve für die entsprechende Projektion des Berührungspunktes, §. 256 121

Zwei Tangentialebenen eines Conus schneiden sich nach einer durch sein Centrum gehenden Geraden, §. 257. 122

Für einen auf einem Cylinder gegebenen Punkt eine Tangentialebene desselben zu bestimmen, Beispiel, §. 258. — §. 259. . 122

Bedingungen, welche die Tangentialebene eines Cylinders erfüllen kann, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist, §. 260. 123

Durch einen gegebenen Punkt, ferner parallel zu einer gegebenen Geraden eine Tangentialebene an einen Cylinder legen, eine Tangentialebene zu suchen, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, Beispiele, §. 261. — §. 265. 123

Es ist ein Punkt auf einer konischen Fläche gegeben, an diese für jenen Punkt eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 266. — §. 267 125

Man kann durch einen Punkt oder durch eine Gerade an einen Conus eine Tangentialebene legen; diese Aufgaben zu lösen, Beispiel, §. 268. — §. 272. 126

Tangentialebenen einer beliebigen abwickelbaren Fläche für den gegebenen Berührungspunkt, für einen ausserhalb der Fläche gegebenen Punkt oder parallel zu einer Geraden, §. 273. — §. 275. 127

Viertes Kapitel.

Durchschnitte der entwickelbaren Flächen durch Ebenen.

Durchschnitte überhaupt, Durchschnitt eines Cylinders oder eines Conus durch eine zu ihrer Direktrix parallele Ebene, §. 276. — §. 277 129

Ein senkrechter Cylinder ist von einer Ebene geschnitten, man soll 1. die Projektionen der Durchschnittslinie, 2. ihre wahre Grösse, 3. Tangenten derselben, 4. die Entwickelung des Cylinders und jener Linie angeben, Beispiel, §. 278. — 279. 129

Ein schiefer Cylinder ist durch eine Ebene geschnitten, man soll dieselben Aufgaben lösen, §. 280. 132

Den Durchschnitt einer beliebigen Curve mit einer Ebene anzugeben §. 281. 133

Entwickelung des Kegels §. 282. 133

Ein senkrechter Conus wird von einer Ebene geschnitten, die Durchschnittslinie und eine Tangente derselben anzugeben, und den Kegel zu entwickeln, Beispiel, §. 283. — §. 284. . 134

Die Durchschnittslinie eines schiefen Kegels zu finden und den letzteren zu entwickeln, §. 285 136

Dritte Abtheilung.

Von den krummlinig-erzeugten Flächen überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Rotationsflächen, Flächen vom zweiten Grade überhaupt und Umhüllungsflächen.

Seite

Entstehung einer Rotationsfläche, Axe, Meridian, Parallelkreis, Aequator, zweifache Erzeugung einer Rotationsfläche, verschiedene Arten der Rotationsflächen; Flächen vom zweiten Grade überhaupt, §. 286. — §. 290 138

Umhüllungsflächen, Umhüllte und Charakteristiken, Lehrsatz hierüber, §. 291. — §. 292. 140

Sechstes Kapitel.

Tangirung der Rotationsflächen und krummlinig erzeugter Flächen überhaupt.

Tangentialebenen überhaupt und Bedingungen, Lehrsätze hiefür; Construktion eines Meridians, §. 293. — §. 296. 141

Eine Tangentialebene für den gegebenen Berührungspunkt an einer Rotationsfläche, Beispiel, §. 297. — §. 298. 142

Rotationshyperboloid und Tangentialebene desselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 299. 144

Parallel mit einer gegebenen Ebene an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 300. 146

Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn sich der Berührungspunkt entweder auf einem gegebenen Meridian oder auf einem Parallelkreise befindet, Beispiele, §. 301. — §. 303 147

Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn der Parallelkreis oder der Meridian gegeben ist, auf dem sich der Berührungspunkt befinden soll, §. 304. — §. 305. 148

Siebentes Kapitel.

Tangirende Flächen.

Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche einen tangirenden Conus zu legen und die Berührungscurve zu suchen, §. 306. 148

Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche einen tangirenden Cylinder zu legen §. 307. 149

Durch eine Gerade eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, §. 308. 149

Tangentialebenen für mehrere Flächen zugleich, §. 309. — §. 313. 150

Vierte Abtheilung.

Von den windschiefen Flächen.

Achtes Kapitel.

Erzeugung und Tangirung derselben.

Erzeugung derselben, §. 314. — §. 316. 151

Das Hyperboloid mit einem Mantel, doppelte Erzeugungsart desselben, Tangentialebene desselben für einen gegebenen Berührungspunkt §. 317. — §. 318. 152

Das hyperboloische Parabololoid, doppelte Erzeugungsart desselben, Tangentialebene desselben, §. 319. — §. 320. 152

Verschiedene windschiefe Flächen, §. 321 — §. 321. 153

Fünfte Abtheilung.

Durchdringung der Flächen unter sich.

Neuntes Kapitel.

Durchschnitte abwickelbarer Flächen unter sich.

Durchdringungslinie zweier Cylinder, §. 323. 154

Durchdringungslinie eines Cylinders und eines Kegels,

Durchdringung zweier Kegel, §. 324. 154

Zehntes Kapitel.

Durchdringung verschiedener Flächen unter sich.

Durchdringungslinie eines Cylinders und einer Kugel, dann eines Kegels und einer Rotationsfläche, §. 325. — §. 327. . . . 154

Die Durchdringungscurve einer windschiefen Fläche und einer Rotationsfläche und die Durchschnittslinie zweier Rotationsflächen zu finden, §. 328. — §. 331 155

Durchdringung eines Cylinders und einer windschiefen Fläche, §. 332. 156

Erstes Buch.

Erste Abtheilung.

Einleitung.

Geometrie im Raume.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Erste Abtheilung.

Einleitung.

§. 1.

Die descriptive Geometrie hat die Zeichnung körperlicher Formen und Grössen zum Gegenstande, so dass aus der Darstellung nicht allein auf die wahre Gestalt des Körpers, sondern auch auf seine Grösse, wenn derselbe begränzt ist, geschlossen werden kann.

§. 2.

Um ihren Zweck zu rereichen, benützt dieselbe die Geometrie im Raume, zeigt zuerst, wie man einen im Raume beliebig angegebenen Punkt bestimmen kann, betrachtet sodann die Erzeugung der übrigen geometrischen Grössen, zeigt mit Benützung der Geometrie, wie man aus dieser Erzeugung Mittel zur Darstellung finden kann.

§. 3.

Bekanntlich ist jede Gerade (nämlich gerade Linie) der Lage nach durch zwei sich auf derselben befindende Punkte bestimmt. Ist daher das Mittel angegeben, einen Punkt darzustellen, so wird es nicht schwierig sein, auch die Lage einer Geraden genau anzugeben. Eben so werden wir zeigen, wie eine Ebene durch Punkte oder durch Gerade, die sich auf der Ebene befinden sollen, der Lage nach bestimmt ist; daher wird man aus der Darstellung von Geraden in Verbindung mit den Eigenschaften, welche aus der Erzeugung einer Ebene hervorgehen, die Lage einer, also auch beliebig gegeneinander gestellter Ebenen im Raume durch Zeichnung bestimmen können. — Eben so leicht wird auch die Darstellung jeder beliebigen Fläche sein, wenn man auf ihre Erzeugung und auf die Darstellung der bei dieser Erzeugung benützten geometrischen Grössen Rücksicht nimmt. — Es ist daher auch einleuchtend, wie man körperliche Formen zu zeichnen im Stande sein wird, und aus der Zeichnung die wahre Gestalt des Körpers ersehen kann. —

Wir gehen daher vor Allem auf die Darstellung von Punkten, Linien und Ebenen über, erläutern die unumgänglich nothwendigen Sätze der räumlichen Geometrie, und begründen vermittelst derselben die Darstellung der genannten geometrischen Grössen.

Erstes Kapitel.

Von der Lage gerader Linien und Ebenen im Raume

§. 4.

Erklärung. Ebene ist eine Fläche, auf welcher man eine Gerade in einer beliebigen Richtung sich denken kann, so dass diese überall in die Fläche fällt, wenn man sich beide beliebig weit ausgedehnt denkt.

Zusatz. Eine Gerade kann daher nicht theils in einer Ebene, theils ausserhalb derselben sich befinden, und wird mithin ganz und gar in der Ebene liegen, wenn nur zwei in ihr sich befindende Punkte in dieser Ebene sind.

§. 5.

Bewegt sich eine Gerade stets parallel zu ihrer anfänglichen Richtung und eine andere Gerade treffend fort, so wird der Raum, welchen diese sich bewegende Gerade durchläuft, eine ebene Fläche sein, oder Ebene. — Es wird aber auch eine Ebene dadurch erzeugt, indem sich eine Gerade, die stets durch einen und denselben Punkt geht, an einer andern Geraden fortbewegt. Die sich bewegende Gerade wird Erzeugende oder Generatrix, die Gerade aber, welche die Erzeugende bei ihrer Bewegung stets trifft: Directrix oder Leitlinie genannt. —

§. 6.

Eine Ebene wird von einer Geraden nur in einem Punkte getroffen, weil die Gränze einer Linie ein Punkt ist. Dieser Punkt, in welchem eine Ebene eine Gerade trifft, wird im Allgemeinen Durchgangspunkt der Geraden genannt; steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, so nennt man diesen Durchgangspunkt den Fusspunkt der Senkrechten.

§. 7.

Aus §. 5 kann man sogleich eine Erklärung ableiten, für eine auf einer Ebene senkrecht stehende Linie. Bleibt nämlich eine Gerade stets senkrecht auf der durch ihren Fusspunkt gehenden Erzeugenden der Ebene, so wird dieselbe auf dem geometrischen Orte, den diese Linie beschreibt, auch immer senkrecht sein, oder was dasselbe ist:

Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn dieselbe mit allen in der Ebene liegenden Geraden, die durch ihren Fusspunkt gehen, rechte Winkel bildet.

Anmerk. Sobald wir gezeigt haben, wodurch die Lage einer Ebene bestimmt ist, soll nachgewiesen werden, dass eine Gerade nur mit zweien durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss, um auch auf der Ebene selbst senkrecht zu sein.

§. 8.

Es wurde in den Paragraphen 4 und 5 gezeigt, welche Eigenschaften eine Fläche haben muss, damit dieselbe eine Ebene ist, und wie eine solche Ebene erzeugt werden kann. Nun sollen die Bedingungen aufgesucht werden, welche die Lage einer Ebene im Raume bestimmen.

Nimmt man eine Gerade im Raume beliebig an, und denkt durch diese eine Ebene gelegt, so wird man diese Ebene noch um die Gerade drehen können, ohne dass sie dabei letztere verlässt. Dreht man die Ebene nun so lange um die genannte Gerade, bis sie einen ausserhalb der letzteren angenommenen Punkt enthält, so wird man die Lage der Ebene jetzt nicht mehr verändern können, ohne dass dieselbe entweder den gegebenen Punkt oder die Gerade verlässt. Soll daher die Ebene die Gerade sowohl, als auch den Punkt enthalten; so darf dieselbe von nun an ihre Lage nicht mehr verändern. Hieraus folgt aber sogleich der Satz:

Die Lage einer Ebene ist durch eine Gerade und einen ausserhalb dieser letzteren angenommenen Punkt bestimmt.

§. 9.

Es seien nun drei nicht in einer Geraden sich befindende Punkte im Raume angegeben; so kann man durch zwei derselben sich eine Gerade gelegt denken, welche der Lage nach vollkommen bestimmt sein wird. Durch diese Gerade und den dritten Punkt kann man sich aber nach vorigem §. eine Ebene gelegt denken, die der Lage nach völlig bestimmt ist. Diese Ebene enthält aber zugleich die beiden ersten Punkte, weil letztere auf einer Geraden sich befinden, die in der Ebene liegt; mithin können wir sagen:

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte kann man eine Ebene legen, und die Lage dieser Ebene ist durch diese drei Punkte völlig bestimmt.

§. 10.

Es seien zwei sich schneidende Gerade im Raume gegeben; man soll untersuchen, ob durch diese eine Ebene gelegt werden kann, welche der Lage nach völlig bestimmt ist. — Denkt man sich daher durch die erste der beiden Geraden eine Ebene gelegt, so kann man dieser offenbar noch eine solche Lage geben, dass sie einen in der zweiten Geraden enthaltenen Punkt enthält. Ist diess aber geschehen, so ist die Lage der Ebene (nach §. 8.) eine bestimmte, und es enthält zugleich die Ebene (nach §. 4.) die zweite Gerade, weil von letzterer sich zwei Punkte in jener befinden, mithin kann man

durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene legen, deren Lage völlig bestimmt ist.

§. 11.

Endlich soll untersucht werden, ob durch zwei unter sich parallele Gerade die Lage einer Ebene bestimmt ist.

Geht man hierbei von der Euclid'schen Definition aus, nämlich: „zwei Gerade sind parallel, wenn dieselben beliebig weit verlängert sich nicht schneiden, und in einer Ebene liegen"; so kann man sich durch zwei parallele Gerade eine Ebene denken. Da aber diese Ebene die erste Gerade und jeden beliebigen auf der zweiten Geraden angenommenen Punkt enthält, so ist auch ihre Lage bestimmt (nach §. 8.). —

Benützt man die Definition: zwei Gerade sind parallel, wenn sie gegen eine dritte auf derselben Seite gleiche Richtung gegen einander behalten; so kann man sich die beiden Parallelen durch eine dritte Gerade geschnitten denken. (Fig. 1.) Die beiden parallelen Geraden seien nun P_1 und P_2, die dritte Gerade sei durch L bezeichnet. Durch L und P_1 kann man sich (nach §. 10.) eine Ebene gelegt denken, und diese muss nun auch P_2 enthalten; denn ein Punkt der P_2 ist schon in der Ebene, nämlich der Durchschnittspunkt von L und P_2, und und würde nicht noch ein zweiter beliebig in P_2 angenommener in die Ebene fallen, so denke man sich in dieser Ebene durch den Punkt, in welchem P_2 von L getroffen wird, eine Gerade $'P$ so gezogen, dass der Winkel, welchen $'P$ mit L bildet, gleich dem auf derselben Seite liegenden Winkel wird, den P_1 mit L bildet. Es wäre nun nach der Definition $'P \neq P_1$, was aber nicht sein kann, weil man nach einem Satze der ebenen Geometrie: durch einen und denselben Punkt nur eine Gerade mit einer andern parallel ziehen kann; mithin muss $'P$ mit P_2 zusammenfallen. Da aber $'P$ in der durch

L und P_1 gelegten Ebene sich befindet, so wird diess auch von P_2 der Fall sein. Es folgt also auch aus dieser Definition, dass man durch zwei parallele Gerade eine Ebene legen kann, welche dann der Lage nach völlig bestimmt ist.

Legt man endlich die dritte in den Lehrbüchern der ebenen Geometrie herrschende Definition zu Grunde: zwei Gerade sind parallel, wenn sie überall gleiche senkrechte Abstände von einander haben; so kann man sich zum Zwecke der vorliegenden Untersuchung eine Gerade denken, die auf beiden senkrecht steht, durch diese und P_1 eine Ebene legen, welche dann auch P_2 enthalten muss. (Fig. 1.) Wäre dieses nicht der Fall, so könnte man sich durch den Durchschnittspunkt von P_2 und L in der gedachten Ebene eine Gerade $'P$ gezogen denken, welche überall die Entfernung L von der Geraden P_1 hat, und die mithin mit der P_1 parallel sein müsste. Diese Gerade $'P$ muss aber mit P_2 zusammenfallen, weil sonst durch einen Punkt zwei Parallele mit einer Geraden gezogen werden könnten.

Nimmt man daher irgend eine dieser drei herrschenden Definitionen für parallele Gerade; so lässt sich immer leicht zeigen:

dass durch zwei unter sich parallele Gerade nur eine Ebene gelegt werden kann, und diese der Lage nach (§. 8.) völlig bestimmt ist.

Anmerk. 1. Da ich beim Studium dieses Lehrbuches der descript. Geometrie die Planimetrie voraussetzen muss; so hielt ich es für nothwendig den in diesem §. abgehandelten Satz nach den am meisten im Gebrauche stehenden Definitionen zu behandeln. —

Anmerk. 2. Sind zwei Gerade nicht parallel, und schneiden sich auch nicht, so weit man sie auch verlängern mag; so kann man keine Ebene finden, in welcher beide zugleich enthalten sind. —

§. 12.

Nachdem nun die Bedingungen, unter welchen die Lage einer Ebene bestimmt ist, erläutert sind, so wollen wir die Lage einer Geraden gegen eine Ebene untersuchen.

Denkt man sich zu diesem Ende vor Allem eine Gerade, die mit zweien in einer gegebenen Ebene liegenden und durch ihren Durchgangspunkt gehenden Geraden rechte Winkel bildet; so kann nachgewiesen werden, dass diese Gerade mit jeder durch ihren Durchgangspunkt gehendeu und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss. (Fig. 2.) Es sei zu diesem Ende durch M N eine Ebene bezeichnet, gegen welche eine Gerade S T so liegen soll, dass $\angle STB = R$, und $\angle STA = R$, und wobei T der Durchgangspunkt der Geraden S T ist, A T und B T in der Ebene angenommene Gerade sind. Verlängert man nun jede der beiden Geraden A T und B T, und macht $TF = AT$, $DT = BT$, zieht ferner durch T in der Ebene M N die beliebige Gerade C T E, verbindet ferner F mit D, B mit A, den beliebig in S T angenommenen Punkt S mit F, D, A und B durch Gerade, so ist leicht zu ersehen, dass

1. $\triangle DTF \cong \triangle ATB$, mithin auch $DF = AB$ und $\angle EDF = \angle TBC$

sein muss. Ferner ist ebenso leicht einzusehen, dass

2. $\triangle SDT \cong \triangle STB$, also $SD = SB$
3. $\triangle SFT \cong \triangle STA$, also $SF = SA$
4. $\triangle EDT \cong \triangle TBC$, also $ED = BC$, $ET = TC$, $FE = AC$
5. $\triangle DFS \cong \triangle ASB$ (aus 1, 2 und 3), also $\angle SDE = \angle SAC$
6. $\triangle SFE \cong \triangle SAC$ (nach 3, 4, 5), also $SE = SC$, endlich
7. $\triangle SET \cong \triangle SCT$ (nach 4 und 6), mithin auch $\angle STE = \angle STC = R$

sein muss. Da also S T auf jeder beliebigen durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene M N liegenden Geraden senkrecht steht, so wird dieselbe nach §. 7. auf Ebene MN senkrecht sein, und daher hat man den Satz:

Steht eine Gerade nur auf zweien durch ihren Durchgangspunkt mit einer Ebene gehenden, und in dieser liegenden Geraden senkrecht, so wird dieselbe auch auf der Ebene senkrecht sein.

§. 13.

Bei den folgenden Untersuchungen und Sätzen wird es öfters nothwendig sein noch eine Ebene, die gegen die gegebene beliebig geneigt ist, zu Hülfe zu nehmen; daher wollen wir sehen, welches der Durchschnitt zweier Ebenen ist. Vor Allem muss der Durchschnitt zweier Ebenen, d. h. die geometrische Grösse, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden: eine Linie sein, weil an dem Orte, an welchem sich beide Ebenen schneiden, jede derselben begränzt wird, also ein Raum von nur einer Ausdehnung die gemeinschaftliche Gränze derselben sein kann. Diese Linie muss aber noch die Eigenschaft haben, dass sie in jeder beliebigen Richtung gedacht, in der Ebene ganz und gar liegen muss; denn man kann sich die eine der Ebenen fest, die andere beweglich denken, so

dass auch der Durchschnitt nach und nach auf der festen Ebene sich fortbewegt, und dabei in der beweglichen Ebene bleibt. Da man nun diese Eigenschaft, dass nämlich diese Linie in jeder beliebigen Richtung gedacht in eine Ebene fällt, nur an einer Geraden findet; so ist der Durchschnitt zweier Ebenen eine Gerade.

§. 14.

Gehen wir nun wieder auf die Lage einer Geraden gegen eine Ebene über, und bleiben noch ein wenig bei der Senkrechten stehen. Denkt man sich von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte gezogen, so wird jede andere von demselben Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit jener zusammenfallen müssen. Legt man nämlich durch diese zwei Gerade eine Ebene, und bestimmt ihren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene, so müsste auch jede dieser Geraden senkrecht auf dem Durchschnitte der gegebenen und der durch beide Linien gedachten Ebene sein, was aber nicht sein kann; mithin kann man sagen:

Von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte kann man auf diese nur eine einzige Senkrechte ziehen.

§. 15.

Eben so kann man sich leicht überzeugen, dass man von einem in einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese auch nur eine Senkrechte ziehen kann. Würde eine zweite möglich sein, so könnte man sich durch beide eine Ebene gelegt denken, welche dann die gegebene schneiden muss, und zwar nach §. 13. in einer Geraden. Auf letzterer muss jede von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte auch senkrecht sein; also auch jene zwei Geraden. Da aber dieses nicht der Fall sein kann, weil sie in einer Ebene, nämlich in der Hülfsebene liegen, so muss jede zweite von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit der ersten zusammenfallen, d. h.

Von einem auf einer Ebene angenommenen Punkte aus kann man auf diese nur eine Senkrechte ziehen.

(Fig. 3.) Derselbe Beweis soll mit Benützung einer Figur wiederholt werden. Wäre nämlich A B senkrecht auf Ebene M N, und es würde von A aus noch eine zweite Gerade A C möglich sein, die senkrecht auf Ebene M N steht; so kann man durch A B und A C (§. 10.) eine Ebene legen, und diese wird Ebene M N (§. 13.) in einer Geraden schneiden, die A D sein soll. Es müsste nun nach §. 7., A B sowohl als A C auf A D senkrecht stehen, was aber nicht sein kann, weil beide und A D in derselben Ebene liegen; mithin muss nothwendig jede zweite Gerade, die man von A aus auf Ebene M N senkrecht ziehen könnte mit A B zusammenfallen, oder A B ist die einzige Senkrechte. —

§. 16.

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte, und mehrere andere Gerade, so wird jede der letzteren länger, als jene Senkrechte sein. Denn denkt man sich durch diese Senkrechte und eine beliebige der Geraden eine Ebene gelegt, so wird diese die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden. Letztere bildet mit jenen beiden Geraden (durch welche die Ebene gelegt wurde) ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypothenuse die von dem beliebigen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Gerade ist, und die mithin länger sein muss, als eine der Katheten, also auch länger, als die vom angenommenen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Senkrechte.

§. 17.

Hieraus folgt nun sogleich der Satz:

Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Ebene ist die von diesem Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte, und zwar der Theil von letzterer, welcher zwischen dem gegebenen und ihrem Fusspunkte liegt. —

§. 18.

(Fig. 4.) Nimmt man nun wieder eine Ebene (M N) an, und zieht von einem ausserhalb derselben angenommenen Punkte A auf dieselbe die Senkrechte A B, ferner mehrere andere Gerade A C, A D, A E so, dass ihre Durchgangspunkte C, D, E von dem Fusse B der Senkrechten A B gleichweit entfernt sind, also B C = B D = B E, so werden die hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke A B C, A B D und A B E kongruent, folglich auch die schrägen auf die Ebene gezogenen Geraden A C, A D, A E gleich lang sein. — Ist aber vom angenommenen Punkte A aus auf die Ebene noch eine Gerade A F gezogen, deren Durchgangspunkt F weiter von der Senkrechten entfernt ist, als die Durchgangspunkte der vorigen Geraden, so wird sie auch länger, als jede der vorigen Geraden sein. Denn zieht man B F, trägt auf diese die Gerade B G = B C auf, und zieht A G, so wird nach dem ersten Theile dieses §., A G = A C sein. Nun liegen aber A B, A G und A F in einer Ebene, in wel-

cher AB senkrecht auf BF ist, mithin muss nach einem Satze der ebenen Geometrie AF > AG, also auch grösser, als AC, und mithin auch grösser, als jede der Geraden AD und AE sein, weil diese einzeln gleich AC sind. Aus diesem Ganzen folgt nun:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte und mehrere andere Gerade; so werden diejenigen, deren Durchgangspunkte von der Senkrechten gleich weit entfernt sind, unter sich gleich lang sein. Von denjenigen aber, deren Durchgangspunkte ungleich weit von der Senkrechten entfernt sind, wird jene die längere sein, deren Durchgangspunkt auch weiter von der Senkrechten entfernt ist.

§. 19.

(Fig. 5.) Nun sollen umgekehrt die Geraden AC, AD, AE etc. etc., welche von A aus bis zur Ebene MN gezgen werden, gleich lang sein. Zieht man nun von A aus auf Ebene MN die Senkrechte AB, und verbindet die Punkte C, D, E etc. etc. mit B durch Gerade, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD, ABE, welche kongruent sein müssen (weil zwei Seiten des einen immer zweien Seiten des andern einzeln genommen gleich sind). Es ist also < ACB = < ADB = < AEB etc. etc., und ferner BC = BD = BE u. s. w., oder C, D, E etc. etc., liegen in einem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Senkrechten ist. Hieraus folgt also der Satz:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine beliebige Anzahl gleich langer Geraden, so werden
1. diese Geraden mit denjenigen Geraden, die man von ihren Durchgangspunkten nach dem Fusse der Senkrechten zieht, gleiche Winkel bilden;
2. die Durchgangspunkte dieser Geraden in einem Kreisumfange liegen, dessen Mittelpunkt der Fuss der von ihrem gemeinschaftlichen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte ist.

§. 20.

(Fig. 5.) Letzteres könnte man nun sogleich anwenden, um von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Man würde nämlich zu diesem Ende vom Punkte A aus eine Linie AC bis zur Ebene ziehen, und diese sich so bewegt denken, dass sie stets durch A geht und ihre ursprüngliche Länge AC behält; so trifft sie die Ebene in andern Punkten, von welchen wir nur noch zwei, nämlich D und E bezeichnen wollen. Sucht man nun den Mittelpunkt B des Kreisumfanges, der durch C, D, E geht, so wird die Gerade, die von A nach B gezogen wird, senkrecht auf der Ebene sein. Denn zieht man in diesem Kreise einen Durchmesser, und denkt sich von dessen Endpunkten aus nach D gerade Linien gezogen, so entstehen zwei Dreiecke, die kongruent sein müssen, und mithin reehwinklig sind. —

§. 21.

(Fig. 5.) Gehen wir nochmal auf das Resultat des §. 19. zurück, so ersehen wir aus dem 1. Theile des darin bewiesenen Lehrsatzes, dass wenn eine Gerade, die durch einen fixen Punkt geht, stets eine gegebene Ebene trifft, dieselbe Länge beibehält: der Winkel, den diese Gerade mit derjenigen bildet, welche von ihrem Durchgangspunkte nach dem Fusse der von ihrem fixen Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten gezogen wird, sich gleich bleibt, wenn man sich die Gerade in einer beliebigen der erwähnten Lagen denkt. Dieser Winkel ist aber auch ausserdem der kleinste unter allen, die diese Gerade mit allen andern Geraden bildet, welche in der Ebene liegen, und durch ihren Durchgangspunkt gehen. Denn zieht man z. B. durch C eine beliebige Gerade in der Ebene MN, macht CH = CB, und denkt sich AH gezogen, so wird, weil BH = CH, CA = CA, AB < AH ist, auch < ACB < < AHC sein.

Ist also eine Gerade beliebig gegen eine Ebene geneigt, und man zieht von einem auf derselben angenommenen Punkte aus eine Senkrechte auf die Ebene, verbindet den Fuss dieser Senkrechten mit dem Durchgangspunkte der gegebenen Geraden durch eine Gerade, so bildet diese Gerade mit der gegebenen einen Winkel, der unveränderlich bleibt und der kleinste unter allen ist, welche die Gerade mit anderen bildet, die man sich durch ihren Durchgangspunkt in der Ebene gezogen denken kann.

Anmerk. Dieser Winkel wird der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene genannt. Wie er erhalten wird, ist leicht aus dem vorigen Satze zu ersehen. —

§. 22.

(Fig. 6.) Denkt man sich von irgend einem Punkte der Geraden AB auf diese mehrere Senkrechte gezogen, und legt durch zwei derselben eine Ebene MN,

so werden alle durch den Punkt B gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden auf AB senkrecht stehen nach §. 12. Würde nun unter allen auf AB senkrecht stehenden und durch B gehenden Geraden eine sein, die nicht in der Ebene MN liegt, z. B. BD, so könnte man durch diese und eine in Ebene MN liegende Gerade BC (nach §. 10.) eine Ebene legen, welche dann (nach §. 12.) auf BA senkrecht sein müsste. Wäre diese Ebene PQ, und man denkt sich durch AB und BC eine Ebene gelegt, welche die Ebene PQ in BD schneidet, so müsste $\angle$ ABD ein Rechter, also so gross, als $\angle$ ABC sein, was nach einem Satze der ebenen Geometrie nicht sein kann, mithin müssen alle durch B gehenden und auf AB senkrechten Geraden in der nämlichen Ebene liegen, woraus also folgt:

Alle auf einer Geraden durch denselben Punkt senkrecht gezogenen Geraden liegen in einer Ebene.

§. 23.

Aus dem im vorigen Paragraphe erwähnten Satze folgt:

1. Wenn eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht ist, und sich so um diese bewegt, dass sie stets durch denselben Punkt geht, und senkrecht bleibt, eine Ebene von der ersten Geraden beschrieben wird. Diese Ebene wird auf der Geraden nach §. 7. senkrecht stehen.
2. Bewegt sich ein Punkt um eine Gerade, und behält stets dieselbe Entfernung von der Geraden, so beschreibt er einen Kreisbogen, dessen Ebene auf der Geraden senkrecht steht. Zieht man also von dem Punkte aus auf die Gerade, um welche er sich bewegt, eine senkrechte Ebene, so wird in dieser der Punkt bei seiner Bewegung stets bleiben, und die Peripherie eines Kreises beschreiben, dessen Mittelpunkt der Durchgangspunkt der Geraden mit der Ebene ist.
3. Nimmt man eine Ebene an, die zwei sich schneidende Ebenen trifft; so müssen ihre Communsektionen mit diesen Ebenen eine einzige Gerade bilden, sobald man die Ebenen um ihre gemeinschaftliche Gerade dreht, und in eine Ebene legt.

§. 24.

(Fig. 7.) Nimmt man in einer Ebene MN einen Punkt B an, zieht BA senkrecht auf die Ebene, und zieht von dem Punkte B auf CE, die in der Ebene MN liegt, die Senkrechte BD, verbindet den beliebig auf BA angenommenen Punkt A mit D durch die Gerade AD, macht DC = DE, und denkt sich nun die Hülfslinien CA, CB, EA und EB gezogen; so muss BC = BE sein (wegen der Congruenz der Dreiecke EDB und BDC), daher auch CA = EA (weil $\triangle$ CAB $\cong$ $\triangle$ ABE ist), und mithin $\triangle$ ACE gleichschenklig sein. Da nun DC = DE, also die Grundlinie diees Dreieckes in D halbirt ist, so wird AD senkrecht auf CE sein. Es folgt also:

1. Zieht man auf eine Ebene eine Senkrechte, von ihrem Fusse aus auf eine in derselben Ebene liegende Gerade eine Senkrechte, und zieht von dem Punkte, in welchem letztere die Gerade trifft nach einem beliebigen Punkte der ersteren Senkrechteu eine Gerade, so wird diese Gerade auf der in der Ebene angenommenen Geraden senkrecht sein.
2. Die in der Ebene angenommene Gerade wird senkrecht auf der Ebene sein, welche man durch BD und BA legen kann.

§. 25.

Schneidet eine Gerade eine gegebene Ebene nicht, so weit man auch beide verlängern mag, so ist die Gerade parallel zur Ebene, und letztere parallel zur Geraden. — Liegen zwei oder mehrere Ebenen so, dass man dieselben so weit als man will verlängert denken kann, ohne dass sie sich treffen so sind diese Ebenen unter sich parallel.

§. 26.

(Fig. 9.) Sind zwei Gerade AB und ED parallel, und es steht AB senkrecht auf Ebene MN, so muss auch DE senkrecht auf Ebene MN sein. Denn denkt man sich durch AB und DE eine Ebene gelegt, so wird diese die Ebene MN nach BE schneiden, und es wird mithin (nach einem Satze der ebenen Geometrie) DE senkrecht auf BE sein. Zieht man nun EF senkrecht auf BE in der Ebene MN, so muss EF senkrecht auf Ebene EBAD sein nach §. 24., und folglich auch auf ED, weil diese in der Ebene EBAD liegt. Da nun DE senkrecht auf EF und BE steht, und diese beide Gerade in Ebene MN liegen, so folgt also der Satz:

Sind zwei Gerade parallel, und steht eine derselben auf einer Ebene senkrecht, so muss die andere auf derselben Ebene senkrecht sein.

§. 27.

(Fig. 10.) *Zwei Gerade, die auf einer und derselben Ebene senkrecht sind, müssen parallel sein.* Ist nämlich A B sowohl, als C D senkrecht auf Ebene M N, und man zieht von D aus eine Gerade D E, die parallel zu A B ist, so muss D E nach vor. §. senkrecht auf Ebene M N sein, was aber nach §. 15. nur dann statt finden kann, wenn D E mit D C in einer Richtung liegt, so dass also D C selbst die durch D mit B A gezogene Parallele sein muss.

§. 28.

(Fig. 15.) Ist A B $\neq$ C D, und A B $\neq$ E F, und man legt durch B eine Ebene M N senkrecht auf A B, so muss nach §. 26., C D sowohl, als E F senkrecht auf Ebene M N sein, und mithin ist nach §. 27. C D $\neq$ E F, woraus also folgt, *dass wenn zwei Gerade parallel zu einer dritten sind, jene auch unter sich parallel sein müssen; oder wenn eine Gerade parallel mit mehreren anderen Geraden ist, so müssen letztere auch unter sich parallel sein.*

§. 29.

(Fig. 8.) Ist A B $\neq$ C D, und liegt C D in der Ebene M N, so wird A B die Ebene M N nicht treffen, so weit man beide verlängert. Denkt man sich nämlich durch A B eine beliebige Ebene gelegt, und von einem Punkte der Communsektion dieser Ebene mit M N eine Parallele zu C D gezogen, so muss diese Parallele auch zu A B parallel sein (nach §. 28.), und mithin nach §. 11. in der durch A B gelegten Ebene ganz und gar liegen, so dass sie also Communsektion sein wird von der durch A B gelegten Ebene und M N. Es kann also A B diese Communsektion nicht treffen, und mithin auch die Ebene in keinem Punkte, weil die Communsektion jeder Ebene, welche durch einen Punkt von M N und durch A B gelegt wird, und der Ebene M N, mit A B parallel ist. Hieraus folgt also:

1. *Ist eine Gerade mit einer in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.*
2. *Jede durch die erstere Gerade gelegte Ebene schneidet die gegebene nach einer Geraden, die mit jener parallel ist.* —

§. 30.

Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist sie von der Ebene überall gleich weit entfernt.

Unter Entfernung dieser Geraden von der Ebene versteht man nämlich den zwischen der Geraden und Ebene enthaltenen Theil einer Geraden, welche auf beiden senkrecht steht. Betrachtet man nun zwei solche Entfernungen, so sind dieselben parallel, und liegen in einem Vierecke, das ein Parallelegramm sein muss, was aus dem vor. §. einleuchtet. —

§. 31.

Soll man zu einer Geraden eine Ebene parallel legen, so darf man nur eine Gerade ziehen parallel der gegebenen Geraden, durch letztere eine Ebene legen, so wird diese parallel zur gegebenen Geraden sein. —

§. 32.

(Fig. 12.) Hat man zwei Ebenen M N und Q R, die beide auf der Geraden A B senkrecht stehen, so können sich beide Ebenen nicht schneiden, so weit man auch jede derselben verlängern mag. Würden dieselben sich schneiden, und wäre C ein Punkt ihres Durchschnittes, so müsste, weil C in jeder der beiden Ebenen liegen würde, C A in Ebene M N, C B in Ebene Q R ganz und gar liegen, und folglich auch A B sowohl auf C A, als auch auf C B senkrecht stehen. Da aber A B nicht auf diesen beiden Geraden zugleich senkrecht sein kann, so kann auch C kein Punkt der Communsektion beider Ebenen sein. Von jedem andern Punkte, der im Durchschnitte beider Ebenen liegen sollte, könnte man aber auf dieselbe Weise zeigen, dass die Verbindungslinien desselben mit A und B senkrecht auf A B sein müssten, was aber ungereimt ist; mithin kann es keinen Punkt geben, der im Durchschnitte beider Ebenen liegt, oder beide Ebenen schneiden sich nicht, so weit man sie auch verlängern mag. *Stehen also zwei Ebenen auf einer Geraden senkrecht, so sind dieselben parallel.*

§. 33.

(Fig. 11.) Sind die beiden Ebenen M N und P Q parallel, und es schneidet eine dritte Ebene D B dieselben nach A B und C D, so können diese beiden Geraden sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängern würde, weil sie in zwei parallelen Ebenen sich befinden. Diese beiden Geraden A B und C D liegen aber zugleich in einer Ebene, und müssen desshalb parallel sein. *Werden also zwei parallele Ebenen durch irgend eine dritte Ebene geschnitten, so sind die Durchschnitte parallel.*

§. 34.

(Fig. 18.) PQ und MN seien zwei parallele Ebenen, AB sei eine Gerade, die senkrecht auf MN ist. Legt man nun durch AB verschiedene Ebenen, z. B. BC und BE, so muss nach vor. §., AE, ≠ BF und AC ≠ BD sein. Da aber AB senkrecht auf Ebene MN, also nach §. 7. senkrecht auf BF, und aus demselben Grunde auch senkrecht auf BD ist, so muss AE als Parallele zu BF auch senkrecht auf AB, und ebenso AC als Parallele zu BD senkrecht auf AB sein. Da also AB senkrecht auf AE sowohl, als auch auf AC ist, so muss BA senkrecht auf Ebene PQ sein. Es folgt also hieraus:

1. dass wenn eine Gerade senkrecht auf einer von zwei parallelen Ebenen ist, dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht sein muss.
2. Dass man für zwei parallele Ebenen Gerade ziehen kann, die auf beiden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

§. 35.

(Fig. 14.) Derjenige Theil einer solchen auf zwei parallelen Ebenen zugleich senkrecht stehenden Geraden, welcher zwischen beiden Ebenen enthalten ist, wird ihr Abstand oder ihre Entfernung genannt. Denkt man sich für die beiden parallelen Ebenen PQ und MN die Entfernungen AB, CD, EF etc. etc. gezogen; so werden diese Geraden nach §. 27. unter sich parallel sein, und man kann daher nach §. 11. durch je zwei derselben eine Ebene legen. Durch AB und CD die Ebene BC gelegt, gibt die Durchschnitte AC ≠ BD; mithin ist ACDB ein Rechteck, und folglich AB = CD. Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass CD = EF ist, folglich auch AB = EF. Hieraus folgt also der Satz:

Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

§. 36.

(Fig. 16.) Es sei CA ≠ C_1A_1, AB ≠ A_1B_1, von diesen Geraden sei ferner angenommen, dass, wenn < CAB ein spitzer Winkel ist, auch < $C_1A_1B_1$ ein solcher sein soll, und ist < CAB ein stumpfer, so soll < $C_1A_1B_1$ auch ein stumpfer Winkel sein. Macht man nun AC = A_1C_1, AB = A_1B_1, zieht die Hülfslinien CC_1, AA_1, BB_1, CB und C_1B_1, so ist

1. CC_1 ≠ und = AA_1, weil AC ≠ und = A_1C_1 ist,
2. BB_1 ≠ und = AA_1, weil AB ≠ und = A_1B_1, und mithin (nach §. 48.)
3. CC_1 ≠ und = BB_1, folglich auch
4. CB ≠ und = C_1B_1. Da also CB = C_1B_1, CA = C_1A_1, AB = A_1B_1, so ist
5. < CAB = < $C_1A_1B_1$.

Es muss aber auch Ebene CBA ≠ Ebene $C_1A_1B_1$ sein, denn wäre diess nicht der Fall, so könnte man durch C eine Ebene parallel zur Ebene $C_1A_1B_1$ legen. Diese soll AA_1 in D treffen, so müsste (§. 33.) CD ≠ C_1A_1 sein, und folglich auch DA_1 = CC_1 = AA_1 sein, was absurd ist. Es folgt also:

1. Sind zwei Gerade im Raume parallel zu zwei anderen Geraden, so muss der spitze oder stumpfe Winkel, unter welchen sich die beiden ersteren Geraden schneiden, gleich dem spitzen oder stumpfen Winkel sein, den die beiden letzteren Geraden bilden.
2. Die Ebene, welche durch die ersten zwei Geraden bestimmt ist, muss parallel sein zur Ebene der beiden letzteren Geraden.

§. 37.

(Fig. 17.) Zieht man in einer Ebene M_1N_1 die sich schneidenden Geraden A_1B_1, A_1C_1, legt durch einen Punkt A_2 die Geraden A_2B_2 und A_2C_2 parallel zu den vorigen, so wird die durch A_2C_2 und A_2B_2 gelegte Ebene nach vor. §. parallel zur Ebene M_1N_1 sein müssen. —

§. 38.

Aus den vorigen Paragaphen werden nachfolgende Sätze klar, und können leicht erwiesen werden:

1. Durch einen Punkt im Raume kann man nur eine Ebene parallel zu einer andern ziehen.
2. Die in gleicher Entfernung von einer Ebene parallel zu dieser gelegten Ebenen müssen zusammenfallen, und eine einzige Ebene bilden.
3. Durch eine Gerade kann man auf eine gegebene Ebene nur eine einzige Ebene senkrecht ziehen.
4. Sind zwei Ebenen einzeln parallel zu zwei anderen Ebenen, so muss die Communsektion der ersten beiden, parallel zur Communsektion der beiden letzten Ebenen sein. —

§. 39.

(Fig. 18.) Werden die beiden in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden AB und CD von drei parallelen Ebenen M_1N_1, M_2N_2

$M_3 N_3$ **geschnitten, so müssen die Theile AF, FB, DE und EC dieser Geraden, welche zwischen den parallelen Ebenen enthalten sind, in gleichem Verhältnisse stehen.**

Legt man, um diess nachzuweisen, durch AB und D eine Ebene, und eine solche durch DC und B, so wird BGD auf der Communsektion von beiden liegen (wobei G der Durchgangspunkt von BD mit Ebene $M_2 N_2$ sein soll). Ebenso müssen AD und FG auf den Durchschnitten von Ebene ABD mit den Ebenen $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ sein; ferner GE und BC auf den Durchschnitten von Ebene DBC mit den Ebenen $M_2 N_2$ und $M_3 N_3$. Es muss mithin

$AD \not\doteq FG$ und $GE \not\doteq BC$ sein,

folglich werden nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie folgende Proportionen statt finden:

$BF : FA = BG : GD$ und

$EC : ED = BG : GD$.

Durch Verbindung dieser beiden Proportionen erhält man die Proportion

$BF : FA = CE : ED$ oder $BF : CE = FA : ED$,

welche nachzuweisen war. —

Anmerk. Würden diese Geraden sich schneiden, so würde der Satz schon aus dem in der ebenen Geometrie vorgekommenen hervorgehen; und würden diese Geraden parallel sein, so wären die zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Theile derselben einander gleich, mithin der Satz ebenfalls schon klar. —

§. 40.

(Fig. 19.) Nachdem wir nun parallele Ebenen betrachtet haben, wollen wir endlich auch zwei sich schneidende Ebenen in Betrachtung ziehen, und von diesen zuerst ihren Neigungswinkel aufzusuchen lehren. Hat man zwei Ebenen MN und PQ, welche sich nach einer Geraden schneiden, auf welcher MQ enthalten ist, und man zieht durch A_1, A_2 etc. etc., $A_1 B_1 \not\doteq A_2 B_2$ etc. etc. in der Ebene MN, sodann $A_1 C_1 \not\doteq A_2 C_2$ etc. etc. in der Ebene PQ, so ist nach §. 36. $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_2 A_2 C_2$ u. s. w. **Nimmt man also auf der Communsektion zweier Ebenen einen Punkt an, zieht von diesem zwei Senkrechte auf die Communsektion, von welchen die eine in der einen Ebene, die andere in der andern Ebene liegt, so bleibt der Winkel dieser beiden Senkrechten unveränderlich, so lange die beiden Ebenen dieselbe Neigung gegen einander haben. Dieser Winkel ist also auch unabhängig von dem Orte, in welchem der Punkt auf der Communsektion angenommen wird.** —

§. 41.

(Fig. 20.) Von dem vorhin erwähnten Winkel soll nun nachgewiesen werden, dass er den Winkel beider Ebenen misst. — Vor Allem folgende Betrachtung: Es sei $(P_1 Q_1)$ die eine, $(M_1 N_1)$ die andere Ebene, die sich nach $M_1 Q_1$ schneiden. Zieht man nun $A_1 B_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $M_1 N_1$, dann $A_1 C_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $Q_1 P_1$, so bleibt dieser Winkel $B_1 A_1 C_1$ bei derselben Neigung beider Ebenen unveränderlich (nach §. 40.). Theilt man nun diesen Winkel in gleiche Theile, und denkt sich durch jede dieser Theilungslinien und $M_1 Q_1$ eine Ebene gelegt, so wird der Winkel beider Ebenen in ebenso viele Theile getheilt, als in wie viele der $\angle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde. Diese Theile müssen aber auch einander kongruent sein; denn sind $\angle b_1 A_1 C_1$, $\angle a_1 A_1 b_1$, $\angle a_1 A_1 B_1$ drei gleiche Theile, in welche $\angle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde, und man legt z. B. die Ebene, welche durch $b_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ gedacht werden kann, auf die Ebene, welche man durch $a_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ legen kann, so muss, weil $\angle a_1 A_1 b_1 = \angle a_1 A_1 B_1$ ist, auch $a_1 A_1$ auf $A_1 B_1$ zu liegen kommen, also auch die Ebene, die durch $a_1 A_1$ und $Q_1 M_1$ gedacht wird, mit Ebene $B_1 A_1 M_1$ zusammenfallen nach §. 10. Aus diesem Grunde müssen also die Theile, in welche der Winkel beider Ebenen getheilt wurde so in einander gebracht werden können, dass sie sich decken, also müssen dieselben einander gleich sein. —

§. 42.

(Fig. 20). Hat man nun zwei Winkel, von welchen der eine die Neigung von $P_1 Q_1$ und $M_1 N_1$, der andere die Neigung von $Q_2 P_2$ und $M_2 N_2$ angibt, und man zieht auch $\angle B_2 A_2 C_2$ so, dass $A_2 B_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $M_2 N_2$, und $A_2 C_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $Q_2 P_2$ ist, so kann

1. $\angle B_1 A_1 C_1$ kommensurabel mit $B_2 A_2 C_2$ sein.
2. $\angle B_1 A_1 C_1$ inkommensurabel gegen $\angle B_2 A_2 C_2$.

Ad 1. Haben diese Winkel ein gemeinschaftliches Maass, das m mal im $\angle B_1 A_1 C_1$, und n mal im $\angle B_2 A_2 C_2$ enthalten ist, wobei m und n ganze Zahlen bedeuten, so ist, weil $\angle B_1 A_1 C_1 = m \,.\, p$, $\angle B_2 A_2 C_2 = n \,.\, p$, auch

$\angle B_1 A_1 C_1 : \angle B_2 A_2 C_2 = m : n$

Trägt man nun den $\angle p$ auf $\angle B_1 A_1 C_1$ sowohl, als auf $\angle B_2 A_2 C_2$ so oft, als diess möglich ist, nämlich m mal auf ersteren und n mal auf letzteren, und legt durch jede Theilungslinie des $\angle B_1 A_1 C_1$ und $M_1 Q_1$ eine Ebene, so wird $\angle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) bildet in so viele gleiche Winkel getheilt, als m angezeigt, und ist daher ein solcher Theil P, so wird $\angle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) $= m \,.\, P$. Legt

man ebenso durch $P_2 M_2$ und jede der Theilungslinien des $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ eine Ebene, so wird $\sphericalangle$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) in n gleiche Theile getheilt (§. 41.), von welchen ein Theil P sein muss, so dass man hat

$\sphericalangle$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) = n . P,

daher

$\sphericalangle$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_2 N_2$) : $\sphericalangle$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) = m : n,

also auch

$\sphericalangle$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_1 N_1$) : $\sphericalangle$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) = $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$: $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$

Es verhalten sich also die Winkel, welche Ebenen bilden ebenso zu einander, wie sich die Linienwinkel verhalten, welche man nach §. 40. erhält, wenn diese Linienwinkel kommensurabel sind.

Ad 2. Sind $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ und $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ inkommensurabel, so muss jene Proportion doch statt finden. Denn wäre

$\sphericalangle$ (Ebene $P_1 Q_1$, $M_1 N_1$) : $\sphericalangle$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) = $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$: einem Winkel, der > oder < als $B_2 A_2 C_2$ ist, z. B. $\sphericalangle$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) : $\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) = $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$: $\sphericalangle q A_2 C_2$, wobei $q A_2 C_2$ ein Theil von $B_2 A_2 C_2$ ist; so kann man durch fortgesetztes Halbiren $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ in so viele gleiche Theile theilen, dass ein solcher Theil kleiner, als $\sphericalangle B_2 A_2 q$ wird. Trägt man einen solchen Theil auf $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ so oft, dass eine Theilungslinie einmal zwischen $B_2 A_2$ und $A_2 q$ fällt, z. B. auf $A_2 m$, legt durch $m A_2$ und $M_2 Q_2$ eine Ebene, so muss $\sphericalangle$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $M_2 m$) = $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$: $\sphericalangle m A_2 C_2$

Es müsste daher auch

$\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) : $\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $M_2 m$) = $\sphericalangle q A_2 C_2$: $\sphericalangle m A_2 C_2$

was ungereimt ist, mithin muss

$\sphericalangle$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) = $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$: $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$

Es folgt also: Dass sich der Winkel zweier Ebenen zum Winkel zweier anderer Ebenen verhält, wie sich ihre Linienwinkel zu einander verhalten, die man nach §. 40. erhält. —

§. 43.

(Fig. 20.) Man hat also aus der letzten Proportion des vor. §., $\sphericalangle$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) = $\sphericalangle B_2 A_2 C_2 \times \sphericalangle$ (Ebene $M_1 N_1$, $Q_1 P_1$), wenn $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ Winkeleinheit für $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$, und $\sphericalangle$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) Einheit für Winkel zweier Ebenen wäre. Hieraus folgt also der Satz:

Der Winkel, unter dem zwei Ebenen gegen einander geneigt sind, wird gemessen durch einen Winkel, den man erhält, wenn man von einem beliebig in der Communsektion angenommenen Punkte zwei Senkrechte auf diese zieht, von welchen die eine in der ersten Ebene, die andere in der zweiten Ebene liegt. Der Winkel, den diese zwei Senkrechten bilden kann mithin Neigungswinkel beider Ebenen genannt werden. —

§. 44.

Von zwei Ebenen sagt man, dass sie auf einander senkrecht sind, wenn ihr Neigungswinkel ein Rechter ist. — Ferner geht aus dem vor. §. hervor, dass wenn eine Ebene eine andere schneidet, ihre Nebenwinkel in Summe zwei Rechte ausmachen und ihre Scheitelwinkel einander gleich sein müssen, weil diese Sätze für ihre Neigungswinkel, nämlich für ihre Maasse statt finden. —

§. 45.

(Fig 21.) M N sei eine beliebige Ebene, A B eine auf dieser Ebene senkrechte Gerade. Legt man durch A B eine beliebige Ebene P Q, deren Durchschnitt mit Ebene M N die Gerade B P sei, so wird A B senkrecht auf B P stehen. Zieht man ferner B C in Ebene M N senkrecht auf B P, so wird nach §. 43., $\sphericalangle$ A B C der Neigungswinkel für Ebene M N und Ebene P Q sein. Es ist aber A B senkrecht auf Ebene M N, also senkrecht auf A C, mithin $\sphericalangle$ A B C ein Rechter; folglich ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N. Steht also eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, und man legt durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so wird diese auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen. —

Anmerk. Soll daher durch eine Gerade eine Ebene gezogen werden, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene ist, so ziehe man von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die Ebene, lege durch letztere und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird diese die verlangte sein. —

§. 46.

(Fig. 21.) Ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N, der Durchschnitt beider Ebenen die Gerade B P, und man zieht von einem beliebigen Punkte B dieser Communsektion die Gerade B A senkrecht auf B P in Ebene P Q, so muss B A auch senkrecht auf Ebene M N sein. Denn zieht man B C senkrecht auf B P in Ebene M N, so muss nach §. 44. der

$\angle$ A B C = R sein. Nun ist aber $\angle$ A B P schon ein Rechter, und mithin ist nach §. 12. auch A B senkrecht auf Ebene M N. Da es gleichgültig ist, ob man von B aus oder von einem beliebigen in der Ebene P Q liegenden Punkte die Senkrechte A B zieht, so können wir diesen Satz auch wie folgt, aussprechen:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer zweiten, und man nimmt in der ersteren einen beliebigen Punkt an, fällt von diesem auf die Communsektion beider Ebenen eine Senkrechte, so muss letztere auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

§. 47.

(Fig. 21.) Ist wieder angenommen, dass Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N steht, und man zieht von einem Punkte B ihrer Communsektion die Gerade B A senkrecht auf Ebene M N, so wird diess die einzige von B aus auf Ebene M N mögliche Senkrechte (§. 15.) sein. Wenn man aber von B aus auf B P in Ebene P Q eine Senkrechte zieht, so muss diese nach §. 46. auch auf Ebene M A senkrecht stehen; folglich fällt diese Senkrechte mit der angenommenen B A zusammen, woraus folgender Satz hervorgeht:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, und man zieht von einem beliebigen Punkte ihrer Communsektion eine Senkrechte auf die zweite Ebene, so muss diese Senkrechte in der ersten Ebene liegen.

§. 48.

(Fig. 22.) Steht die Ebene P Q sowohl, als auch die Ebene R S senkrecht auf der Ebene M N, so muss der Durchschnitt der beiden ersten Ebenen, nämlich A B, auch senkrecht auf der dritten Ebene stehen. Ist B der Punkt, den die drei Ebenen gemeinschaftlich haben, und man zieht von diesem eine Senkrechte auf Ebene M N, so muss diese Senkrechte nach §. 47. in jeder der beiden andern Ebenen liegen; folglich der Durchschnitt dieser beiden ersten Ebenen sein.

Stehen also zwei Ebenen senkrecht auf einer dritten, so muss auch die Communsektion jener Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene stehen.

§. 49.

(Fig. 23.) Hat man drei Gerade, von welchen je zwei unter rechten Winkeln gegen einander geneigt sind, und man legt durch je zwei derselben eine Ebene, so muss (nach §. 12.) eine jede dieser Geraden senkrecht auf der Ebene der beiden andern sein. Jede dieser Ebenen muss aber auch (nach §. 45.) senkrecht auf den beiden andern sein. Solche drei Ebenen werden uns später unter dem Namen rechtwinklige Corrdinatenebenen oder Projektionstafeln vorkommen; die Geraden A B, B C, B D, durch welche die Ebenen gelegt werden, oder welche die Durchschnittslinien derselben sind, werden dann Corrdinatenaxen oder Axen genannt. —

§. 50.

(Fig. 26.) Für den Neigungswinkel zweier Ebenen M N und P Q können noch folgende Sätze angeführt werden:

1. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Communsektion zweier Ebenen auf dieselbe eine Ebene senkrecht, so schneidet letzere die beiden gegebenen Ebenen nach Geraden, welche auf der Communsektion senkrecht sein müssen (nach §. 12.), und die nach Annahme durch den gegebenen Punkt gehen; folglich werden dieselben den Neigungswinkel beider Ebenen bilden. —
2. Zieht man von einem zwischen beiden Ebenen liegenden Punkte aus auf jede der beiden Ebenen eine Senkrechte, so werden diese beiden Senkrechten unter sich einen Winkel bilden, der den Neigungswinkel beider Ebenen zu zwei Rechten ergänzt.

Ist nämlich D der angenommene Punkt, D A senkrecht auf Ebene M N, D B senkrecht auf Ebene P Q, und man denkt sich nun durch D A und D B eine Ebene gelegt, so muss diese die Gerade P M (nach §. 5.) in einem Punkte schneiden, welches hier der Punkt C sein soll. Trifft nun die eine Senkrechte D A die Ebene M N in A, die andere D B die Ebene P Q in B, und man zieht die Geraden A C und C B, so werden diese den Communsektionen der Hülfsebene und der beiden gegebenen Ebenen angehören, so dass also das Viereck C A M B ganz und gar in der Hülfsebene liegt. Nun muss aber nach §. 7. $\angle$ M A C gleich $\angle$ M B C = R sein, mithin $\angle$ A C B + $\angle$ A M B = 2 R. Da aber $\angle$ A C B (nach §. 43.) der Neigungswinkel der Ebenen M N und P Q ist, so ergänzt der $\angle$ A M B, nämlich der Winkel beider Senkrechten den Winkel beider Ebenen zu zwei Rechten. —

§. 51.

(Fig. 25.) L_1 und L_2 seien zwei Gerade, die weder parallel sind, noch sich schneiden, so weit

man sie auch verlängern mag. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_2 eine Gerade $'L_1$ parallel zu L_1, ferner durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_1 eine Parallele $'L_2$ zu L_2, legt durch L_1 und $'L_2$ eine Ebene E_1, durch $'L_1$ und L_2 eine Ebene E_2, so wird nach §. 29., E_1 parallel zu L_2 und E_2 parallel zu L_1 sein müssen.

Man kann also durch jede von zwei sich nicht schneidenden und auch nicht parallelen Geraden eine Ebene legen, die parallel zur andern ist. —

§. 52.

(Fig. 25.) Legt man durch einen beliebigen Punkt und L_1 eine Ebene, sodann durch denselben Punkt und L_2 eine Ebene, so müssen diese beiden Ebenen sich schneiden nach einer Geraden C, welche mit L_1 in der ersten Ebene liegt, und mit L_2 in der zweiten Ebene, also sowohl L_1 als L_2 schneiden muss. Hieraus folgt also:

1. Man kann zwei in verschiedenen Ebenen liegende Gerade durch eine dritte schneiden, welche durch einen gegebenen Punkt geht. Daher kann man auch
2. drei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade, durch eine und dieselbe Gerade schneiden, oder es gibt eine Gerade, welche diese drei Gerade zugleich trifft.

§. 53.

(Fig. 24.) AB und CD seien zwei in verschiedenen Ebenen befindliche und sich nicht schneidende Gerade. Legt man durch CD eine Ebene MN, welche parallel ist zu AB (nach §. 50.), zieht sodann von einem beliebigen Punkte E der Geraden AB eine Senkrechte auf Ebene MN, so wird diese Senkrechte EF die kürzeste Entfernung der Geraden AB von Ebene MN, und mithin nach §. 30. so gross sein, als eine Senkrechte, die von einem andern Punkte 'E auf Ebene MN gezogen wird. Rückt man aber die Senkrechte EF an der Geraden AB so lange fort, bis sie (senkrecht auf Ebene MN bleibend) die Gerade CD in 'F trifft, so wird sie in dieser Lage senkrecht auf CD sein (nach §. 7.), und aus demselben Grunde senkrecht auf A″B″, die durch F′ parallel zu AB gezogen werden kann. Diese Gerade 'E'F wird also auch senkrecht auf AB sein (nach ebener Geometrie), und mithin die Eigenschaft haben, senkrecht auf den beiden Geraden AB und CD zu sein, woraus also folgt:

1. Für zwei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade gibt es einen Ort, an welchem eine dritte Gerade auf beiden zugleich senkrecht ist.
2. Die Entfernung dieser beiden Punkte, deren Verbindungslinie senkrecht auf beiden Geraden steht, ist die kürzeste Entfernung beider Geraden.

§. 54.

(Fig. 27.) $\angle$ AEB, $\angle$ BEC und $\angle$ AEC sollen in verschiedenen Ebenen liegen, einen gemeinschaftlichen Scheitel E, und je zwei derselben auch einen gemeinschaftlichen Schenkel haben; so wird der durch die Ebene dieser drei Winkel eingehüllte körperliche Raum ein körperliches, dreiseitiges Eck genannt, dessen Scheitel E ist. Von diesem dreiseitigen körperlichen Eck lässt sich zeigen, dass je zwei der Winkel, die dasselbe bilden, in Summe grösser sein müssen, als der dritte. —

Sind die drei Winkel einander gleich, so ist jedenfalls die Summe zweier grösser, als der dritte; folglich ist nur der Fall zu erwähnen, in welchem die drei Winkel ungleich, also einer grösser, als jeder der beiden anderen Winkel ist. Ist diess der Winkel AEC, so schneide man von demselben ein Stück DEC ab, das gleich BEC ist, macht DE = BE, zieht in den Ebenen AEC, AEB und BEC die Hülfslinien ADC, AB und BC, so muss DC = BC sein (weil $\triangle$ DEC $\cong$ $\triangle$ BEC ist). Es ist nun AB + BC > AD + DC oder AB > AD, und da ferner AE des $\triangle$ AEB = AE des $\triangle$ AED, BE = DE ist, so muss $\angle$ AEB grösser als $\angle$ AED sein.

Mithin ist $\angle$ AEB + $\angle$ BEC grösser als $\angle$ AED + $\angle$ DEC oder

$\angle$ AEB + $\angle$ BEC grösser als $\angle$ AEC, was nachzuweisen war. —

§. 55.

(Fig. 28.) Es seien die $\angle$ AMB, $\angle$ BMC, $\angle$ DMC, $\angle$ EMD und $\angle$ AME gegeben, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel M haben, und einen körperlichen Raum umschliessen; so wird dieser körperliche Raum ein vielseitiges Eck genannt, dessen Seiten die genannten Winkel sind. Schneidet man nun alle diese Winkel durch eine Ebene ab, welche dieselben nach den Geraden AB, BC, CD, DE und EA schneidet, so bilden diese letzteren Geraden ein Vieleck von so vielen Seiten, als von wie vielen Winkeln das körperliche Eck M gebildet wird. Nimmt man daher in dem Vielecke ABCDE den Punkt N an, und zieht von diesem aus nach allen Scheiteln Gerade, nämlich NA, NB etc. etc., so liegen um N herum, ebenso viele Dreiecke, als wie viele das körperli-

che Eck bei M umhüllen. Die Summe der Winkel derjenigen Dreiecke, in welche das Vieleck getheilt ist, muss mithin ebenso gross sein, als die Summe der Winkel derjenigen, welche das Eck bei M umschliessen. Es ist aber nach vor. §.: $\angle MAB + \angle MAE$ grösser als $\angle BAN + \angle NAE$, $\angle MEA + \angle MFD$ grösser als $\angle AEN + \angle NED$, $\angle MDE + \angle MDC$ grösser als $\angle NDC + \angle NDE$, $\angle MCB + \angle MCD$ grösser als $\angle BCD$, $\angle MBC + MBA$ grösser als $\angle ABC$, folglich müssen die Winkel, welche um N herum liegen in Summe mehr ausmachen, als diejenigen der Dreiecke ABM, MBC, DCM etc. etc., die den gemeinschaftlichen Scheitel M haben. Die aufeinanderfolgenden Winkel aber, deren gemeinschaftlicher Scheitel N ist, betragen in Summe 4 R, und mithin ist die Summe aller Winkel, welche das körperliche Eck bei M bilden, kleiner als vier Rechte.

§. 56.

Aus dem vorigen Satze folgt:

1. Aus regelmässigen Dreiecken kann man noch ein körperliches Eck bilden, wenn fünf einen gemeinschaftlichen Scheitel, und immer zwei auf einanderfolgende eine gemeinschaftliche Seite haben; denn $5 \times 60° = 300° < 4R$. Man kann mithin dreierlei körperliche Ecke aus regelmässigen Dreiecken bilden, nämlich ein körperliches Eck aus drei, eines aus vier regelmässigen Dreiecken und endlich ein körperliches Eck aus fünf regelmässigen Dreiecken.
2. Drei regelmässige Vierecke können noch ein körperliches Eck bilden, weil die Summe dreier solcher zusummenstossender Winkel nur 3 R ist. —
3. Da in einem regelmässigen Fünfecke ein Winkel $\frac{6}{5}$ R ist, und drei dieser Winkel ein körperliches Eck bilden können, so kann man aus drei regelmässigen Fünfecken ein körperliches Eck bilden. —

Anmerk. Aus regelmässigen Sechsecken, Siebenecken etc. etc. kann kein körperliches Eck mehr gebildet werden. —

Zweite Abtheilung.

Zweites Kapitel.

Principien der geometrischen Projectionslehre.

§. 57.

(Fig. 28.) Es seien drei sich schneidende Ebenen gegeben, die beliebige Neigungswinkel haben, die Durchschnitte derselben seien durch X, Y, Z, die eine dieser Ebenen sei durch (XY), die zweite durch (XZ), die dritte mit (YZ) bezeichnet, und endlich der allen dreien gemeinschaftliche Punkt sei O. Diese Ebenen kann man sich ausgedehnt denken, so weit man will, so dass jede darzustellende Grösse innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen oder ihrer Verlängerungen sich befindet. Der Ort, in welchem sie angenommen werden, richtet sich nach der Lage des darzustellenden Gegenstandes. — Nimmt man nun innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen einen Punkt an, denkt sich von diesem aus parallel zu den Durchschnitten X, Y, Z Gerade gezogen, und diese so weit verlängert, bis sie die Ebenen treffen, so reichen diese Durchgangspunkte oder die vom Punkte aus gezogenen Geraden hin, die Lage des Punktes im Raume wieder bestimmen zu können.

§. 58.

(Fig. 28.) Die vom gegebenen Punkte aus gezogenen Parallelen seien x, y, z, von welchen $x \neq X$ zwischen dem gegebenen Punkte und der Ebene (YZ), $z \neq Z$ zwischen dem Punkte und Ebene (XZ), $z \neq Z$ zwischen dem gegebenen Punkte und Ebene (XY) liegt; der Durchgangspunkt von z mit Ebene (XY) sei a, der von y mit Ebene (XZ) sei a', der Durchgangspunkt von x mit (YZ) sei a''. Wenn man nun von O aus auf X die Gerade $Ob = x$ aufträgt, von dem hiedurch erhaltenen Endpunkte b parallel zu Ebene (YZ) eine Ebene legt; sodann von O aus auf OY die Gerade $Ob'' = y$ trägt, und von b'' aus parallel zur Ebene (XZ) eine Ebene legt; endlich von O aus auf Z die Gerade $Ob' = z$ trägt, und von b' aus parallel zur Ebene (XY) eine Ebene zieht; so werden diese drei Ebenen einen gemeinschaftlichen Punkt haben, welcher der vorhin angegebene sein muss. Es ist also ein Punkt durch die Geraden x, y, z, bestimmt, wenn dabei noch angegeben ist, wie man dieselben auf die Durchschnitte X, Y, Z tragen soll: ob nämlich von O aus auf diese Durchschnitte selbst, oder auf ihre Verlängerungen.

§. 59.

(Fig. 28.) Wären aber die drei Punkte 'a, "a und a gegeben, so reichen diese jedenfalls aus, den zugehörigen Punkt im Raume wieder zu bestimmen, wenn man gewiss ist, dass a, a', a'' die Durchgangspunkte der Geraden x, y, z mit den Ebenen (YZ), (XZ), (XY) sind. Denkt man sich nämlich durch a' eine Parallele zur Y, durch a'' eine Parallele zur X gezogen, so müssen diese — weil durch einen und denselben Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden gezogen werden kann, und diese schon in den Parallelen liegen, die man vom gegebenen Punkte parallel zu X und Y gezogen hat — sich schneiden, und ihr Durchschnittspunkt ist der angegebene Punkt. Auf gleiche Weise könnte man vermittelst a' and a, und ebenso vermittelst a und a'' den Punkt im Raume wieder angeben. — Man ersieht hieraus,

dass wenn die drei Punkte a, a', a'' die Durchgangspuncte der x, y, z, mit den Ebenen (XY), (XZ), (YZ) sind, schon zwei derselben hinreichen, um die Lage des Punktes im Raume aus denselben wieder zu bestimmen. Man dürfte nur durch einen dieser zwei Punkte eine Ebene parallel zur dritten legen, so muss diese den zweiten Punkt enthalten; in dieser Ebene sodann von jedem der beiden Punkte aus parallele Gerade zu den Durchschnitten der dritten Ebene mit den Ebenen, in welchen die zwei Punkte liegen, ziehen, so muss der Durchschnitt dieser beiden Parallelen der gesuchte Punkt im Raume sein. —

§. 60.

Wenn man diese beliebige Lage der Ebenen beibehalten wollte, so müsste man,

1. um aus den Parallelen x, y, z, die Lage des Punktes im Raume genau bestimmen zu können, noch ein Merkmal angeben, durch welches man erkennt, ob dieselben bei der Bestimmung der Lage des Punktes im Raume auf X, Y, Z selbst oder auf ihre Verlängerungen aufgetragen werden müssen; —
2. ein Merkmal bezeichnen, um aus den Durch-

schnitten a, a′, a″ ersehen zu können, ob sich der Punkt innerhalb des Raumes der Ebenen (XY), (XZ), (YZ) befindet, oder innerhalb des Raumes, der von ihren Verlängerungen gebildet wird. —

§. 61.

(Fig. 29.) Wir wollen nun die Ebenen, auf welche wir einen Punkt bezogen haben, Coordinatenebenen oder Projektionstafeln, ihre Durchschnitte die Coordinatenaxen oder Axen und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt den Anfangspunkt der Coordinaten nennen. Die von einem Punkte aus parallel zu den Coordinatenaxen gezogenen Geraden werden projicirende Linien des Punktes, und ihre Durchschnitte mit den Tafeln Projektionen des Punktes genannt. Denkt man sich nun durch die projicirende Linien y und z eine Ebene gelegt, so wird diese nach §. 36. parallel mit (YZ), und folglich auch ihre Communsektion C_1 mit (XZ) nach §. 29., parallel zur Axe Z, und ihre Communsektion C_2 mit (XY), parallel Y sein. Es muss mithin nach §. 28. auch C_1 parallel mit z, und C_2 parallel mit y sein, und da nach §. 5. die Axe X von der Ebene, die durch (xz) gelegt wurde, nur in einem Punkte getroffen wird, so bilden die vier Gerade z, y, C_1 und C_2 ein Parallelogramm, in welchem $C_1 = z$ und $C_2 = y$ ist. Zieht man also von ′a aus parallel zur Axe Z eine Gerade bis zur Axe X, so ist diese gleich der z, und zieht man parallel zur Y von a aus eine Gerade bis zur X, so ist diese gleich y und beide Gerade müssen in einem Punkte der X zusammentreffen, wenn a und a′ die Projektionen eines einzigen Punktes sein sollen. Analog wird jetzt auch die von a aus in (XY) parallel zur X bis Y gezogene Gerade gleich x, die von ″a parallel zur Z bis Y gezogene Gerade gleich z sein, und mit der in (XY) zur X parallel gezogenen Geraden in einem Punkte der Y zusammentreffen. Ebenso wird endlich die von ′a parallel zur Axe X bis Z gezogene Gerade gleich x, und die von ″a aus parallel zur Y bis Z gezogene Gerade gleich y sein, beide Gerade aber in einem Punkte der Z zusammentreffen. Nennen wir die von den Projektionen des Punktes parallel zu den Axen gezogenen Geraden die Coordinaten des Punktes, so ersieht man leicht folgende Sätze:

1. Die in der Ebene (XY) gezogenen Coordinaten sind gleich und parallel den projicirenden Linien y und z, die in der Ebene (XZ) liegenden Coordinaten des Punktes sind gleich und parallel den projicirenden Linien x und z, und endlich die in Ebene (YZ) liegenden Coordinaten des Punktes, sind einzeln gleich und parallel den projicirenden Linien y und z.
2. Zwei der Projektionstafeln haben eine der Coordinaten gemeinschaftlich.
3. Jede der Coordinaten hat dieselbe Richtung in Bezug auf die Axen, als die projicirende Linie, mit welcher sie parallel ist.
4. Die zwei nicht gemeinschaftlichen Coordinaten zweier Tafeln treffen in einem Punkte der Axe dieser Tafeln zusammen.
5. Werden die drei Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet (aufgeklappt), so kommen die Axen Y und Z nach §. 23. in eine Gerade zu liegen, wenn man die Ebene (YZ) in die Verlängerung der Ebene (XY) bringt, während die in (XZ) und (YZ) liegenden Coordinaten, welche parallel zu Z und Y sind, nun eine einzige Gerade bilden, welche parallel zur Z ist; die in (XZ) und (YZ) liegenden Coordinaten, die parallel zu den Axen X und Z sind, kommen in eine Gerade zu liegen, die parallel zur X ist. —

§. 62.

In §. 60. wurde schon erwähnt, dass zur Bestimmung der Lage eines Punktes durch seine projicirende Linien oder durch seine Projektionen Merkmale nothwendig sind, die uns noch den Raum deutlich bezeichnen, innerhalb welchem sich der Punkt befindet. Setzen wir deshalb den projicirenden Linien, welche auf der Seite der Axen selbst liegen, das Zeichen (+) vor, so werden die mit diesen projicirenden Linien parallelen Coordinaten dasselbe Zeichen haben, und die mit den rückwärtigen Verlängerungen der Axen parallelen projicirenden Linien und Coordinaten das Zeichen (—) bekommen. Ferner werden die Projektionen eines Punktes, der innerhalb des Raumes der drei Tafeln selbst sich befindet, auf diese Tafeln zu liegen kommen, während nicht alle drei Projektionen eines andern Punktes auf die Tafeln selbst zu liegen kommen müssen, sondern auf ihre Verlängerungen zu liegen kommen können. Denkt man sich nämlich die Ebene (XY) rückwärts über X hinaus verlängert, bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung durch (XY′), und nimmt nun innerhalb des Raumes der Ebenen (XZ) und (XY′) einen Punkt an, so wird seine Projektion für die Ebene (XY) auf (XY′) fallen, und in (XZ) zu liegen kommen, wenn man die Tafeln auf eine Ebene ausbreitet. Seine Coordinaten in (XY′) liegen nun in (XZ), die mit y parallele Ordinate hat das Zeichen (—), die mit x parallele das Zeichen (+) vor sich, und sonst bleibt Alles, wie vorher. — Denkt man sich ferner Ebene (XZ) unterhalb (X)

verlängert, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung mit (X Z'), verlängert ferner Ebene (Y Z) unterhalb (Y) und gegen Z hinaus, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung von (Y Z) mit (Y' Z'), nimmt sodann innerhalb des Raumes der Ebenen (X Y'), (X Z') und (Y' Z') einen Punkt an, so wird seine Projektion für (X Y) auf (X Y'), seine Projektion für (X Z) auf (X Z') und seine Projektion für (Y Z) in (Y' Z') liegen. Breitet man die Tafeln wie vorhin auf eine Ebene aus, so wird die Projektion des Punktes für (X Y) in (X Z), die Projektion für (X Z) in (X Y), und endlich die Projektion für (Y Z) in (X' Z) zu liegen kommen, während die Coordinaten, welche mit Y und Z parallel sind, das Zeichen (—) haben, die Abscisse aber, welche mit X parallel ist, das Zeichen (+) hat. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung von (Y Z) unterhalb Z mit (Y Z'), und nimmt innerhalb des Raumes der Ebenen (Y Z'), (X Z') und (X Y) einen Punkt an, so werden seine Projektionen für diese drei Tafeln in (X Y) zu liegen kommen; seine Coordinaten, die parallel zu (X) und (Y) gehen, werden das Zeichen (+) haben, die mit Z parallele Ordinate aber wird das Zeichen (—) haben. Nimmt man die Lage des Punktes auch auf der andern Seite der Ebene (Y Z) an, so werden seine Projektionen für die Tafeln ebenso ermittelt werden können, wie diess im Obigen geschehen ist. Bei einer beliebigen Lage des Punktes kann man also aus seinen Projektionen sowohl, als aus seinen Coordinaten wieder auf die Lage zurückkommen. —

Anmerk. Es wäre nun leicht, auch die Lage eines Systems von Punkten durch ihre Projektionen oder durch ihre Coordinaten anzugeben. Da ferner die einzelnen Punkte dieses Systems durch Gerade verbunden gedacht werden können, und leicht nachgewiesen werden könnte, dass wenn ein Punkt in einer Geraden sich befindet, auch die Projektionen des Punktes in den Projektionen der Geraden liegen müssen; so kann man durch Wiederholung des im vor. §. gegebenen Verfahrens auch die Lage eines Polygons und die eines Polyeders bestimmen. —

§. 63.

Die bisher beliebig angenommene Lage der Projektionstafeln ist im Allgemeinen die unbequemste, weshalb nun eine bequemere Lage dieser Tafeln angenommen werden soll: die Tafeln seien nun unter rechten Winkeln gegen einander gestellt; so dass ihre Communsektionen ein rechtwinkliges Coordinatensystem bilden. Die Ebene der (X Y) können wir horizontal legen, und horizontale Projektionstafel, horizontale Tafel, die Ebene (X Z) erste vertikale Tafel, und die Ebene (Y Z) zweite vertikale Tafel nennen. Ebenso sollen die Projektionen eines Punktes für diese Tafeln, horizontale, vertikale und zweit-vertikale Projektionen, ferner die von der vertikalen Projektion aus parallel zu Z gezogene Ordinate vertikale Ordinate, die von der vertikalen Projektion parallel zu X gezogene Gerade Abscisse, die von der horizontalen Projektion parallel mit Y gezogene Ordinate horizontale Ordinate etc. genannt werden. — Durch diese Lage der Tafeln haben wir auch den Vortheil, dass die projicirenden Linien eines Punktes senkrecht auf den Projektionstafeln sind, und mithin die Abstände des Punktes von den Tafeln durch seine projicirende Linien angegeben werden. Die in den vorigen Paragraphen hergeleiteten Sätze werden nun nicht allein gelten, sondern einzelne derselben noch einfacher werden. Aus §. 61. folgt nämlich:

1. Die Projektion eines Punktes auf einer Ebene ist der Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten.
2. Die Coordinaten eines Punktes stehen senkrecht auf den entsprechenden Projektionsaxen.
3. Die vertikale Ordinate des Punktes ist gleich seiner horizontal projicirenden Linie, und gibt daher den Abstand des gesuchten Punktes von der horizontalen Tafel an. Ebenso gibt die von der zweit-vertikalen Projektion des Punktes aus parallel zur Z gezogene Ordinate die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel an. Die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Axe X gezogene Senkrechte oder die horizontale Ordinate des Punktes gibt die Entfernung desselben von der vertikalen Tafel an. (Fig. 30.) Ist also a' die vertikale, a die horizontale und a'' die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, und man zieht von a' auf Z die Senkrechte a' b', so ist diese die Abscisse des Punktes, une gibt seine Entfernung von der zweit-vertikalen Tafel an. Zieht man ferner von a' auf X die Senkrechte a' b, so ist diese die vertikale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der horizontalen Tafel an. Von a auf X die Senkrechte a b gezogen, so ist diese die horizontale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der vertikalen Tafel an, während die von a auf Y gezogene Senkrechte a b'' gleich a' b' ist, die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel angibt. Endlich ist die von ''a auf Y gezogene Senkrechte a'' b'' gleich der vertikalen Ordinate 'a b, und gibt mithin seine Entfernung von der horitontalen Tafel an, und die von ''a auf Z gezogene Senkrechte ''a b' ist gleich a b der horizontalen Ordinate des Punktes im Raume. —

4. (Fig 29.) Breitet man die Tafeln auf einer Ebene so aus, dass die horizontale Tafel in der unterhalb X gedachten Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, und dreht die zweit-vertikale Tafel um die Axe Z, bis sie in die Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, also die Axe Y in der Verlängerung der X liegt; so wird die horizontale Projektion des Punkes mit seiner vertikalen Projektion in einer auf der Axe X senkrechten Geraden zu liegen kommen, nämlich in a'b a, die vertikale und zweit-vertikale Projektion wird in einer auf Z senkrechten Geraden a'b'a'' liegen, und die horizontale Projektion würde mit der zweit-vertikalen Projektion in einer auf Y senkrechten Geraden liegen, wenn man die zweit-vertikale Tafel um Y drehen, und in die Verlängerung der horizontalen Tafel legen würde. Es ist zwar dieser Satz schon aus §. 61. einleuchtend; allein da derselbe so oft angewendet wird, so soll er für diese neue Lage der Tafeln näher erörtert werden. Denkt man sich nämlich durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die Axe X gelegt, so wird diese in einem Punkte b getroffen, und die Durchschnitte dieser Ebene mit der vertikalen und horizontalen Tafel, die in der Richtung b'a und b a liegen, werden nach §. 12. senkrecht auf X sein. Es ist also 'a b senkrecht auf X in der vertikalen Tafel, und mithin parallel zur Axe Z, und a b senkrecht auf X in der horizontalen Tafel, folglich parallel zur Axe Y. Zieht man nun vom Punkte im Raume auf die vertikale Tafel eine Senkrechte, so muss diese nach §. 47. in der durch den Punkt auf X senkrecht gelegten Ebene liegen, und daher b'a treffen, welches in a' geschehen soll, und a' wird die vertikale Projektion des Punktes sein. Nach §. 47. muss auch die horizontal projicirende Linie (d. h. die vom Punkte auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte) in der gedachten Ebene liegen, also b a treffen, und diess soll in a geschehen, so wird a die horizontale Projektion des Punktes sein. Es bilden nun die Linien 'ab, a b mit der horizontal und vertikal projicirenden Linie des Punktes ein Rechteck, in welchem 'a b parallel der horizontal projicirenden Linie, also auch dieser gleich, und a b der vertikal projicirenden Linie parallel, und folglich auch dieser gleich sein muss. Legt man nun die horizontale Tafel, um X dieselbe drehend, in die Verlängerung der vertikalen Tafel, so muss a'b sowohl, als auch a b während der Drehung (nach §. 23.) in der durch den Punkt im Raume auf X senkrecht gelegten Ebene bleiben; mithin wird 'a b mit b a eine einzige Gerade bilden, die senkrecht auf X steht, nachdem die beiden Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind. Auf gleiche Weise kann diess für die vertikale und zweit-vertikale Projektion des Punktes, und überhaupt für irgend zwei Projektionen eines Punktes bewieseu werden, wenn die Projektionstafeln rechte Winkel unter sich bilden. —

§. 64.

Es ist nach den Erläuterungen des vor. §. leicht zu erkennen, ob zwei Punkte, von welchen der eine in einer und der andere in einer andern Projektionstafel liegt, die Projektionen eines einzigen Punktes sind. Verbindet man nämlich beide Punkte durch eine Gerade, und es steht diese Gerade senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln, so sind die beiden Punkte die Projektionen eines Punktes im Raume; steht aber jene Verbindungslinie nicht senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln (nämlich auf der Projektionsaxe), so sind auch jene zwei Punkte nicht die Projektionen eines einzigen Punktes.

§. 65.

Es bleibt nun noch übrig, den §. 62. auch für dieses neue Coordinatensystem nochmal zu erwähnen, damit man noch aus den Projektionen oder aus den Coordinaten des Punktes, die Lage des letzteren wieder bestimmen kann. Sind nur zwei Projektionen eines Punktes gegeben, so kann man schon die Lage desselben bestimmen. (Fig. 30.) Ist nämlich a die horizontale und a' die vertikale Projektion des Punktes gegeben, und man denkt sich vom Punkte a aus eine Senkrechte auf die horizontale Tafel gezogen, und diese so lange, als b a' (seine vertikale Ordinate) gemacht, so wird, weil b a' die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel ist, der Endpunkt jener Senkrechten der gesuchte Punkt sein. Ebenso hätte man aus der vertikalen Projektion des Punktes und seiner horizontalen Ordinate denselben bestimmen können; indem man von a' aus auf die vertikale Tafel eine Senkrechte gezogen hätte, und diese so lang gemacht, als seine horizontale Ordinate angibt. Wir wollen daher vorläufig bloss zwei Projektionen des Punktes, z. B. die horizontale und vertikale betrachten, und dann erst auf seine zweit-vertikale Projektion Rücksicht nehmen.*) Denken

*) Aus diesem Grunde werden wir auch immer einen Punkt dadurch angeben, dass wir seine horizontale und seine vertikale Projektion bestimmen, und wollen unter a'a auch einen Punkt im Raume verstehen, dessen Projektioueu a, 'a sind.

wir uns die horizontale Tafel vor der Axe der X und hinter derselben, die vertikale Tafel oberhalb der Axe der X und unterhalb derselben so weit verlängert, als es in irgend einem Falle nothwendig wird: so kann der Punkt in Bezug auf diese Tafeln vier verschiedene Lagen annehmen, die hier erörtert werden sollen. Nennen wir zu diesem Zwecke den Raum, der von der horizontalen und vertikalen Tafel eingehüllt wird, ersten Quadranten; den Raum, welcher von der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und der vertikalen Tafel eingehüllt wird, den zweiten Quadranten; den Raum, welcher von den rückwärtigen Verlängerungen beider Tafeln eingehüllt wird, dritten Quadranten und endlich den Raum, welcher zwischen der horizontalen und der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt, vierten Quadranten. Liegt nun ein Punkt im ersten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf die Tafeln selbst — nicht auf ihre Verlängerungen — fallen. Klappen wir daher die vertikale Tafel auf, so werden beide Projektionen auch in die entsprechende Tafel zu liegen kommen. (Fig. 32.) Liegt ein Punkte im zweiten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel, seine vertikale Projektion auf den Theil der vertikalen Tafel, der früher durch (X Z) bezeichnet wurde. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel durch (X Y'), so ist leicht einzusehen, dass, wenn beide Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet werden, die horizontale Projektion a_2 des Punktes in die vertikale Tafel zu liegen kömmt, so dass jetzt $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate und $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate des Punktes ist. (Fig. 33.) Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf (X Y'), seine vertikale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der vertikalen Tafel, nämlich auf (X Z'); mithin werden die Projektionen a_1, a'_1 des Punktes bei Ausbreitung der Tafeln in eine Ebene in den entgegengesetzten Tafeln erscheinen, nämlich die horizontale Projektion a_1 in der vertikalen und die vertikale Projektion a'_1 in der horizontalen Tafel, wobei aber wieder $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate, $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate des Punktes sein wird. Befindet sich endlich ein Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf (X Y) fallen, also bei Ausbreitung der Tafeln auf eine Ebene beide Projektionen in der horizontalen Tafel erscheinen. Hieraus folgt also:

Ist die vertikale Tafel in die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel gelegt oder umgekehrt, so hat man folgende Merkmale für die Lage des Punktes im Raume:

1. Erscheint die horizontale Projektion in der horizontalen, die vertikale Projektion eines Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt dieser Punkt im ersten Quadranten.
2. Ist jede der Projektionen des Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt der Punkt im zweiten Quadranten.
3. Liegt die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen und seine vertikale Projektion in der horizontalen Tafel, so ist der Punkt im dritten Quadranten.
4. Ist endlich jede der beiden Projektionen in der horizontalen Tafel, so liegt der Punkt im vierten Quadranten.

§. 66.

Was die Coordinaten des Punktes betrifft, so wollen wir ihre Richtungen für einen Punkt im ersten Quadranten als positiv betrachten. Die vertikale Ordinate eines im zweiten Quadranten liegenden Punktes wird sodann positiv, seine horizontale Ordinate aber negativ sein, also ist in diesem Falle entweder die horizontale Ordinate ein Theil der vertikalen, oder letztere ein Theil der horizontalen Ordinate. Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so werden seine Coordinaten die entgegengesetzten Richtungen von denen eines Punktes im ersten Quadranten haben, also beide negativ sein. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Ordinate dieselbe Richtung, wie im ersten Quadranten haben, also positiv sein, seine vertikale Ordinate aber die entgegengesetzte von der eines im ersten Quadranten liegenden Punktes haben, mithin negativ sein.

(Fig. 32.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion eines Punktes, so ist $a_1 b_1$ seine horizontale Ordinate, $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate. Für den Punkt, der seine horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 hat, ist $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate. —

(Fig. 33.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion des Punktes so ist $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate, $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate. Für einen Punkt, dessen horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 ist, wird $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate sein.

§. 67.

(Fig. 30.) Berücksichtigen wir nun auch die zweit-vertikale Tafel, und wollen daher zuerst aus der horizontalen und vertikalen Projektion die zweit-vertikale Projektion des Punktes bestimmen. — Ist a die horizontale und a′ die vertikale Projektion eines Punktes, und man dreht die zweit-vertikale Tafel so weit um die Axe Z, bis sie links von dieser mit der vertikalen Tafel zusammenfällt, so wird nach (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes mit seiner vertikalen in der Senkrechten ′a b′ liegen müssen, die von a′ auf Z gezogen wird. Nach (§. 63, 3.) muss aber auch die zweit-vertikale Projektion des Punktes von der Axe Z so weit entfernt sein, als seine horizontale Ordinate ab angibt: trägt man daher ab von ′b auf die Verlängerung der Senkrechten a′ b′, so wird der hierdurch erhaltene Punkt a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes sein. — (Fig. 31.) Dreht man die zweit-vertikale Tafel so weit um Y, bis sie mit der horizontalen Tafel zusammenfällt, so wird (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion mit der horizontalen Projektion in der von a aus auf Y senkrecht gezogenen a b″ a″ liegen, und (nach §. 63, 3.) von Y so weit entfernt sein, als der Punkt selbst von der horizontalen Tafel entfernt ist. Trägt man daher auf die Verlängerung von a b″ von b″ aus die Gerade b″ a″ = b a′, so wird die zweit-vertikale Projektion ″a des Punktes erhalten. Es folgt hieraus das Verfahren, aus zwei Projektionen eines Punktes die dritte zu bestimmen. (Fig. 30.) Zieht man nämlich, wenn die Tafeln, wie in dieser Figur angegeben wird, in einer Ebene liegen, von der horizontalen Projektion auf Y eine Senkrechte a b″, und beschreibt von O aus mit O b″ einen Bogen, so wird dieser die neue Lage der Y in b″ treffen. Von diesem Punkte b″ aus eine Senkrechte a″ b″ = a′ b auf Y gezogen, oder die Senkrechte a′ b′ so weit verlängert, bis b″ a″ getroffen wird, gibt in a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes. (Fig. 31.) Wäre die zweit-vertikale Tafel in die horizontale Tafel gelegt worden, so würde Z nach der rückwärtigen Verlängerung von X zu liegen kommen. Man müsste nun von ′a auf Z die Senkrechte a′ b′ ziehen, und von O aus mit O b′ einen Kreisbogen beschreiben, der die neue Lage der Z in b′ schneidet, von diesem Durchschnittspunkte in der horizontalen Tafel auf Z die Senkrechte b′ a″ = a b ziehen, oder a b″ so weit verlängern, bis b′ a″ getroffen wird, so wird man in dem hierdurch erhaltenen Punkte a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten. — (Fig. 30.) Wäre die zweit-vertikale und die horizontale Projektion, nämlich a und a″ gegeben, so könnte man die vertikale Projektion durch ein ähnliches Verfahren erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion aus auf X eine Senkrechte, so muss (§. 63, 4.) in dieser auch die vertikale Projektion des Punktes liegen, und so weit von der Axe X entfernt sein, als der Punkt von der horizontalen Tafel entfernt ist, also wird die vertikale Ordinate des Punktes = a″ b″ sein; diese also von b aus auf die genannte Senkrechte in der vertikalen Tafel getragen, gibt die vertikale Projektion a′ des Punktes. Verlängert man die von a″ auf Z gezogene Senkrechte, bis sie die Senkrechte a b trifft, so erhält man die vertikale Projektion a′ als Durchschnittspunkt beider Senkrechten. (Fig. 30.) Wäre endlich die zweit-vertikale und vertikale Projektion eines Punktes gegeben, so erhält man die horizontale Projektion a entweder dadurch, dass man von a′ aus auf X die Senkrechte a′b zieht, und von b aus die Gerade ′b a″ auf a′ a trägt, oder indem man mit O b″ einen Bogen beschreibt, welcher dann die erste Lage der Axe Y in b″ treffen wird, von b″ auf Y in der horizontalen Tafel eine Senkrechte zieht, so wird in dem Durchschnittspunkte derselben mit der von a′ auf X gezogenen Senkrechten a′ b a″ die horizontale Projektion a des Punktes liegen. —

§. 68.

In dem vorigen §. wurde angenommen, dass sich der Punkt im ersten Quadranten befindet, und wurde überhaupt nicht Rücksicht auf die zweit-vertikale Tafel genommen. Wollte man auch diese berücksichtigen, so müsste man den ganzen Raum, in welchem sich ein darzustellender Punkt befinden könnte, nicht in vier, sondern in acht Theile getheilt denken, von welchen der erste von der vertikalen, horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gebildet wird; der zweite von den Theilen der vertikalen und horizontalen Tafel, die links der der zweit-vertikalen Tafel liegen und von dieser selbst, der dritte von dem Theile der vertikalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, dann von dem Theile der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, und von der rückwärtigen Verlängerung der letztern eingehüllt wird, u. s. f. Da aber die horizontale und vertikale Projektion eines Punktes immer hinreichend sind, den Punkt zu bestimmen, so brauchen wir auf die Lage des Punktes gegen die zweit-vertikale Tafel nicht Rücksicht nehmen, sondern können diese jedesmal, wenn es nothwendig ist angeben. (Fig. 32.) Ist a_2 die horizontale und a'_2 die vertikale Projektion eines Punktes, so liegt (§. 65.) der Punkt im zwei-

ten Quadranten, folglich wird bei Ausbreitung der Tafeln seine zweit-vertikale Projektion zwischen (X und Z) fallen, nach a''_2, und wird nach §. 67. erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion a_2 des Punktes eine Senkrechte auf Y, so trifft diese Senkrechte die rückwärtige Verlängerung der Y in b''_2, und in dieser Senkrechten würde (nach §. 63. 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes liegen, wenn die Tafel (Y Z) in der horizontalen Tafel liegen würde. Da aber die Tafel (Y Z) um Z gedreht und in die vertikale Tafel gelegt wurde, so fällt die rückwärtige Verlängerung von Y mit X zusammen, und daher wird auch die Gerade $a_2\ b''_2$ nun auf X senkrecht zu stehen kommen, und in der Senkrechten $b''_2\ a''_2$ liegt mithin die zweit-vertikale Projektion des Punktes. Letztere muss aber auch (§. 63. 4.) mit der vertikalen Projektion a'_2 in der Senkrechten $a'_2 b'_2$ liegen, und liegt daher in a''_2, dem Durchschnitte dieser beiden Senkrechten. Es gibt hier wieder die Gerade $a'_2 b'_2$ oder $a_2\ b''_2$ die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel an. Würde sich der Punkt links der zweit-vertikalen Tafel befinden, so würde seine horizontale Projektion sowohl, als seine vertikale Projektion zwischen (Y Z) gefallen sein, also seine zweit-vertikal projicirende Linie die entgegengesetzte Richtung von der vorigen haben. (Fig. 33.) Auch bei der Lage des Punktes im dritten Quadranten fällt die zweit-vertikale Projektion rechts von (Y Z), und zwar nach a''_1, und wird (genau nach §. 67.) erhalten, wenn man von der vertikalen Projektion a'_1 des Punktes auf die rückwärtige Verlängerung von Z eine Senkrechte $a_1 b_1$ zieht, und auf diese von b'_1 aus die Entfernung $a_1 b_1$ des Punktes von der vertikalen Tafel trägt. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten und rechts von (Y Z), so fällt seine zweit-vertikale Projektion zwischen (Y Y). Da sie (§. 63.) in der Senkrechten $a'_2 b'_2$ liegen, und von der rückwärtigen Verlängerung der Axe Z (die nach Y fällt) so weit entfernt sein muss, als $a_2\ b_2$ angibt, so darf man nur von b'_2 aus die Gerade $b'_2 a''_2 = a_2 b_2$ machen, und es wird in a''_2 die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten werden. — Für einen Punkt, der links von (Y Z) liegt, kömmt keine Aenderung in Bezug auf seine zweit-vertikale Projektion vor, aber seine horizontale und vertikale Projektion werden links von (Y Z) zu liegen kommen, also die Abscisse des Punktes, welche (nach 61.) der horizontalen und vertikalen Tafel gemeinschaftlich ist, die entgegengesetzte Richtung von der eines rechts von (Y Z) liegenden Punktes haben.

§. 69.

Es soll nun kurz wiederholt werden, wie man die Lage eines Punktes sich wieder vorstellen könnte. Deshalb seien

1. die Projektionen, und zwar horizontale und vertikale Projektion gegeben; so denke man sich die horizontale Tafel wieder um X gedreht, bis sie senkrecht auf der vertikalen Tafel ist. Ist nun die horizontale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel, wie a_1 Fig. 32 und a_2 Fig. 33. so denke man sich von derselben aus eine Senkrechte gezogen, und auf dieser oberhalb der horizontalen Tafel die Länge der vertikalen Ordinate aufgetragen, wenn letztere in der vertikalen Tafel liegt (Fig 32.); liegt aber die vertikale Ordinate des Punktes in der horizontalen Tafel, so muss man die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte unterhalb der horizontalen Tafel verlängern, und auf diese Verlängerung die vertikale Ordinate auftragen. Befindet sich aber die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen Tafel, so hat man auf diese die Senkrechte zu ziehen, und die vertikale Ordinate auf letztere zu tragen, und zwar vor derselben, wenn die vertikale Projektion des Punktes in dieser Tafel liegt, hingegen rückwärts in der Richtung der rückwärtigen Verlängerung dieser Tafel, wenn die vertikale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel liegt, oder seine vertikale Ordinate negativ ist. —

2. Sind die Coordinaten des Punktes gegeben, und man soll die Lage des Punktes durch dieselben bestimmen; so trage man die Abscisse vom Anfangspunkte O aus auf X, wenn sie positiv ist, auf die rückwärtige Verlängerung von X, wenn sie negativ ist. Vom Endpunkte der Abscisse aus ziehe man eine Senkrechte auf X, die in der vertikalen Tafel oder ihrer Verlängerung liegt, je nachdem die vertikale Ordinate positiv oder negativ ist, und mache diese Senkrechte gleich der vertikalen Ordinate, so erhält man die vertikale Projektion des Punktes. Ebenso ziehe man auch auf X eine Senkrechte, die in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, je nachdem die horizontale Ordinate positiv oder negativ ist, und mache diese Senkrechte gleich der horizontalen Ordinate; so erhält man die horizontale Projektion des Punktes, und kann also aus diesen beiden Projektionen die dritte (§. 67.), und (nach 1 dieses §.) den Punkt im Raume angeben. —

§. 70.

Liegt ein Punkt in einer der Projektionstafeln selbst, so muss jede der übrigen Projektionen in den entsprechenden Axen liegen, welche die Durchschnitte dieser Tafel mit den andern Projektionstafeln sind. (Fig. 33.) Ist z. B. a_1 ein in der horizontalen Tafel liegender Punkt, so muss seine vertikale Projektion (§. 63.) in der Senkrechten $a_1 a_1'$ liegen, und (§. 63.) von X so weit entfernt sein, als die vertikale Ordinate angibt. Da aber letztere für dieses Beispiel Null ist, so muss a'_1 selbst die vertikale Projektion sein. Ist a'_2 die vertikale Projektion eines in der vertikalen Tafel liegenden Punktes, also a'_2 der gegebene Punkt, so muss (§. 63.) seine zweit-vertikale Projection in der Senkrechten $a'_1 a''_2$ liegen, und a''_2, nämlich der Durchschnitt dieser Senkrechten mit Z sein, weil der Punkt von der vertikalen Tafel nicht entfernt, also die der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gemeinschaftliche horizontale Ordinate Null sein muss. Aus demselben Grunde wird a_2 die horizontale Projektion des Punktes a'_2 sein. Ebenso ist auch die vertikale Projektion des in der zweit-vertikalen Tafel liegenden Punktes a''_3 in a'_3 und seine horizontale Projektion in a_3. —

Will man daher, dass ein Punkt in einer der Tafeln liege, so hat man diese letztere so weit parallel mit sich selbst zu verschieben, bis sie durch den Punkt geht, und daher ihre Durchschnitte mit den beiden übrigen Tafeln so weit parallel mit sich selbst verrücken, bis sie durch die übrigen Projektionen des Punktes gehen. (Fig. 30.) Soll z. B. die horizontale Tafel durch den gegebenen Punkt gehen, so hat man nur die Axe X parallel zu ihrer ersten Lage zu verschieben, bis sie die vertikale Projektion 'a des Punktes enthält, so wird bei dieser neuen Lage der horizontalen Tafel und dem neuen Anfangspunkte O' der Punkt a in dieser Tafel enthalten sein. —

§. 71.

Bisher wurde von der Darstellung eines Punktes gesprochen, welche zuerst durch schiefe und dann durch rechtwinklige Projektionen geschah. Wenn wir von nun an von Projektion eines Punktes auf einer Ebene sprechen, so verstehen wir darunter immer den Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten. — (Fig. 35.) Ist nun eine Gerade im Raume gegeben, die dargestellt werden soll, so denke man sich durch dieselbe eine Ebene gelegt, die senkrecht auf der Projektionsebene steht, und bezeichne den Durchschnitt dieser Ebene mit der Projektionstafel. Diesen Durchschnitt nennt man P r o j e k t i o n d e r G e r a d e n, und jene Ebene, die senkrecht auf der Projektionstafel steht, wird p r o j i c i r e n d e E b e n e genannt, und zwar horizontal-, vertikal-, oder zweit-vertikal-projicirende Ebene, je nachdem man die Projection der Geraden auf der horizontalen Tafel, oder die horizontale Projektion, oder die Projektion der Geraden auf der vertikalen Tafel, nämlich die vertikale Projektion derselben, oder ihre Projektion auf der zweit-vertikalen Tafel, nämlich die zweit-vertikale Projektion der Geraden, bestimmt hat. — Hier ist a c die horizontale Projektion, a'c' die vertikale Projektion einer Geraden, und zugleich ist die zweit-vertikale Projektion ersichtlich für den Fall sowohl, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der vertikalen Tafel, als auch für den Fall, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der horizontalen Tafel niedergelegt ist. — Um die Gerade im Raume wieder angeben zu können, sind zwei Projektionen derselben hinreichend und nothwendig, wenn nicht einzelne Punkte der Geraden zu ihrer Darstellung benützt werden sollen. Ist z. B. die horizontale und vertikale Projektion einer Geraden bekannt, und man denkt sich durch die horizontale Projektion eine Ebene senkrecht auf die horizontale Tafel gelegt, so muss in dieser die Gerade enthalten sein. Letztere muss aber auch in der Ebene enthalten sein, die man durch die vertikale Projektion senkrecht auf die vertikale Tafel legt, und muss daher im Durchschnitte dieser und der vorigen Ebene enthalten sein. Auf gleiche Weise könnte man aus der vertikalen und zweit-vertikalen Projektion einer Geraden, oder aus ihrer horizontalen und zweit-vertikalen Projektion die Lage derselben im Raume bestimmen. —

§. 72.

(Fig. 35.) Es sei nun auf einer Geraden ein Punkt angegeben, der projicirt werden soll; so suche man zuerst eine Projektion der Geraden, z. B. ihre horizontale Projektion a c, indem man durch diese Gerade ihre projicirende Ebene legt. Zieht man nun die horizontal projicirende Linie des Punktes, so muss dieselbe nach §. 46. in der horizontal projicirenden Ebene der Geraden liegen; f o l g l i c h l i e g t d i e h o r i z o n t a l e P r o j e k t i o n d e s P u n k t e s i n d e r h o r i z o n t a l e n P r o j e k t i o n d e r G e r a d e n. Aus gleichem Grunde muss die vertikale Projektion des Punktes in der vertikalen Projektion und die zweit-vertikale Projektion des Punktes in der zweit-vertikalen Projektion der Geraden liegen, so dass man den Satz aussprechen kann: D i e P r o j e k t i o n e n e i n e s a u f e i n e r G e r a d e n s i c h b e f i n d e n-

den Punktes liegen in den entsprechenden Projektionen der Geraden. (Fig. 35.) Sind die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden angegeben, wie $a_1 a'_1 a''$, und man denkt sich die projicirenden Ebenen der Geraden und die projicirenden Linien des Punktes gezogen, so müssen letztere (nach §. 46.) sich in den projicirenden Ebenen der Geraden befinden, und mithin der Punkt im Raume auf der Geraden sein, so dass also auch der umgekehrte Satz wahr ist:

Liegen die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden, so muss der Punkt auf der Geraden sich befinden.

§. 73.

(Fig. 36.) Aus den im vorigen §. entwikelten Sätzen und dem §. 63. kann man folgende Folgerungen ziehen:

1. Ist eine Gerade durch ihre Projektionen $a'_1 b'_1$, $a''_1 b''_1$, $a_1 b_1$ gegeben, und man will einen Punkt durch seine Projektionen bestimmen, der auf der Geraden im Raume liegen soll, so nehme man eine seiner Projektionen, z. B. seine vertikale Projektion in a'_1 an. Zieht man nun die Senkrechten $a'_1 a_1$, $a_1 a''_1$ auf die Axen X und Z, so muss in jener die horizontale und in dieser die zweit-vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) liegen; mithin wird (nach vor. §.) in a_1, dem Durchschnitte von $a_1 a'_1$ mit $a_1 b_1$ die horizontale Projektion und in a''_1, dem Durchschnitte der Senkrechten $a'_1 a''_1$ mit $a''_1 b''_1$ die zweit-vertikale Projektion des Punktes liegen.
2. Soll eine begränzte Gerade angegeben werden, so darf man nur die Projektonen der Geraden begränzen, und es werden dann die Endpunkte der Projektionen auch die Projektionen der Endpunkte im Raume sein. —
3. Theilt man die Gerade in gleiche Theile, so werden die Projektionen der Geraden d rch die Projektionen ihrer Theilpunkte in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt. Denn denkt man sich die Theilpunkte projicirt, so werden ihre Projektionen in den Projektionen der Geraden (nach vor. §.) liegen. Zieht man nun in einer der projicirenden Ebenen, z. B. in der horizontal projicirenden Ebene vom Endpunkte der horizontalen Projektion aus zur Geraden eine Parallele gezogen, so bilden die Theile der projicirenden Linien, welche zwischen dieser Parallelen und der Projektion der Geraden liegen, mit den Theilen dieser letzteren Linie ähnliche Dreiecke, aus welchen sich ergibt, dass die Theile der Geraden sich verhalten, wie die entsprechenden Theile ihrer Projektionen. Ist also die Gerade in gleiche Theile getheilt, und man projicirt ihre Theilungspunkte, so werden die Projektionen der letzteren auch die Projektionen der Geraden in gleiche Theile theilen. —
4. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Tafel, so wird ihre Projektion in dieser Tafel ihr Fusspunkt sein, in welchen auch die Projektionen aller Punkte fallen müssen, die auf dieser Geraden liegen. —

§. 74.

(Fig. 36.) Betrachten wir nun noch einige besondere Lagen der Geraden im Raume. Es sei $a_1 b_1$ die horizontale, $a'_1 b'_1$ die vertikale, $a''_1 b''_1$ die zweit-vertikale Projektion einer begränzten Geraden; von diesen sei $a_1 b_1$ parallel zu Axe X, und $a''_1 b''_1$ parallel zur Axe Z. Da nun die horizontale Ordinate des ersten Punktes gleich der horizontalen Ordinate des zweiten Punktes, gleich der horizontalen Ordinate irgend eines Punktes der Geraden ist, und (nach §. 63, 3.) die horizontale Ordinate eines Punktes seine Entfernung von der vertikalen Tafel angibt; so müssen alle Punkte dieser Geraden gleich weit von der vertikalen Tafel entfernt sein, und mithin ist diese Gerade mit der vertikalen Tafel parallel. Wir hätten dasselbe auch aus der Entfernung $a''_1 b''_1$ der Punkte von der Axe Z entnehmen können, denn diese ist gleich den horizontalen Ordinaten der Punkte der Geraden. Es folgt also:

Ist die hori zontale Projektion einer Geraden parallel zur Axe X, so ist die zweit-vertikale Projektion der Geraden parallel mit Z, die Gerade im Raume aber parallel zur vertikalen Tafel. (Fig. 36.) Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Gerade, deren vertikale Projektion ($a'_2 b'_2$) parallel mit X ist, parallel zur horizontalen Tafel, ihre zweit-vertikale Projektion ($a''_2 b''_2$) parallel mit Y sein muss; dass ferner die Gerade, deren vertikale Projektion ($a'_1 b'_1$) parallel mit Z und deren horizontale Projektion ($c_1 b_1$) parallel mit Y ist, zur zweit-vertikalen Tafel parallel sein wird. (Fig. 38.) Ist eine Gerade parallel zur horizontalen Tafel, so muss auch ihre vertikale Projektion parallel zur Axe X sein, weil die vertikalen Ordinaten aller ihrer Punkte (§. 63.) gleich den horizontal projicirenden Linien dieser Punkte, also unter sich in

diesem Falle gleich sein müssen. Ebenso muss die horizontale Projektion einer mit der vertikalen Tafel parallelen Geraden, zur Axe X parallel, und mithin auch die zweit-vertikale Projektion mit Z parallel sein. — Wenn endlich die Gerade parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist; so muss ihre horizontale Projektion parallel zur Axe Y, ihre vertikale Projektion aber zur Axe Z parallel sein. — (Fig. 38.) Die Projektionen ($a'_1 b'_1$, $a_1 b_1$) sowohl, als auch die $({}^{z}{,}q^{z}{,}e)$ und (a_2 b_2) gehören also zu einer Geraden, die parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist.

§. 75.

(Fig. 37.) Steht eine Gerade senkrecht auf einer der Tafeln, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so gibt der Fuss der Geraden ihre horizontale Projektion in $a_1 b_1$ an, ihre vertikale Projektion $a'_1 b'_1$ sowohl, als auch ihre zweit-vertikale Projektion $a''_1 b''_1$ muss (§. 74.) parallel mit Z sein, weil die Gerade parallel mit jeder dieser beiden Tafeln ist. — Umgekehrt wird uns auch aus den Projektionen $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$; $a''_1 b''_1$ ersichtlich sein, dass die Gerade senkrecht auf der horizontalen Tafel ist; denn dieselbe muss nach vor. §. parallel mit der vertikalen Tafel sowohl, als auch mit der zweit-vertikalen Tafel sein, also senkrecht auf der horizontalen Tafel, was übrigens schon aus der horizontalen und vertikalen Projektion allein hervorgeht. — In derselben Figur ist $a'_2 b'_2$ die vertikale, $a_2 b_2$ die horizontale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden, die senkrecht auf der vertikalen Tafel steht. — Ist eine Gerade parallel mit zwei Tafeln, so muss sie senkrecht auf der dritten, also auch ihre Projektionen in den Tafeln, die ihr parallel sind, mit dem Durchschnitte dieser beiden Tafeln parallel. —

§. 76.

Sind zwei Gerade im Raume gegeben, so können dieselben entweder in einer Ebene liegen, oder nicht. Im ersten Falle, in welchem man durch beide eine Ebene legen kann, sind entweder diese Geraden unter sich parallel, oder sie schneiden sich, wenn sie genugsam verlängert werden. — Angenommen, es seien die Geraden parallel unter sich, und man sucht ihre Projektionen, so muss man zu diesem Zwecke durch jede derselben die projicirenden Ebenen legen, und es seien (Fig. 39.) die horizontalen Projektionen der Geraden $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, die vertikalen Projektionen derselben seien $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$. Betrachtet man die beiden horizontal projicirenden Ebenen der Geraden, so liegen in der einen die horizontal projicirenden Linien der Endpunkte der einen Geraden (§. 70.) und in der andern liegen die horizontal projicirenden Linien der anderen Geraden. Die horizontal projicirenden Linien aller Punkte sind aber unter sich parallel, und da hier die Geraden auch unter sich parallel angenommen wurden, so muss (§. 36.) die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein, mithin ist (nach §. 33.) auch $a_1 b_1$ parallel mit $a_2 b_2$. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass auch $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$ und endlich $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$ ist. S i n d a l s o z w e i G e r a d e i m R a u m e p a r a l l e l, s o m ü s s e n i h r e h o r i z o n t a l e n P r o j e k t i o n e n u n t e r s i c h p a r a l l e l s e i n, e b e n s o a u c h i h r e v e r t i k a l e n P r o j e k t i o n e n u n d i h r e P r o j e k t i o n e n i n d e r z w e i t - v e r t i k a l e n T a f e l. Liegen beide Gerade so, dass die durch sie gelegte Ebene eine projicirende Ebene wird, so fallen die Projektionen einer Tafel in eine einzige Gerade zusammen, die in den andern müssen aber parallel sein. Sind beide Gerade in einer Ebene, die senkrecht auf einer Axe, z. B. auf X ist, so werden die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die vertikalen Projektionen in einer einzigen Geraden liegen, die zweit-vertikalen Projektionen müssen aber unter sich parallel sein. Diese Fälle machen aber durchaus keine Ausnahme. —

Ist nun $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$, und mithin auch $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$, und man denkt sich die projicirenden Ebenen dieser Geraden gezogen, so muss, weil $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, ferner weil die horizontal projicirende Linie von a_1, parallel mit der horizontal projicirenden Linie von a_2 (§. 27.) ist, auch die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein. Ebenso kann gezeigt werden, dass die vertikal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur vertikal projicirenden Ebene der andern Geraden sein muss. Da also die zwei projicirenden Ebenen der einen Geraden einzeln parallel zu den beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden sind, so muss (§. 38.) die Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der einen Geraden parallel sein zur Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden, oder die beiden Geraden, deren horizontale Projektionen unter sich parallel sind, und deren vertikale Projektionen auch parallel unter sich sind, müssen parallel sein. — S i n d a l s o d i e h o r i z o n t a l e n P r o j e k t i o n e n z w e i e r G e r a d e n s o w o h l, a l s a u c h i h r e v e r t i k a l e n P r o j e k t i o n e n u n t e r s i c h p a r a l l e l, s o

sind die Geraden im Raume ebenfalls parallel zu einander.

§. 77.

(Fig. 40.) Sind die Projektionen zweier Geraden gegeben, und zwar $a_1 b_1$ die horizontale Projektion der einen, $a'_1 b'_1$ ihre vertikale und $a''_1 b''_1$ ihre zweit-vertikale Projektion, $a_2 b_2$ die horizontale Projektion, $a'_2 b'_2$ die vertikale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion der andern Geraden, ferner p die horizontale, p′ die vertikale und p″ die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, der sich auf beiden Geraden befindet, so müssen sich die Geraden schneiden; denn da (nach §. 63.) p, p′, p″ die Projektionen eines einzigen Punktes bedeuten, und diese Projektionen sich auf den Projektionen beider Geraden befinden, so muss der Punkt selbst (§. 72.) sich auf beiden Geraden befinden, oder beide Gerade schneiden sich. Es folgt also hieraus:

Schneiden sich die horizontalen Projektionen zweier Geraden, so wie auch ihre vertikalen Projektionen so, dass die Verbindungsgerade ihrer Durchschnittspunkte senkrecht auf der X steht; so müssen sich die Geraden im Raume schneiden.

Dasselbe würde auch statt finden, wenn sich die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die zweit-vertikalen Projektionen schneiden, und zwar so, dass die Durchschnittspunkte die Projektionen eines Punktes sind, also die Bedingungen des §. 63. erfüllen. Derselbe Satz findet auch umgekehrt statt. Schneiden sich nämlich die Geraden im Raume, so müssen die Projektionen des Durchschnittspunktes sich auf den entsprechenden Projektionen der Geraden (§. 72.) befinden, also die Projektionen einer und derselben Tafel sich entweder schneiden, oder in einer Geraden liegen. Steht nämlich die Ebene, welche durch beide Gerade gelegt werden kann, senkrecht auf einer der Projektionstafeln, so ist diese Ebene projicirende Ebene der Geraden, und es fallen dann beide Projektionen der Geraden auf dieser Tafel in eine einzige Gerade zusammen. Liegen beide Gerade so, dass die durch dieselben gelegte Ebene senkrecht auf einer Axe steht, z. B. auf der Axe X, so fallen sowohl vertikale als horizonlae Projektionen in einer einzigen Geraden, und es müssen sich dann die zweit-vertikalen Projektionen so schneiden, dass ihr Durchschnittpunkt mit der vertikalen Projektion des Durchschnittspunktes beider Geraden in einer auf Z senkrechten Geraden liegt. Es ist also zur Genüge gezeigt, wie man erkennen kann, ob durch zwei Gerade im Raume eine einzige Ebene gelegt werden kann, und ob diese Geraden parallel sind, oder sich schneiden. — Erfüllen die Projektionen zweier Geraden weder die im §. 76. festgesetzten noch die in diesem Parapraphe ausgesprochenen Bedingungen, so liegen dieselben in verschiedenen Ebenen, oder man kann keine Ebene finden, in welcher beide Gerade zugleich liegen.

§. 78.

Der im §. 72. erläuterte Satz kann auch angewendet werden, um jede Figur, die von Geraden begränzt wird, zu projiciren. So zeigt Fig. 41. die Projektionen eines Dreieckes, dessen Lage im Raume leicht durch die Projektionen $a_1 a'_1 a''_1$, $a_2 a'_2 a''_2$, $a_3 a'_3 a''_3$ seiner Scheitel angegeben werden kann, so dass also dieses Dreieck durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine vertikale Projektion $a'_1 a'_2 a'_3$, oder durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine zweit-vertikale Projektion $a''_1 a''_1 a''_3$ völlig bestimmt ist. — In Fig. 42. ist $a_1 a_2 a_3 a_4$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ die vertikale und $a''_1 a''_2 a''_3 a''_4$ die zweit-vertikale Projektion eines Viereckes, dessen Lage ebenfalls leicht durch die Projektionen seiner Scheitel angegeben werden kann. Zugleich bemerkt man, dass jede dieser Projektionen ein Parallelogramm ist, folglich müssen je zwei gegenüberstehende Seiten des Viereckes im Raume (§. 76.) unter sich parallel sein, und das projicirte Viereck ist mithin ein Parallelogramm. Ferner ersieht man hieraus, dass wenn zwei begränzte Gerade im Raume parallel und gleich sind, auch ihre zusammengehörigen Projektionen es sein müssen. — Auf dieselbe Weise könnte jede geradlinig begränzte Figur projicirt, und durch ihre Projektionen die Lage und Grösse derselben im Raume wieder angegeben werden. —

§. 79.

Nachdem die Darstellung eines Punktes, einer Geraden und einer von Geraden begränzten Figur gezeigt wurde, soll auf die Darstellung einer Ebene übergegangen werden. Dass eine Ebene durch die Projektionen dreier auf ihr liegender Punkte der Lage nach bestimmt ist, lässt keinen Zweifel übrig, weil (§. 8.) durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, die Lage der Ebene vollkommen bestimmt ist. Geht man aber auf die Erzeugung einer Ebene zurück, und benützt diese für ihre Darstellung, so wird durch die Projektionen zweier Geraden die sich in der Ebene befinden, letztere der Lage nach bestimmt sein. Man wählt als solche Gerade die Communsektionen der

Ebene mit den Projektionstafeln, weil die Projektionen jeder dieser Geraden sehr einfach werden, und nur eine ihrer Projektionen zur Bestimmung ihrer Lage nothwendig ist. Die Communsektion einer Ebene mit einer der Projektionstafeln wird *Spur* oder *Grundschnitt* genannt, und zwar nennt man die Communsektion einer Ebene mit der horizontalen Tafel ihre *horizontale Spur*, die Communsektion einer Ebene mit der vertikalen Tafel ihre *vertikale Spur*, endlich die Communsektion einer Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel die *zweit-vertikale Spur* dieser Ebene. Man nennt auch Spur einer Geraden den Durchgangspunkt der letzteren mit einer der Projektionstafeln, und zwar ihren Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel die *horizontale Spur*, ihren Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel die *vertikale Spur*, und ihren Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel die *zweit-vertikale Spur* derselben.

§. 80.

Denkt man sich nun eine Ebene im Raume gegeben, so wird ihre Lage nicht verändert, wenn man sich dieselbe so weit man will, verlängert denkt. Verlängert man daher diese Ebene, so wird sie entweder jede der Tafeln treffen, oder nicht. Trifft sie eine der Tafeln nicht, so ist sie (§. 25.) mit derselben parallel; ist dieselbe aber mit keiner der Tafeln parallel, so werden letztere von dieser Ebene (§. 13.) nach einer Geraden geschnitten. Eine jede der Axen wird (§. 5.) von einer Ebene in einem Punkte getroffen, wenn die Ebene nicht parallel zu denselben ist. — (Fig. 43.) Ist nun eine Ebene nicht parallel zu einer der Axen, also auch mit keiner der Tafeln, so muss sie die Axe der X in *einem* Punkte (A) treffen, die Axe der Y ebenfalls in *einem* Punkte (A'') und die Axe der Z in *einem* Punkte ('A). Da nun der Punkt A, in welchem die Axe X von der Ebene getroffen wird, sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Tafel angehört, so muss derselbe auch sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Spur der Ebene *zugleich* angehören, woraus also folgt, *dass horizontale und vertikale Spur einer Ebene, die mit X nicht parallel ist, in einem Punkte der Axe X sich schneiden müssen.* Es wird auch Z von der Ebene in einem Punkte "A getroffen, weshalb also *die vertikale und zweit-vertikale Spur der Ebene ebenfalls in einem Punkte von Z zusammentreffen müssen, und ebenso müssen sich die horizontale und zweit-vertikale Spur der Ebene in einem Punkte der Axe Y treffen, wenn die Ebene nicht mit Y parallel ist.*

Wird die Axe X von der horizontalen Spur nicht getroffen, so ist letztere (§. 11.) mit X parallel, und mithin (§. 29.) auch X mit der Ebene parallel, weshalb also auch die vertikale Spur (als eine in der Ebene liegende Gerade) die Axe X nicht treffen kann, also mit ihr (§. 11.) parallel sein muss. Da aber die horizontale Spur sowohl, als auch die vertikale in diesem Falle mit X parallel ist, so ist (§. 28.) auch die horizontale Spur mit der vertikalen Spur parallel. Aus diesem geht also hervor:

dass wenn die horizontale oder vertikale Spur parallel zur Axe X ist, beide sowohl unter sich parallel, als auch parallel zur Axe X sein müssen. Ebenso muss auch die vertikale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Z ist, und endlich muss die horizontale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Y ist. —

§. 81.

Sind nun zwei Spuren, und zwar horizontale und vertikale Spur einer Ebene gegeben, so kann man sich durch dieselben wieder die Lage der Ebene, zu welcher sie gehören, vorstellen. Schneiden sich nämlich *erstens* die beiden Spuren, was nach vor. §. in einem Punkte der X statt finden muss, so kann man die eine derselben, z. B. die horizontale Spur als Generatrix, und die andere als Direktrix der Ebene betrachten. Bewegt sich nun die horizontale Spur parallel zu ihrer ersten Lage, also auch (§. 29.) parallel mit der horizontalen Tafel bleibend fort, und trifft bei ihrer Bewegung stets die vertikale Spur, so wird (§. 5.) dieselbe Ebene erzeugt, welche durch ihre Spuren dargestellt ist, und es ist also diese Erzeugung ein Mittel, die Ebene im Raume vorstellen zu können. Denkt man sich aber durch beide Spuren eine Ebene gelegt, so wird letztere auch die durch ihre Spuren dargestellte Ebene sein, wodurch man sich also ebenfalls die Lage der Ebene im Raume versinnlichen kann. (Fig. 43.) Es sei E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, bringt man die Tafel in ihre erste Lage, und die Gerade E bewegt sich parallel mit sich selbst (also auch parallel mit der horizontalen Tafel) an 'E oder an "E fort, so wird der geometrische Ort dieser Erzeugenden die Ebene sein. Dieselbe Ebene wird erhalten, wenn sich 'E parallel zu ihrer ersten Lage

(also parallel mit der vertikalen Tafel) fortbewegt, und dabei stets E oder ''E trifft. Endlich ist die Ebene, die man durch E und 'E oder durch 'E und ''E etc. etc. legen kann dieselbe, wie die vorhin erzeugte. —

(Fig. 46.) Sind zweitens beide Spuren parallel mit X, so kann man sich auch wieder auf zweierlei Weise die Lage der Ebene versinnlichen, wenn man die horizontale und vertikale Tafel in ihre erste Stellung (rechtwinklig auf einander) bringt. Legt man nämlich durch diese beiden Spuren (T und 'T) eine Ebene, so ist diese die durch T und 'T vorgestellte; oder lässt man eine beliebige Gerade so fortbewegen, dass sie stets diese beiden Spuren trifft, so wird der durch jene Gerade beschriebene geometrische Ort die Ebene sein, wodurch also ihre Lage im Raume versinnlicht werden kann.

Aus dem, was in diesem und dem vorigen §. erläutert wurde, folgt also,

dass eine Ebene durch zwei ihrer Spuren völlig bestimmt ist, und dass diese Spuren entweder in einem einzigen Punkte der Projektionsaxe (also die horizontale und vertikale Spur in einem Punkte der Axe X) zusammentreffen, oder unter sich parallel sein müssen. —

§. 82.

Da durch zwei Spuren einer Ebene die Lage der letzteren völlig bestimmt ist, so wird die dritte aus den beiden andern angegeben werden können. (Fig. 43.) Ist also E die horizontale und E' die vertikale Spur einer Ebene gegeben, so sind zur Auffindung der zweit-vertikalen Spur zwei Punkte nothwendig, die sowohl in der Ebene, als auch in der zweit-vertikalen Tafel liegen. Verlängert man aber 'E bis zur Axe Z und E bis zur Axe Y, so wird 'A sowohl, als auch ''A die verlangten Bedingungen erfüllen, und mithin werden diese beiden Punkte 'A und ''A der zweit-vertikalen Spur angehören. Bringt man also die zweit-vertikale Tafel in die vertikale Tafel, so bleibt 'A liegen, während ''A einen Kreisbogen beschreibt vom Halbmesser ''A O, dessen Mittelpunkt O ist, und nach ''A der neuen Lage von Y (Verlängerung der Axe X) zu liegen kömmt. Verbindet man nun 'A mit ''A durch eine Gerade, so wird letztere die zweit-vertikale Spur ''E der Ebene sein. Ein ähnliches Verfahren würde man einschlagen, wenn aus der vertikalen und zweit-vertikalen Spur die horizontale, oder aus der horizontalen und zweit-vertikalen die vertikale Spur bestimmt werden sollte. (Fig. 44.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y, die vertikale Spur aber nicht die Axe Z, so muss (§. 80.) die zweit-vertikale Spur parallel mit Z sein. Ist also ''A der Punkt, in welchem Y von der horizontalen Spur T getroffen wird, so bringe man diesen Punkt, wenn die Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind, nach ''A der Verlängerung von X, indem man von O aus mit O''A einen Kreisbogen beschreibt, der sodann die neue Lage von Y in ''A trifft. Zieht man nun durch ''A die Gerade ''T parallel mit Z, so wird diese Gerade die gesuchte zweit-vertikale Spur der Ebene sein. — (Fig. 45.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y nicht, so ziehe man durch den Punkt 'A, in welchem Z von der vertikalen Spur 'T getroffen wird, die Gerade ''T parallel mit X oder der neuen Lage Y, so wird hierdurch die zweit-vertikale Spur der Ebene erhalten. Trifft endlich weder die horizontale Spur die Axe Y, noch die vertikale Spur die Axe Z, so ist (§. 36.) die Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel parallel, folglich auch keine zweit-vertikale Spur vorhanden. —

Anmerk. Es wurde hier nicht darauf Rücksicht genommen, dass die Axe Z von der vertikalen Spur auch unterhalb der X getroffen werden kann. Da nun durch diesen Punkt die zweit-vertikale Spur gehen muss, so wird ein Theil derselben in der horizontalen Tafel sichtbar sein. Würde die Axe Y von der horizontalen Spur aberhalb X getroffen, so würde dieser Punkt auch rechts von Z auf die Axe X zu liegen kommen, sobald man die zweit-vertikale Tafel um Z dreht, und links von Z in die vertikale Tafel legt. In Fig. 49. trifft die vertikale Spur S'_2 einer Ebene die Axe Z in $'A_2$, die Axe Y aber in $''A_2$, wobei aber $''A_2$ nach $''A_2$ der Axe X zu liegen kömmt, und mithin wird $'A_2''A_2$ oder $''S_2$ die zweit-vertikale Spur dieser Ebene sein, deren horizontale Spur in S_2, und deren vertikale Spur in $'S_2$ ist. —

§. 83.

(Fig. 44.) Ist T die horizontale Spur einer Ebene, 'T ihre vertikale Spur, und ist letztere senkrecht auf X, so muss (§. 45.) die Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Die Ebene (T A T'), deren vertikale Spur senkrecht auf X, also auch (§. 46.) senkrecht auf der horizontalen Tafel ist, wird mithin senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Ist umgekehrt eine Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel, so muss (§. 48.) ihre vertikale Spur senkrecht auf der Axe X oder auf der horizontalen Tafel sein. (Fig. 45.) Hieraus geht mithin auch hervor, dass wenn die horizontale Spur T einer Ebene T A 'T senkrecht auf der Axe X, also (§. 46.) senkrecht auf der vertikalen Tafel

steht, diese Ebene selbst senkrecht auf der vertikalen Tafel sein muss, und ist eine Ebene senkrecht auf der vertikalen Tafel, so muss ihre horizontale Spur senkrecht auf X sein. Ist daher eine Ebene senkrecht auf beiden Tafeln, so müssen auch beide Spuren senkrecht auf X sein und umgekehrt. Derselbe Satz gilt auch für die zweit-vertikale Tafel, und mithin ist (Fig. 46.) durch die Spuren T 'T eine Ebene dargestellt, die senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel steht. — (Fig. 47.) 'E 'A "E stellt eine Ebene dar, die parallel zur horizontalen Tafel ist, und die Geraden T, "T stellen eine Ebene dar, die parallel zur vertikalen Tafel, also senkrecht auf der horizontalen und zweit-vertikalen ist. —

Anmerk. Steht eine Ebene senkrecht auf einer, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so fallen die horizontalen Projektionen aller geometrischen Grössen in die horizontale Spur der Ebene, weil in diesem Falle die Ebene für die in ihr enthaltenen Grössen horizontal-projicirende Ebene ist. —

§. 84.

(Fig. 48.) Es sei eine Ebene gegeben, auf welcher eine Gerade senkrecht steht, man soll die Lage der Projektionen der Geraden gegen die Spuren der Ebene suchen. Denkt man sich zu diesem Ende die Ebene bis zur horizontalen Tafel verlängert, so dass ihre horizontale Spur E erhalten wird, und projicirt die Gerade, so wird ihre horizontal projicirende Ebene senkrecht auf der gegebenen Ebene stehen (§. 45.), weil sie eine Gerade enthält, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Da nun die horizontale Tafel und die gegebene Ebene senkrecht auf dieser projicirenden Ebene stehen, so muss (§. 48.) die horizontale Spur der Ebene, nämlich E senkrecht auf der horizontal projicirenden Ebene der Geraden stehen, mithin diese horizontale Spur auch senkrecht sein auf jeder Geraden, die die durch ihren Durchgangspunkt mit der Ebene geht, und in dieser liegt; folglich ist die horizontale Spur der Ebene senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden. Auf dieselbe Weise kann aber auch gezeigt werden, dass die vertikale Spur 'E senkrecht auf der vertikalen Projektion m'n' der Geraden und die zweit-vertikale Spur senkrecht auf der zweit-vertikalen Projektion der Geraden sein muss, mithin folgt hieraus der Lehrsatz:

Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so müssen die Projektionen der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Spuren der Ebene stehen, also die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene, die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der vertikalen Spur, und die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der zweit-vertikalen Spur der Ebene sein.

(Fig. 49.) $S_1 A_1 S'_1$ ist eine Ebene, deren horizontale Spur S_1, deren vertikale Spur S'_1 und deren zweit-vertikale Spur S''_1 ist, m_1 die horizontale, m'_1 die vertikale und m''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, von welchem eine Senkrechte auf die Ebene gezogen werden soll. Man wird also nur von m_1 auf S_1 die Gerade P_1 senkrecht ziehen, so erhält man die horizontale Projektion, von m'_1 auf S'_1 eine Senkrechte $'P_1$ ziehen, so wird man die vertikale Projektion erhalten, und endlich von m''_1 auf S''_1 die Senkrechte $''P_1$ ziehen, wodurch dann die zweit-vertikale Projektion der Senkrechten erhalten wird. — (Fig. 49.) Wenn nun die Projektionen einer Geraden einzeln senkrecht auf den zugehörigen Spuren einer Ebene stehen, nämlich die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene etc. etc., so wird die Gerade im Raume senkrecht auf der Ebene stehen. Sind (S_2, S'_2, S''_2) die Spuren dieser Ebene, P_2 die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf S_2, P'_2 die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $'S_2$ und $''P_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $''S_2$ gezogen, und sind m_2, m', m''_2 die Projektionen eines auf dieser Geraden liegenden Punktes, so müssen jedenfalls diese Projektionen einer auf der Ebene senkrechten Geraden angehören, die durch den gegebenen Punkt geht. Da aber schon durch zwei Projektionen einer Geraden letztere der Lage nach völlig bestimmt ist (§. 71.), so können die gegebenen Projektionen nicht zugleich einer zweiten Geraden angehören, mithin geben diese Projektionen bloss die durch den Punkt ($m_2 m'_2$) gehende auf der Ebene senkrechte Gerade an. —

§. 85.

(Fig. 50.) Es seien zwei parallele Ebenen gegeben, welche dargestellt werden sollen; so denke man jede derselben (§§. 80. 81.) verlängert, bis sie die Projektionstafeln schneiden, um ihre Spuren zu erhalten. Betrachtet man nun ihre horizontalen Spuren, so sind diese die Durchschnitte der horizontalen Tafel mit den beiden parallelen Ebenen, und es müssen mithin (§. 33.) die horizontalen Spuren parallel unter sich sein. Aus demselben Grunde sind aber auch die vertikalen Spuren

sowohl, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel, woraus also folgt:

Sind zwei oder mehrere Ebenen parallel, so müssen ihre zusammengehörigen Spuren unter sich parallel sein. (Fig. 50.) Ist also $S_1 A_1 S'_1$ die eine, $S_2 A_2 {}'S_2$ die andere durch ihre Spuren dargestellte Ebene, so muss $S_1 \neq S_2$, ${}'S_1 \neq {}'S_2$ und endlich ${}''S_1 \neq {}''S_2$. *Sind aber die vertikalen Spuren sowohl, als auch die horizontalen Spuren einer Ebene unter sich parallel, und sind die Ebenen nicht parallel zu einer Projektionsaxe, so sind dieselben nach §. 36. unter sich parallel.*

(Fig. 51.) Sind die Ebenen parallel mit einer Axe, z. B. mit der Axe X, so müssen die Spuren (§. 81.) parallel unter sich sein. Liegen nun die Spuren der einen Ebene zwischen den Spuren der andern Ebene, so sind auch die zweit-vertikalen Spuren ${}'E_2$ und ${}'E_1$ unter sich parallel, uud da ${}''E_2 \neq {}''E_1$, ${}'E_2 \neq {}'E_1$, ferner ${}'E_2$ von ${}''E_2$ in A'_2 und ${}''E_1$ von ${}''E_1$ in ${}'A_1$ getroffen wird, so müssen die Ebenen (§. 36.) unter sich parallel sein. (Fig. 52.) Sind aber die Spuren parallel unter sich und parallel zur Axe X, ohne dass die beiden Spuren der einen Ebene zwischen den beiden Spuren der andern Ebene liegen, so schneiden sich die zweit-vertikalen Spuren T''_1 und ${}''T_2$, weshalb also auch die Ebenen nicht unter sich parallel sein können.

Wenn also die Ebenen parallel zu einer der Projektionsaxen sind, und es sind sowohl die horizontalen, als auch die vertikalen, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel, so sind die Ebenen unter sich parallel, sind aber bloss die horizontalen Spuren und die vertikalen Spuren unter sich parallel, und die zweit-vertikalen Spuren nicht, so sind die Ebenen nicht parallel unter sich.

§. 86.

Durch die Sätze des vor. §. ist man im Stande, mit einer Ebene eine andere parallel zu ziehen, und zu erkennen, ob zwei Ebenen parallel unter sich sind, oder nicht. Ist eine Ebene nur durch ihre horizontale und vertikale Spur gegeben, und schneiden sich dieselben, was (§. 80.) in einem Punkte von X geschehen muss, so ist nur ein Punkt von einer der Spuren der zweiten Ebene anzugeben nothwendig, um dieselben bestimmen zu können. (Fig 50.) Ist z. B. in ${}'S_2$ ein Punkt gegeben, so ziehe man durch diesen parallel zu ${}'S_1$ eine Gerade, welche die Axe X in A_2 treffen wird. Durch A_2 die Gerade $S_2 \neq S_1$ gezogen, gibt $S_2 A_2 {}'S_2$ die zweite Ebene, welche parallel zur ersten Ebene $S_1 A_1 {}'S_1$ ist. Schneiden aber die Spuren der einen Ebene die X auf den Zeichnungstafeln nicht, und können letztere wegen Mangel an Raum nicht weiter verlängert werden, so muss man entweder die zweit-vertikale Spur dieser Ebene suchen, oder zwei Punkte angeben, die schon in der Ebene und einer der Projektionstafeln zugleich liegen, um die Spuren der andern Ebene angeben zu können. — Selten ist aber ein Punkt einer Spur selbst gegeben, sondern es sind grösstentheils die Projektionen eines Punktes gegeben, der sich auf der Ebene befindet, die mit der gegebenen parallel gezogen werden soll. In diesem Falle muss man durch den Punkt eine Generatrix der Ebene legen, ihren Durchgangspunkt mit einer der Projektionstafeln suchen, so wird dieser ein Punkt einer Spur der gesuchten Ebene sein. Die Ausführung dieser Aufgabe kann erst im nächsten Kapitel gesehehen. —

Drittes Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 87.

Aufgabe 1. Es seien die Projektionen zweier Punkte gegeben, man soll ihre Entfernung angeben.

Auflösung. (Fig. 53.) Es sei OX der Durchschnitt der horizontalen mit der vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der vertikalen und zweit-vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel, der ursprünglich in der horizontalen Tafel senkrecht auf X liegt, aber nach OZ der Verlängerung von X zu liegen kömmt, wenn die zweit-vertikale Tafel um OZ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt wird. Ferner sei a_1 die horizontale Projektion des einen, a'_1 seine vertikale und a''_1 seine zweit-vertikale Projektion, a_2 die horizontale Projektion des zweiten Punktes, a'_2 seine vertikale und a''_2 seine zweit-vertikale Projektion, so muss (§. 72.) $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden sein, welche die Entfernung dieser Punkte angibt. Suchen wir daher von dieser Geraden die wahre Länge, so muss diese die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Um nun diese Länge zu bestimmen, betrachte man eine

der projicirenden Ebenen, z. B. die horizontal-projicirende Ebene der Geraden, so ist in dieser ein Viereck enthalten, dessen eine Seite die horizontale Projektion der Geraden ist, von welchem ferner zwei andere Seiten die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte sind, und dessen vierte Seite die Gerade im Raume ist. Nun ist aber jede dieser projicirenden Linien (§. 63.) senkrecht auf der horizontalen Tafel, also auch jede derselben (§. 7.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden und (§. 27.) unter sich parallel, so dass also das erwähnte in der horizontal-projicirenden Ebene liegende Viereck im Allgemeinen ein Trapez ist, dessen parallele Seiten die projicirenden Linien beider Punkte sind. Legt man daher die horizontal-projicirende Ebene, indem man dieselbe um ihre horizontale Spur, nämlich der horizontalen Projektion der Geraden dreht, in die horizontale Tafel, so wird jeder Punkt derselben einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene (§. 23.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden ist, und deren horizontale Spur mithin (§. 84.) auf dieser horizontalen Projektion der Geraden senkrecht ist. Es werden mithin auch die beiden Endpunkte der Geraden solche Kreise beschreiben, und daher in den horizontalen Spuren der Ebenen dieser Kreise liegen bleiben, aber so weit von der horizontalen Projektion der Geraden (Drehungsaxe) entfernt bleiben, als diess vorher der Fall war. Zieht man daher von dem Endpunkte der horiontalen Projektionen der Geraden Senkrechte auf diese und zwar nach derjenigen Seite hin, wo man die horizontal-projicirende Ebene niedergelegt hat, so werden die beiden Endpunkte der Geraden in diesen liegen, und in ihrer wahren Entfernung sichtbar sein. Man hat daher nur diese beiden Senkrechten gleich den horizontal-projicirenden Linien beider Punkte zu machen, also (§. 63.) gleich ihren vertikalen Ordinaten, so wird die Entfernung ihrer Endpunkte die vierte Seite des erwähnten Trapezes, also die gesuchte Entfernung der beiden gegebenen Punkte im Raume sein. — (Fig. 53.) Zieht man also von a_1 eine Senkrechte auf $a_1 a_2$, und macht dieselbe, nämlich $a_1 A_3 = a'_1 m_1$, zieht ferner $a_2 B_3$ senkrecht auf $a_1 a_2$, und macht $a_2 B_3 = a'_2\, n$, so wird $A_3 B_3$ gleich der gesuchten Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung hätte man gefunden, wenn man die vertikal-projicirende Ebene um $a'_1 a'_2$ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt hätte. Es wird nämlich hierdurch das Viereck $A_1 a'_1 a' B_1$ sichtbar, in welchem $a'_1 A_1 = m a_1$ (§. 63.) und senkrecht auf $a'_1 a'_2$, $a'_2 B_1 = n a_2$ und senkrecht auf $a'_1 a'_2$ ist, dessen vierte Seite $A_1 B_1$ mithin dieselbe Entfernung oder die Länge der begränzten Geraden im Raume ist, so dass also $A_1 B_1 = A_3 B_3$ sein muss. Endlich wird man $A_2 B_2 = A_3 B_3 = A_1 B_1$ finden, wenn man das zweit-vertikal-projicirende Trapez um $a''_1 a''_2$ dreht, und in die zweit-vertikale Tafel legt, wobei das Viereck $A_2 B_2 a''_2 a''_1$ sichtbar wird, in welchem $a_1 A_2 = a'_1 p$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$, $a''_2 B_2 = a'_2 q$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$ sein muss. —

§. 88.

(Fig. 53.) Zieht man $B_3 C_3 \neq a_2 a_1$, so wird $B_3 C_3$ gleich der Differenz der beiden vertikalen Ordinaten, also $A_3 C_3 = a'_1 m - a'_2 n$ sein. Ebenso muss, wenn man $A_1 C_1 \neq a'_1 a'_2$ zieht, $B_1 C_1 = B_1 a'_2 - A_1 a'_1 = a_2 n - a_1 m$, und endlich, wenn man $A_2 C_2 \neq a''_1 a''_2$ zieht: $B_2 C_2 = B_2 a''_2 - A_2 a''_1 = a'_2 q - a'_1 p$ sein, so dass also hieraus geschlossen werden kann:

Die Entfernung beider Punkte ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die Entfernung der horizontalen Projektionen beider Punkte, und dessen andere Kathete die Differenz ihrer vertikalen Ordinaten ist; oder dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte ist, und die andere die Differenz ihrer beiden horizontalen Orinaten: oder endlich dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte, und die andere der Unterschied der Abscissen (zweit-vertikalen Ordinaten) beider Punkte ist.

§. 89.

Es ist nach dem, was im vorigen Paragraphe gesagt wurde, zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte oder der Länge einer begränzten Geraden nichts zu wissen nothwendig, als die Länge der horizontalen Projektion der Geraden, und die vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder die Länge der vertikalen Projektion der Geraden und die horizontalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder endlich die Länge der zweit-vertikalen Projektion der Geraden und die Abscisse ihrer Endpunkte. Man kann aber auch leicht erkennen, dass zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte ihre Coordinaten hinreichen. (Fig. 53.) Denkt man sich nämlich von a_1 aus eine Parallele zu X gezogen, so ist der zwischen $a_1 m$ und $a_2 n$ liegende Theil derselben gleich $m n = a'_2 q - a'_1 p$, und es bildet diese Parallele mit $a_1 a_2$ ein recht-

winkliges Dreieck, dessen eine Kathete also gleich $a'_2 q - a'_1 p$ gleich der Differenz der beiden Abscissen, dessen andere Kathete aber gleich $a_2 n - a_1 m$ oder gleich der Differenz beider horizontalen Ordinaten ist, so dass also die horizontale Projektion als die Hypothenuse dieses Dreieckes leicht konstruirt werden kann. Betrachtet man nun diese als Kathete eines neuen Dreieckes dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte ist, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes die gesuchte Entfernung sein.

Anmerk. 1. Denkt man sich die ganze Construktion im Raume vorgenommen, so erscheint die Entfernung der beiden Punkte als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen eine Kante die Differenz der horizontalen Ordinaten, dessen zweite Differenz der vertikalen Ordinaten, und dessen dritte Kante die Differenz der Abscissen ist.

Anmerk. 2. Diese gesuchte Entfernung kann leicht durch Rechnung gefunden werden. Ist nämlich

$a_2 n = y_1$, $a_1 m = y_2$, $a'_2 n = z_1$, $a'_1 m = z_2$, $a'_1 p = x_2$, $a'_2 q = x_1$,

so ist

$$\overline{a_1 a_2}^2 = \overline{B_3 C_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

und da

$$\overline{A_3 B_3}^2 = \overline{C_3 B_3}^2 + \overline{A_3 C_3}^2 \text{ ist,}$$

so hat man

$$\overline{A_3 B_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

folglich

$$A_3 B_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

§. 90.

Einige Beispiele zur Uebung sollen nun vorgenommen werden.

Beispiel 1. (Fig. 54.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Dabei soll $a_1 a_2 \neq X$ sein, mithin wird auch $a''_1 a''_2 \neq Z$, und diese Gerade muss (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel sein; folglich ist $a'_1 a'_2$ die Entfernung der beiden Punkte oder die Länge dieser begränzten Geraden. Diess geht auch daraus hervor, weil das vertikal-projicirende Trapez hier in ein Parallelelogramm übergeht, in welchem $a'_1 A = a'_2 B = m a_1$ ist, und mithin auch $a'_2 a'_1 = BA$ der Entfernung der beiden Punkte sein muss.

Beispiel 2. (Fig. 57.) Sind (a_1, a'_1, a''_1) die Projektionen eines Punktes, a_2, a'_2, a''_2 die Projektionen eines zweiten Punktes, so muss die Gerade, welche ihre Entfernung angibt (§. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel oder in einer auf X senkrechten Ebene liegen; mithin wird $a''_1 a''_2$, nämlich die zweit-vertikale Projektion dieser Geraden gleich ihrer wahren Länge sein, und die Entfernung der beiden Punkte (a_1, a'_1, a''_1), (a_2, a'_2, a''_2) angeben. — Sollte man die Länge dieser Geraden ohne Benützung ihrer zweit-vertikalen Projektion suchen, so könnte man nach §. 87. verfahren, das horizontal-projicirende Trapez $a_1 B A a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B$ = der Entfernung der Projektion a'_1 des ersten Punktes von X, $a_2 A$ gleich der Entfernung der vertikalen Projektion a'_2 des Punktes von X wird, und daher $AB = a''_1 a''_2$ = der Länge der Geraden oder der Entfernung beider Punkte ist. Oder man könnte nach §. 88. verfahren, und sogleich das rechtwinklige Dreieck $a_1 B' a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B'$ = der Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte $= a'_1 q - a'_2 q$ ist, so wird $a_2 B'$ die Länge derselben Geraden angeben. —

Beispiel 3. (Fig. 55.) Nun sei die Entfernung zweier Punkte anzugeben, von welchen der eine im vierten Quadranten liegt, und rechts von der zweit-vertikalen Tafel. Dieser Punkt ist durch seine horizontale Projektion a_2, seine vertikale Projektion a'_2 und durch seine zweit-vertikale Projektion a''_2 gegeben, der andere Punkt sei durch die Projektionen a_1, a'_1, a''_1 gegeben. Für den zweiten Punkt geht die horizontale Ordinate in derselben Richtung wie für den ersten, also haben auch die vertikal-projicirenden Linien beider Punkte dieselbe Richtung. Die vertikalen Ordinaten beider Punkte hingegen haben entgegengesetzte Richtung, mithin auch ihre vertikal-projicirenden Linien. Sucht man daher die Entfernung beider Punkte, indem man die horizontal-projicirende Ebene dieser Geraden um $a_1 a_2$ dreht, und in die horizontale Tafel legt, sodann das in §. 87. erwähnte Trapez konstruirt, so wird, weil die horizontal-projicirende Linie des einen Punktes entgegengesetzte Richtung, wie die des andern hat, auch $a_2 B = a'_2 n$ entgegengesetzte Richtung haben, wie $a_1 A = a'_1 m$. Trägt man also $a_1 A = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ von a_1, und auf der andern Seite $a_1 a_2$ senkrecht auf diese $a_2 B = a'_2 n$, so wird die Gerade AB die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Zieht man nun $a_2 'A \neq AB$, so ist $A'A = a_1 B$, und mithin $a_1 'A = 'a_1 m + a'_2 n$ = der Summe der vertikalen Ordinaten beider Punkte. Das vertikal-projicirende Trapez wird ebenfalls dieselbe Entfernung $CD = AB$ angeben, allein die vertikal-projicirenden Linien $a'_1 D = a_1 m$ und $a'_2 C = a_2 m$ werden dieselbe Richtung haben, und mithin auch auf einer und derselben Seite von $a'_1 a'_2$ aufgetragen werden; so dass wieder $a'_1 D' = a_1 m - a_2 n$, wie §. 87. ist. Dasselbe gilt in Bezug auf das zweit-vertikal-projicirende Trapez. —

Beispiel 4. (Fig. 56.) Es sei a_1 die horizontale Projektion, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, $a_2 a'_2 a''_2$ seien die Projektionen eines zweiten Punktes, so liegt (§. 65.) der erste Punkt im ersten Quadranten, der zweite im dritten Quadranten, aber beide rechts der zweit-vertikalen Tafel. Die vertikal-projicirenden Linien beider Pnnkte sowohl, als auch ihre horizontal-projicirenden Linien haben mithin entgegengesetzte Richtung, weshalb also bei der Construktion des vertikal-projicirenden Trapezes die Seite $a'_2 B_1 = a_2 n$, die senkrecht auf $a'_2 a'_1$ von a_2 aus ausgezogen wurde, auf entgegengesetzter Seite aufgetragen werden, also $a'_1 A_1 = a_1 m$ gemacht werden muss, so dass $a' A_1$ auf $a'_1 a_2$ in a'_1 senkrecht steht. Zieht man $B_1 A_1$, so wird diese die Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung ist auch durch $A_1 B_1$ gefunden, die erhalten wurde, indem man $a_2 B_2 = a'_2 n$ und $a_1 A_2 = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ aber in entgegengesezten Richtungen in Bezug $a_1 a_2$ getragen hat. Ebenso ist $A_3 B_3 = A_2 B_2 = A_1 B_1$ gleich der Entfernung beider Punkte, welche nach dem schon mehrmals angegebenen Verfahren gefunden wurde. Zieht man $a'_2 C \neq A_1 B_1$ und $a_2 C_2 \neq B_2 A_2$ so ist auch $A_1 B_1 = C_1 a'_2$ und $a_2 C_2 = B_2 A_2$, mithin die Länge dieser Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der horizontal-projicirenden Linien oder der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist; oder die vertikale Projektion $a'_1 a'_2$ die eine Kathete, und ($a'_1 A_1 + A_1 C_1 = a_1 m + a_2 n$) die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte oder ihre vertikal-projicirenden Linien, die andere Kathete ist. —

Beispiel 5. (Fig. 59.) Nun seien wieder die Projektionen zweier Punkte gegeben, und zwar a_1 die horizontale, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion des ersten Punktes, a_2 die horizontale, a'_2 die vertikale und a''_2 die zweit-vertikale Projektion des zweiten Punktes, welcher letztere (§. 66.) im zweiten Quadranten liegt, und weil seine horizontale und vertikale Projektion links von Z, seine zweit-vertikale Projektion aber rechts von Z ist, so befindet sich dieser Punkt links der zweit-vertikalen Tafel. Die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte oder ihre vertikalen Ordinaten, nämlich $a'_1 n$ und $a'_2 m$ haben gleiche Richtung, und werden mithin auf einer und derselben Seite von $a_2 a_1$ aufgetragen, wenn man BA die Länge der Geraden finden will. Das vertikal-projicirende Trapez wird nach Beispiel 4. erhalten; das zweit-vertikal-projicirende Trapez $a''_1 C D a''_2$ muss aber hier, weil $a'_2 q$ in entgegengesetzter Richtung von $a'_1 a$ liegt so konstruirt werden, dass $a''_2 D = a'_2 q$ entgegengesetzt von $a''_1 C = a'_1 r$ aufgetragen werden muss; denn die zweit-vertikal-projicirenden Linien beider Punkte haben entgegengesetzte Richtung, und kommen mithin in ihren Ebenen auch entgegengesetzt von $a''_2 a''_1$ zu liegen.

§. 91.

Die im vorigen Paragraphe enthaltenen Beispiele führen zu folgenden Folgerungen:

1. Befindet sich der eine der Punkte, deren Entfernung bestimmt werden soll, im ersten, der andere im zweiten Quadranten, so ist die Länge dieser Entfernung die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, von welchem ihre vertikale Projektion die eine, die Summe der horizontalen Ordinaten beider Punkte die andere Kathete oder die horizontale Projektion die eine Kathete und die Differenz beider vertikalen Ordinaten die andere Kathete ist. — Liegt der zweite Punkt im dritten Quadranten, so ist die gesuchte Entfernung beider Punkte Hypothenuse eines rehtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe beider vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und sodann die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Liegt endlich der zweite Punkt im vierten Quadranten so ist die Länge der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet, Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und die Differenz der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Befinden sich beide Punkte in einem und demselben Quadranten, so haben ihre projicirenden Linien gleiche Richtung, und man kann mithin bei der Aufsuchung ihrer Entfernung ganz nach den §§. 87. und 88. verfahren; befinden sich aber beide Punkte in verschiedenen Quadranten, so ist auf die Richtung der projicirenden Linien oder der Ordinaten, denen sie gleich sind, Rücksicht zu nehmen. Wie man darauf Rücksicht nehmen kann, ist leicht aus den Beispielen und dem Eingange dieses Paragraphes zu ersehen. Eben so wird man auch das Verfahren erkennen, welches man einzuschlagen hat, wenn man die Länge der Geraden durch das zweit-vertikal-projici-

rende Trapez suchen will, und sich der Punkt rechts oder links der zweit-vertikalen Tafel befindet. —

2. Da die Projektion einer Geraden gleich ihrer Länge sein wird, wenn die Gerade parallel zur Projektionstafel ist, so kann man ein zweites in manchen Fällen bequemeres Verfahren einschlagen, um die Länge einer Geraden zu finden. Dieses Verfahren besteht nämlich darin, dass man einen Endpunkt der Geraden fix liegen lässt, während man die Gerade um diesen Punkt dreht, bis sie parallel mit einer der Projektionstafeln ist. Dreht man also die Gerade um ihren Anfangspunkt, bis sie parallel mit der horizontalen Tafel ist, und zwar so, dass der andere Endpunkt in einer Geraden bleibt, die parallel zur vertikalen Tafel ist, so kömmt die Gerade nach der Drehung in eine Ebene zu liegen, die parallel zur horizontalen Tafel, und deren vertikale Spur mithin (§. 85.) parallel mit X ist. In letztere wird (§. 83.) die vertikale Projektion der Geraden nach der Drehung zu liegen kommen, und ihre vertikale Projektion die vorige Länge beibehalten, weil die vertikal-projicirenden Linien beider Endpunkte, also ihre horizontalen Ordinaten sich nicht verändert haben; die horizontal-projicirenden Linien beider Endpunkte aber, oder ihre vertikalen Ordinaten müssen nun einander gleich sein, und gleich der vertikalen Ordinate des fixen Punktes. Zieht man daher von der vertikalen Projektion des fixen Punktes aus eine Gerade parallel mit X, und macht diese gleich der vertikalen Projektion der Geraden, so erhält man die neue vertikale Projektion der Geraden, zu welcher die entsprechende horizontale Projektion gefunden wird, indem man die vorigen horizontalen Ordinaten beider Endpunkte beibehält, und die in §. 63. erwähnten Sätze berücksichtiget. Diese neue horizontale Projektion der Geraden muss nun (§. 74.) gleich der Länge der Geraden sein. Analog wird man verfahren, wenn man die Gerade parallel zur vertikalen oder zur zweit-vertikalen Tafel dreht. Im folgenden §. sind auch über dieses Verfahren einige Beispiele enthalten. —

§. 92.

Beispiel 1. (Fig. 60.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion einer begränzten Geraden, $a'_1 a'_2$ ihre vertikale Projektion, so lasse man den Punkt $a_1 a'_1$ fix liegen, denke sich die Gerade so gedreht, dass ihr Endpunkt in einer auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Geraden also von der vertikalen Tafel in gleicher Entfernung bleibt, die Gerade selbst aber nach der Drehung in eine Ebene zu liegen kömmt, die parallel zur vertikalen Tafel ist; so wird ihre neue vertikale Projektion $a'_1 b'_2 \neq X$ und $= a'_1 a'_2$ werden, die horizontale Projektion des ersten Punktes bleibt in a_1, die des zweiten aber muss in $b'_2 b_2$ (§. 63.) liegen, und nach vorigem §. in der mit X parallelen Geraden $a_2 b_2$, und ist mithin b_2. Zieht man also die Gerade $a_1 b_2$, so ist diese die neue horizontale Projektion der Geraden, und gibt mithin ihre wahre Länge an. — Zieht man $a_1 b_1 \neq X$ und gleich $a_1 a_2$, zieht ferner $b_1 b'_1$ senkrecht auf X und $a'_2 a'_1 \neq X$, verbindet den Durchschnittspunkt b'_1 mit a'_1 durch die Gerade $a'_1 b'_1$, so wird letzere (§. 91.) auch gleich der Länge der Geraden sein. Auf gleiche Weise kann man durch $a''_2 b''_3$ die Länge der Geraden erhalten. —

Beispiel 2. (Fig 58.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion einer Geraden, deren Endpunkte (§. 65.) im zweiten Quadranten liegen. Da nun diese beiden Endpunkte in einem und demselben Quadranten liegen, so ändert sich gar nichts, und wir können ebenso unsere Construktion machen, als wenn sich die Punkte im ersten Quadranten befinden würden, nur müssen wir jetzt die horizontale Tafel an der Stelle der vertikalen Tafel, und die vertikale Tafel in der gewöhnlichen Lage der horizontalen Tafel uns denken. Zieht man also $a_1 b \neq X$ und macht $a_1 b = a_1 a_2$, zieht $b b'$ senkrecht auf X, $a'_2 b' \neq X$, und verbindet a'_1 und b' durch die Gerade $a'_1 b$, so muss (§. 91.) letztere gleich der Entfernung beider Punkte sein, weil sie (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel ist. Dieselbe Länge A B hat man (§.87.) durch das vertikal-projicirende Trapez $a'_1{}'_2$ A B. —

§. 93.

Aufgabe 2. *Eine Gerade ist durch ihre Projektionen gegeben; man soll ihre Durchgangspunkte mit den Tafeln suchen, vorausgesetzt, dass sie jede der Tafeln bei gehöriger Verlängerung trifft.*

Auflösung. Der Durchgangspunkt einer Geraden mit einer der Tafeln wird auch **Spur** der Geraden genannt, und zwar ihr Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel **horizontale Spur**, ihr Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel **vertikale Spur**, endlich ihr Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel **zweit-vertikale Spur**. Diese Spuren werden offenbar erhalten, wenn man sich die Gerade so weit verlängert denkt, bis sie die Tafeln trifft. Um also die horizontale Spur der Geraden zu erhalten, müssen wir uns die Gerade

verlängert denken, bis sie die horizontale Tafel trifft, wobei also auch ihre Projektionen länger werden. Nun ist die horizontale Spur der Geraden ein Punkt der letzteren sowohl, als auch ein Punkt der horizontalen Tafel; mithin müssen sich die Projektionen dieser horizontalen Spur (§. 72.) in den Projektionen der Geraden befinden, und (§. 70.) ihre vertikale Projektion in der Axe liegen. Letztere ist also im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Geraden mit der Axe X, und wird erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert. Da nun die horizontale Projektion dieses Punktes (§. 72.) in der horizontalen Projektion der Geraden, und (§. 63.) mit seiner vertikalen Projektion in einer auf X senkrechten Geraden liegen muss, so ist seine horizontale Projektion im Durchschnitte der horizontalen Projektion der Geraden mit der von der vertikalen Projektion des Punktes auf X gezogenen Senkrechten. Diese horizontale Projektion des Punktes ist aber die horizontale Spur der Geraden, und es wird mithin diese erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, von dem erhaltenen Durchschnittspunkte auf X eine Senkrechte zieht, so wird im Durchschnitte der letzteren mit der horizontalen Projektion der Geraden die gesuchte horizontale Spur sein. Diese horizontale Spur kann auch erhalten, wenn man die zweit-vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe Y verlängert, den erhaltenen Punkt von letzterer in seine richtige Lage auf Y bringt, indem man die zweit-vertikale Tafel in ihre erste Lage gebracht denkt, sodann von diesem Punkte auf Y eine Senkrechte zieht, deren Durchschnitt mit der horizontalen Projektion der Geraden der gesuchte Punkt sein wird. — Analog ergibt sich die Regel für die Auffindung der vertikalen Spur; indem man die horizontale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, wodurch die horizontale Projektion der vertikalen Spur erhalten wird, sodann von diesem Punkte auf X eine Senkrechte zieht, die in der vertikalen Tafel oder deren Verlängerung liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der vertikalen Projektion der Geraden die gesuchte vertikale Spur sein. —

§. 94.

Beispiel 1. (Fig. 61.) Ist $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion der Geraden, und $a''_1 a''_2$ ihre zweit-vertikale Projektion, und man soll denjenigen Punkt derselben finden, in welchem sie die horizontale Tafel trifft; so verlängere man (§. 93.) $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X, wodurch man den Punkt s'_1 erhält, der die vertikale Projektion der gesuchten horizontalen Spur ist. Von s'_1 auf X eine Senkrechte gezogen, die in der horizontalen Tafel liegt, und $a_1 a_2$ verlängert bis zum Durchschnitte s_1 mit dieser Senkrechten, so wird dieser Punkt die gesuchte horizontale Spur sein. Verlängert man $a''_1 a''_2$ bis Y, und dreht den erhaltenen Punkt s''_1, bis er die richtige Lage von O Y trifft, so ist s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, welche letztere also im Durchschnitte der von s''_1 auf Y gefällten Senkrechten mit $a_1 a_2$ sein wird. Ebenso erhält man die vertikale Spur der Geraden, wenn man ihre horizontale Projektion bis X oder ihre zweit-vertikale Projektion bis Z verlängert, es wird dann s_2 die horizontale und s''_2 die zweit-vertikale Projektion der gesuchten vertikalen Spur sein. Die von s_2 auf X und die von s''_2 auf Z gezogenen Senkrechten müssen sich daher in dem Punkte s'_2 der vertikalen Projektion $a'_2 a'_1$ treffen, welcher die gesuchte vertikale Spur der Geraden ist. Auf gleiche Weise erhält man die zweit-vertikale Spur s''_3 der Geraden, indem man die vertikale Projektion der Geraden bis Z verlängert, wodurch die vertikale Projektion s'_3 der zweit-vertikalen Spur erhalten wird. Zieht man nun von s'_3 auf Z eine Senkrechte, so wird im Durchschnittspunkte s''_3 derselben mit $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Spur der Geraden erhalten werden. —

Beispiel 2. (Fig. 62.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und mithin $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden; man soll ihre Spuren bestimmen. Die horizontale Spur s_1 wird (§. 93.) erhalten, wenn man $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X verlängert, von der hierdurch erhaltenen vertikalen Projektion s_1 der horizontalen Spur auf X eine Senkrechte $s'_1 s_1$ zieht, die in der horizontalen Tafel (oder deren Verlängerung) liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden, nämlich in s_1 die gesuchte horizontale Spur sein. Die vertikale Spur wird erhalten, wenn man die horizontale Projektion $a_1 a_2$ bis X verlängert, von der hierdurch erhaltenen horizontalen Projektion s_2 der vertikalen Spur auf X eine Senkrechte zieht, die hier in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegen muss, damit sie von der Verlängerung der vertikalen Projektion $a'_1 a'_2$ getroffen wird. Der hierdurch erhaltene Durchschnittspunkt ist die gesuchte horizontale Spur.

Beispiel 3. (Fig. 63.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, deren zweit-vertikale Projektion also in "L sein muss, so findet man durch Verlängerung von L bis zur Axe X in s_2 die horizontale Projektion der vertikalen Spur. Die vertikale Spur selbst wird also erhalten, wenn man $s_2 s'_2$ senkrecht auf X in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel zieht, und diese Senkrechte von 'L durchschneidet, was in s'_2 geschieht, weshalb man also in s'_2 die vertikale Spur der Geraden findet, die in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt. Ebenso findet man durch Verlängerung der vertikalen Projektion 'L bis zur Axe in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur der Geraden, und folglich in s_1 diese horizontale Spur selbst, die in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und links der zweit-vertikalen Tafel liegt. Endlich wird die zweit-vertikale Spur dieser Geraden gefunden, wenn man 'L bis zur Axe Z verlängert, von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_3 auf Z eine Senkrechte zieht, deren Verlängerung in s''_3 von der zweit-vertikalen Projektion "L der Geraden getroffen wird, und worin auch ihre zweit-vertikale Spur liegt. Man kann, wie aus der Fig. zu ersehen durch die horizontale Projektion s_3 dieser Spur dieselbe auch finden. Diese zweit-vertikale Spur liegt in der rückwärtigen Verlängerung der zweit-vertikalen Tafel unterhalb der horizontalen Tafel. —

Beispiel 4. Es sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale, folglich $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Diese Gerade ist (nach §. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel, weshalb also von einer zweit-vertikalen Spur dieser Geraden nicht die Rede sein kann. Ihre vertikale Spur wird erhalten, wenn man die zweit-vertikale Spur bis Z verlängert, von der hierdurch erhaltenen zweit-vertikalen Projektion s''_2 der vertikalen Spur auf Z eine Senkrechte zieht, diese bis zum Durchschnitte mit $a'_1 a'_2$ verlängert, so erhält man den Punkt s_2, der die vertikale Spur der Geraden ist. Ebenso ist in s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, die in ihre richtige Lage gebracht werden muss, indem man mit Os''_1 einen Bogen von O aus beschreibt, der in der ursprünglichen Lage der Axe Y die richtige Lage der zweit-vertikalen Projektion s''_1 dieser Spur bezeichnet. Von s''_1 auf Y eine Senkrechte in der horizontalen Tafel gezogen, so erhält man in s_1, dem Durchschnitte dieser Senkrechten mit der Verlängerung der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden ihre horizontale Spur. —

§. 95.

Ohne eine zweite Projektion zu benützen, kann man jede Spur der Geraden durch ein zweites Verfahren erhalten. Betrachten wir die horizontale Spur, so muss diese **erstens** in der Geraden liegen, und mithin (§. 72.) ihre horizontale Projektion in der horizontalen Projektion der Geraden, **zweitens** in der horizontalen Tafel selbst; folglich ist die horizontale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer horizontalen Projektion. Hieraus ist auch klar, dass die vertikale Spur im Durchschnittspunkte der Geraden mit ihrer vertikalen Projektion, und die zweit-vertikale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer zweit-vertikalen Projektion liegen muss. — (Fig. 61.) Legt man daher (§. 87.) das horizontal-projicirende Trapez um die horizontale Projektion $a_1 a_2$ in die horizontale Tafel, und verlängert in dieser horizontal-projicirenden Ebene die Gerade, bis sie ihre horizontale Projektion trifft, was hier in s_1 geschieht, so wird die horizontale Spur der Geraden erhalten. Legt man die vertikal-projicirende Ebene der Geraden um $a'_1 a'_2$ drehend in die vertikale Tafel, konstruirt in dieser (§. 87.) das Trapez $A_2 a'_2 a'_1 B$, so wird im Durchschnitte der Geraden $A_2 B_2$ mit ihrer vertikalen Projektion, nämlich s'_2 die vertikale Spur der Geraden sein, deren zweit-vertikale Spur auf ähnliche Weise in s''_3 erhalten wird. Wenn daher eine unbegränzte Gerade gegeben ist, so kann man dieselbe zuerst nach den Regeln des §. 73. begränzen, und dieses Verfahren einschlagen. Dieses Verfahren macht in Fig. 64. die zweit-vertikale Tafel überflüssig, indem man nur das vertikal-projicirende Trapez $a'_2 a'_1 B_2 A_2$ konstruiren darf, um die vertikale Spur s_2, und das horizontal-projicirende Trapez $a_1 A_1 B_1 a_2$ konstruiren darf, um die horizontale Spur s_1 der Geraden zu erhalten. —

§. 96.

Aufgabe 3. Die horizontale und vertikale Spur einer Geraden sind gegeben; man soll die Gerade durch ihre Projektionen angeben.

Auflösung. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion der horizontalen Spur in der Axe X, und nach §. 63. muss dieselbe auch in der Senkrechten liegen, die man von der horizontalen Projektion dieser Spur auf X zieht; mithin wird die vertikale Projektion dieser horizontalen Spur im Durchschnittspunkte der Senkrechten mit X liegen, die man von der horizontalen Spur auf X zieht. Ebenso wird die horizontale Projektion der angegebenen vertikalen Spur erhalten, wenn man von

letzterer auf X eine Senkrechte zieht. Nun liegen die beiden Spuren auf der Geraden, und mithin (§. 72.) ihre Projektionen auf den Projektionen der Geraden; daher müssen die Projektionen der Geraden durch die Projektionen der beiden Spuren gehen. Verbindet man daher die vertikale Spur der Geraden mit der vertikalen Projektion der horizontalen Spur, so erhält man die vertikale Projektion, und zieht man von der horizontalen Spur nach der horizontalen Projektion der vertikalen Spur eine Gerade, so erhält man die horizontale Projektion der Geraden, die mithin der Lage nach (§. 71.) völlig bestimmt ist. — (Fig. 51.) Ist z. B. s_1 die horizontale und s'_2 die vertikale Spur einer Geraden gegeben, so ziehe man von s_1 aus auf X eine Senkrechte, und man wird (§. 70) in s'_1 die vertikale Projektion von s_1 erhalten. Zieht man ferner von s'_2 auf X eine Senkrechte, so muss in s_2 die horizontale Projektion von s'_2 liegen. Zieht man nun die Gerade $s'_2 s'_1$ und $s_2 s_1$, so werden diese (§. 72.) die Projektionen der gesuchten Geraden sein, aus welchen auch ihre zweit-vertikale Projektion $s''_2 s''_1$, und die Lage derselben bestimmt werden kann. —

§. 97.

Aufgabe 4. Aus den Projektionen einer Geraden die Winkel zu bestimmen, welche dieselbe mit den Projektionstafeln macht.

Auflösung. Nach §. 21. wird der Winkel, den eine Gerade mit einer beliebigen Ebene macht erhalten, wenn man

1. die Gerade bis zur Ebene verlängert, und sodann ihre Spur nach §. 93. bestimmt;
2. von einem beliebig auf derselben angenommenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zieht, und den Fuss der letzteren bezeichnet, wodurch aber (§. 63.) die Projektion jenes Punktes auf dieser Ebene erhalten wird;
3. den Fuss der Senkrechten mit der Spur der Geraden durch eine Gerade (welche nach §. 73. die Projektion der Geraden ist) verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der gegebenen Geraden bildet der gesuchte sein.

Suchen wir daher den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so haben wir zuerst die horizontale Spur der Geraden zu bestimmen, sodann von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die horizontale Tafel eine Senkrechte zu ziehen, und den Fuss der letzteren mit der horizontalen Spur zu verbinden, um die Gerade zu erhalten, welche mit der gegebenen den gesuchten Winkel bildet. Da aber hierdurch zuerst die horizontale Projektion der Geraden gesucht wurde, welche in unserer Aufgabe schon als bekannt vorausgesetzt werden kann, so kann man hieraus schliessen, dass der Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet kein anderer ist, als der, den diese Gerade mit ihrer horizontalen Projektion bei genugsamer Verlängerung einschliesst. Ebenso ist der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel einschliesst kein anderer, als der, welchen dieselbe mit ihrer vertikalen Projektion macht; so dass man also sagen kann:

Der Winkel, welchen eine Gerade mit einer der Projektionstafeln einschliesst, wird erhalten, wenn man die Spur der Geraden in dieser Tafel sucht, dann die projicirende Ebene um die Projektion der Geraden dreht und in die Tafel legt, und in dieser projicirenden Ebene einen beliebigen Punkt der Geraden bestimmt, diesen mit der Spur durch eine Gerade verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der Projektion der Geraden macht, der gesuchte sein.

§. 98.

Beispiel. 1. (Fig. 65.) Ist b die horizontale und b′ die vertikale Spur einer Geraden, deren Projektionen a′b′ und ab gegeben sind, und man sucht den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so lege man die horizontal-projicirende Ebene, um ab dieselbe drehend in die horizontale Tafel, ziehe von a aus auf ab eine Senkrechte gleich a′a, wodurch man sodann den Punkt A in der horizontal-projicirenden Ebene erhält, dessen Projektionen a und a′ sind. Zieht man nun von A nach b eine Gerade, so wird $< Aba = < h$ der gesuchte sein, während Ab derjenige Theil der Geraden ist, der zwischen den beiden Spuren liegt. Legt man die vertikal-projicirende Ebene um a′b′ in die vertikale Tafel, zieht von b′ auf a′b′ die Senkrechte b′B = ′bb, so wird B in der vertikal-projicirenden Ebene den Punkt angeben, dessen Projektionen b und b′ sind. Verbindet man B mit a′ durch a′B, so wird $< Ba'b' = v$ der Winkel sein, den die Gerade mit der vertikalen Tafel macht. Auf ähnliche Weise kann man $< v' = Bc''b''$ erhalten, unter welchen die Gerade gegen die zweit-vertikale Tafel geneigt ist. —

Beispiel. 2. (Fig. 61.) Bei der Aufsuchung der Länge der Geraden $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3$ hat man schon $\sphericalangle B_1 s_1 a_1$ = dem Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel, $\sphericalangle A_2 s'_2 a'_2$ gleich dem Winkel, dem die Gerade mit der vertikalen Tafel macht, und endlich auch $\sphericalangle A_3 s''_3 a''_2$ gleich dem, den die Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel macht. —

Beispiel 3. (Fig. 60.) Hier hat man die Gerade zuerst so um (a'_1, a_1) gedreht, dass dieselbe parallel zur vertikalen Tafel wurde, mithin wird $\sphericalangle 'b_1' a_1 'b_2$ der Winkel sein, den die Gerade mit der horizontalen Tafel macht. Denn diese Gerade macht nach dieser Drehung mit der horizontalen Tafel denselben Winkel, welchen sie vorher bildete. Denken wir uns nämlich durch den fixen Punkt dieser Geraden eine zur horizontalen Tafel parallele Ebene gezogen, so macht diese mit der Geraden denselben Winkel, den letztere mit der horizontalen Tafel macht. Projicirt man nun den beweglichen Endpunkt der Geraden auf diese neue Ebene, so ist der Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten, dessen Hypothenuse die Länge dieser Linie, dessen eine Kathete die horizontale Projektion derselben; und dessen andere Kathete die Entfernung des Endpunktes von der Projektionstafel ist. Da aber diese drei Seiten auch während und nach der Drehung dieselben bleiben, so bleibt der Winkel auch derselbe. Sodann ist dieselbe Gerade um den Punkt $(a'a_1)$ gedreht, bis sie parallel zur horizontalen Tafel ist, wobei ihre horizontale Projektion $a_1 b_2$ ist, und endlich ist dieselbe parallel zur zweit-vertikalen Tafel gelegt, wobei $a''_1 b_3$ ihre zweit-vertikale Projektion ist; mithin ist $\sphericalangle b_2 a_1 b_1 = b''_3 a''_1 b''_1$ gleich dem Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel, und $\sphericalangle a_1 b_2 'b_2$ der Winkel, den diese Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel bildet.

§. 99.

Aufgabe 5. Aus den Winkeln, die eine Gerade mit den Projektionstafeln bildet und den Projektionen eines auf ihr liegenden Punktes, ihre Projektionen zu bestimmen.

Auflösung. Da (§. 76.) parallele Gerade auch parallele Projektionen haben, so denken wir uns vor Allem die Gerade durch einen Punkt der Axe gezogen, bestimmen in dieser Lage derselben die Projektionen noch eines ihrer Punkte, ziehen dann durch diesen Punkt nach dem in der Axe angenommenen eine Gerade, mit dieser sodann durch den gegebenen Punkt eine Parallele gezogen, gibt die gesuchte Gerade.

(Fig. 66.) Ist nun in der Axe X ein Punkt a angenommen, durch welchen die gesuchte Gerade gehen soll, und wir wollten den Winkel suchen, den sie mit der vertikalen Tafel bildet, so müssten wir von a aus ein beliebiges Stück derselben abschneiden, dieses vertikal-projiciren, und es wird der Winkel, den diese vertikale Projektion mit der Geraden bildet, der gesuchte sein. Dieser Winkel ist also in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypothenuse ein beliebig langer von a aus bezeichneter Theil der Geraden, dessen eine Kathete die Projektion dieses Theiles und dessen andere Kathete die vertikal-projicirende Linie ihres Endpunktes oder die horizontale Ordinate des letzteren ist. Da nun die Länge dieses Theiles der Geraden beliebig angenommen, mithin als bekannt vorausgesetzt werden kann, der Winkel v aber, den sie mit der vertikalen Tafel bildet gegeben ist; so kann dass genannte Dreieck konstruirt werden. Man denke sich dasselbe in die horizontale Tafel gelegt, dass der angenommene Theil L_2 der Geraden mit der Axe X den gegebenen Winkel v bildet, so wird ac' die Länge der vertikalen Projektion von L_2, $C_2 c'$ aber die horizontale Ordinate des Endpunktes C_2 der Geraden L_2 sein. Ebenso wird der Winkel h, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten sein, dessen Hypothenuse der Theil L_1, dessen eine dem Theile L_2 anliegende Kathete die horizontale Projektion von L_2, und dessen andere Kathete die horizontal-projicirende Linie des Endpunktes von L_2 oder seine vertikale Ordinate ist. Legt man also $L_1 = L_2$ in a an X unter dem Winkel h, und konstruirt das rechtwinklige Dreieck $a C_1 c$, so wird ac gleich der horizontalen Projektion von L_1 (oder L_2) sein.

Da nun ac gleich der horizontalen Projektion von L_2 ist, und diese horizontale Projektion durch den Punkt a der Geraden gehen muss, so wird der Endpunkt der horizontalen Projektion von L_2 von a so weit entfernt sein, als ac angibt, und mithin in dem Kreisbogen liegen, den man von a aus mit ac beschreibt. Da aber ferner $C_2 c'$ gleich der horizontalen Ordinate des Endpunktes von L_2 ist, so muss der Endpunkt der horizontalen Projektion dieser Geraden auch in der Parallelen liegen, die man in der Entfernung $C_2 c'$ mit X zieht. Es muss mithin die horizontale Projektion des Endpunktes der Geraden in dem Punkte liegen, in welchem der Kreisbogen von der durch C_2 mit X parallel gezogenen Geraden getroffen wird. Zieht man nun die Gerade ba, so ist diese die gesuchte horizontale Projektion von L_2. Um jetzt die vertikale Projektion der Geraden zu erhalten, kann man ent-

weder von b aus auf X eine Senkrechte, und in der Entfernung $C_1 c$ mit X eine Parallele ziehen, so wird in dem Durchschnittspunkte C′ dieser beiden Geraden die vertikale Projektion des Endpunktes von L_2 sein; oder man kann ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie bei der Aufsuchung der horizontalen Projektion. Zieht man nämlich aus a mit dem Halbmesser ac′ einen Kreibogen, so muss in diesem die vertikale Projektion von C_1 (oder C_2) liegen, weil ac′ gleich der vertikalen Projektion von L_2 (oder L_1) ist; die vertikale Projeklion dieses Endpunktes muss aber auch in der von C_1 aus in der Entfernung $C_1 c$ mit X parallel gezogenen Geraden liegen, weil $C_1 c$ die vertikale Ordinate dieses Punktes ist; mithin ist die vertikale Projektion dieses Punktes dort, wo die Parallele $C_1 b'$ den Kreisbogen 'c'b trifft, also in 'b. Zieht man die Gerade ab′, so ist diese die vertikale Projektion und ab ist die horizontale Projektion einer Geraden, welche die gegebenen Winkel mit den Projektionstafeln bildet. Legt man daher durch die vertikale Projektion jenes Punktes der Geraden mit a′b′ und mit ab durch die horizontale Projektion jenes Punktes eine Parallele, so erhält man (§. 76.) die Projektionen derjenigen Geraden, die man suchte, und welche letztere mithin völlig bestimmt ist. —

Anmerkung. Ist einer dieser beiden Winkel ein rechter, so steht die Gerade auf der Tafel, mit der sie einen rechten Winkel bildet, senkrecht, und ist mithin parallel zur andern Tafel. In diesem Falle sind die Projektionen der Geraden also leicht zu bestimmen. Ist einer der Winkel gleich 0, der andere aber ein spitzer, so ist der Winkel, den sie mit der zweit-vertikalen Tafel bildet, auch spitz, und die beiden letzteren in Summe gleich einem rechten; die Gerade selbst ist aber parallel mit der Tafel, mit der sie einen Winkel von o Grad bildet. —

§. 100.

Aufgaben zur Uebung.

1. Aus den horizontalen Projektionen zweier Punkte und ihren vertikalen Ordinaten ihre übrigen Projektionen sowohl, als auch ihre Entfernung zu konstruiren. —
2. Aus den Coordinaten zweier Punkte einer Geraden (für die drei Tafeln) die Projektionen der Geraden und die Entfernung dieser beiden Punkte zu bestimmen.
3. Es ist die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und der Winkel gegeben, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet; man soll ihre Projektionen bestimmen.
4. Die vertikale Projektion einer Geraden, ihr Winkel mit der vertikalen Tafel und ein Punkt ihrer vertikalen Projektion ist angegeben, man soll ihre Projektionen bestimmen. —
5. Die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und die Entfernung der horizontalen Spur von dem Punkte, dessen horizontale Projektion gegeben ist; man soll alles Uebrige bestimmen. —
6. Die horizontale Projektion eines Theiles einer Geraden ist gegeben, und der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel bildet; man soll die andere Projektion der Geraden und den Winkel, den sie mit der horizontalen Tafel einschliesst, bestimmen. —

Anmerkung. In welchen Fällen die eine oder die andere dieser Aufgaben unmöglich wird, soll der Anfänger selbst bestimmen. —

§. 101.

Aufgabe 6. Es sind zwei sich schneidende Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide Gerade gelegt werden kann.

Auflösung. Nach §. 10. kann man durch zwei Gerade, die sich schneiden, eine Ebene legen, und es sind daher die Spuren dieser Ebene anzugeben. Nun sollen die beiden Geraden ganz und gar in der gesuchten Ebene liegen, mithin muss sich auch jede ihrer Spuren in der Ebene befinden. Die Spuren dieser Geraden liegen aber zugleich in den entsprechenden Projektionstafeln, nämlich die horizontalen Spuren dieser Geraden in der horizontalen Tafel und ihre vertikalen Spuren in der vertikalen Tafel; suchen wir daher diese Spuren der Geraden, so haben wir in jeder der beiden Projektionstafeln zwei Punkte, die auch in der Ebene liegen. Verbinden wir nun die vertikalen Spuren beider Geraden durch eine Gerade, so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene, und die horizontalen Spuren beider Geraden verbunden, gibt die horizontale Spur der Ebene. Da nun von jeder dieser gegebenen Geraden zwei Punkte in der Ebene liegen, so müssen (§. 4.) diese beide Gerade ganz und gar in der Ebene enthalten sein, und mithin ist die Aufgabe gelöst. — Die zweit-vertikale Spur kann nach dem im §. 82. angegebenen Verfahren aus den beiden andern bestimmt werden. Man hätte dieselbe übrigens auch dadurch finden können, indem man die zweit-vertikalen Spuren beider Geraden gesucht, und diese durch eine Gerade verbunden hätte.

Anmerk. Zur Probe der gemachten Construktion dient der im §. 81. ausgesprochene Satz, dass nämlich

die Spuren einer Ebene in einem Punkte der Projektionsaxe zusammentreffen müssen,

§. 102.

(Fig. 67.) Ist b'c' die vertikale Projektion der einen, bc ihre horizontale Projektion, ad die horizontale Projektion der zweiten, 'ad' ihre vertikale Projektion, aa' die Projektionen des Durchschnittspunktes beider Geraden, so findet man (§. 93.) die horizontale Spur der ersten c, c', ihre vertikale Spur f, 'f; die horizontale Spur der zweiten in d, d', ihre vertikale Spur in m, 'm. Die beiden horizontalen Spuren durch eine Gerade verbunden gibt die horizontale Spur E der Ebene, und die beiden vertikalen Spuren der Geraden durch eine Gerade verbunden, gibt die vertikale Spur 'E der Ebene, wobei 'E und E in einem Punkte der Axe X sich treffen müssen, wenn kein Zeichnungsfehler gemacht wurde. Die zweit-vertikale Spur "E kann nun leicht gefunden werden. —

§. 103.

Aufgabe 7. Es sind zwei parallele Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche diese beiden Geraden enthält.

Auflösung. Da nach §. 80. eine Ebene durch zwei ihrer Spuren der Lage nach bestimmt ist; so bestimmen wir die horizontale und vertikale Spur dieser Ebene. Nun soll jede der gegebenen Geraden ganz und gar in der Ebene liegen, folglich liegen auch die Spuren dieser Geraden in der gesuchten Ebene. Diese Spuren sind aber zugleich Punkte der Projektionstafeln, und es werden daher (§. 79.) die Spuren der Ebene durch dieselben gehen müssen. Um also die Aufgabe zu lösen, bestimmen wir die horizontalen Spuren beider Geraden, verbinden diese horizontalen Spuren durch eine Gerade, so wird letztere die horizontale Spur der Ebene sein. Suchen wir sodann die vertikalen Spuren beider Geraden, und verbinden dieselben durch eine Gerade; so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene. Da von jeder der gegebenen Geraden zwei Punkte nun in der Ebene enthalten sind, so ist (§. 4.) jede dieser Geraden ganz und gar in der Ebene enthalten, und mithin (§. 11.) die Lage der Ebene völlig bestimmt. —

§. 104.

Beispiel. (Fig. 68.) Es sei $s_1 s_2$ die horizontale Projektion der ersten Geraden, $s'_1 s'_2$ ihre vertikale Projektion, $s_3 s_4$ die horizontale und $s'_3 s'_4$ die vertikale Projektion der zweiten Geraden, so suche man (§. 93.) die horizontale Spur s_1 der ersten und die horizontale Spur s_4 der zweiten Geraden, ziehe die Gerade $s_1 s_4$, so wird diese die horizontale Spur E der gesuchten Ebene sein. Sucht man auch (§. 93.) die vertikalen Spuren s'_2 und s'_3 beider Geraden, zieht $s'_2 s'_3$, so wird diese die vertikale Spur 'E der gesuchten Ebene sein. Beide Spuren müssen genugsam verlängert in einem Punkte der Axe zusammentreffen.

§. 105.

Aufgabe 8. Durch drei nicht in einer Geraden liegende und im Raume angegebene Punkte eine Ebene zu legen, und ihre Spuren zu bestimmen.

Auflösung. Verbindet man den ersten Punkt mit jedem der beiden andern durch Gerade, so erhält man zwei sich im ersten Punkte schneidende Gerade, auf welchen die beiden andern Punkte enthalten sind. Bestimmt man daher (§. 101.) die Spuren der Ebene, welche diese beiden Geraden enthält, so enthält diese Ebene auch die drei gegebenen Punkte. —

Beispiel. (Fig. 69.) Es seien a, a' die Projektionen des ersten, b, b' die Projektionen des zweiten, c, c' die Projektionen des dritten Punktes, so hat man von einem Punkte, dessen Projektionen c, c' sind, nach jedem der beiden anderen Gerade zu ziehen. Die Projektionen der einen dieser Geraden sind daher (§. 73.) c'a' und ca, die Projektionen der anderen sind 'cb' und cb. Sucht man nun (§. 93.) die horizontalen Spuren s_2, s_3 und die vertikalen Spuren 's_1, 's_4 dieser Geraden, zieht $s_2 s_3$ und $s'_1 s'_4$, so werden hierdurch die Spuren der Ebene erhalten, die in dem Punkte A der Axe X zusammentreffen müssen. —

§. 106.

Aufgabe 9. Es ist eine Gerade und ein Punkt ausserhalb der letzteren gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide gelegt werden kann.

Auflösung. Man kann hier eine der vorhergegangenen Aufgaben benützen zur Lösung dieser Aufgabe. Nimmt man nämlich (nach §. 73.) auf der Geraden einen Punkt an, verbindet denselben mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade, und legt nach §. 101. durch diese und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird man die gesuchte Ebene erhalten. Man kann aber auch die Aufgabe dadurch lösen, indem man vom gegebenen Punkte aus mit der Geraden (nach §. 76.) eine Parallele zieht, also durch die vertikale Projektion des Punk-

tes eine Parallele zur vertikalen Projektion der Geraden, und durch die horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Projektion der Geraden zieht, sodann durch diese beiden Parallelen, deren Projektionen bekannt sind (nach §. 103.) eine Ebene legt, so wird diese die gesuchte sein. — Endlich kann man auf der gegebenen Geraden zwei Punkte durch ihre Projektionen (§. 73.) annehmen, von denselben aus (§. 72.) Gerade nach dem gegebenen Punkte ziehen, und durch dieselben (§. 101.) eine Ebene legen; so wird die gegebene Gerade sowohl, als auch der Punkt in dieser Ebene enthalten, und letztere völlig bestimmt sein. —

(Fig. 70.) Ist z. B. C die horizontale und C′ die vertikale Projektion des gegebenen Punktes, A B die horizontale und ′A B′ die vertikale Projektion der G raden, so nehme man (§. 72.) auf letzterer einen Punkt durch seine Projektionen a, a′ an, ziehe von diesem aus nach dem Punkte C, C′ eine Gerade, deren Projektionen also (§. 72.) a C und a′′C sein werden. Sucht man nun die Spuren B und ′A der gegebenen Geraden, bestimmt sodann auch die der Hülfslinie a′′C, a C, verbindet die horizontalen Spuren beider Geraden sowohl, als auch ihre vertikalen Spuren durch gerade Linien, so erhält man die Spuren E und ′E der gesuchten Ebene. —

Anmerk. 1. Man wendet die eine oder die andere dieser Lösungen an, wenn man eine Ebene durch ihre Spuren bestimmen soll, und wählt jedenfalls jene, die am bequemsten ist. So wird man die erste Lösung anwenden, wenn die Spuren der Geraden noch auf den Projektionstafeln liegen; die letztere hingegen, wenn diess nicht der Fall ist. —

Anmerk. 2. Ist eine der gegebenen Geraden, durch welche eine Ebene gelegt werden soll, senkrecht auf einer Tafel, so wird (§. 45.) die Ebene auf derselben Projektionstafel senkrecht sein. — Soll durch zwei Gerade, die sich schneiden, oder unter sich parallel sind, eine Ebene gelegt werden, und sind beide Linien parallel mit einer Projektionstafel, so wird die Ebene (§. 36.) mit derselben Tafel parallel sein. —

§. 107.

Aufgabe 10. **Es ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, ferner die horizontale Projektion eines auf der Ebene sich befindenden Punktes; man soll seine vertikale Projektion bestimmen.**

Auflösung. Denkt man sich die Ebene durch ihre Spuren erzeugt, und nimmt zu diesem Zwecke die horizontale Spur der Ebene als Generatrix, und ihre vertikale Spur als Direktrix an, so wird (§. 5.) die Generatrix parallel mit der horizontalen Spur, also auch (§. 29.) mit der horizontalen Tafel parallel bleiben, und die vertikale Spur treffen. Die Generatrix wird aber auch bei ihrer Bewegung einmal durch den anzugebenden Punkt gehen, folglich (§. 72.) die horizontale Projektion dieser Lage der Generatrix durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes gehen. Da nun dieselbe parallel zur horizontalen Spur ist, so wird ihre horizontale Projektion parallel zur horizontalen Spur, ihre vertikale Projektion parallel zur Axe (§. 76.) sein. Zieht man daher durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Spur der Ebene, so wird diese die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den Punkt geht. Verlängert man nun diese horizontale Projektion bis zur Axe, so erhält man im Durchschnittspunkte mit letzterer die horizontale Projektion der vertikalen Spur dieser Generatrix (§. 93). Die vertikale Spur selbst liegt in der vertikalen Spur der Ebene, weil die Generatrix diese stets trifft. Zieht man daher (§. 63.) von der horizontalen Projektion dieser vertikalen Spur auf X eine Senkrechte, und verlängert dieselbe, bis sie von der vertikalen Spur der Ebene getroffen wird, so erhält man in diesem Durchschnittspunkte die vertikale Spur, und durch diese eine Parallele zur Axe gezogen, gibt die vertikale Projektion der Generatrix. Da nun die gesuchte vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) mit der horizontalen Projektion in einer auf X senkrecht stehenden Geraden, und (§. 72.) in der vertikalen Projektion der erwähnten Lage der Generatrix liegen muss, so wird die vertikale Projektion des Punktes im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Generatrix mit der Senkrechten liegen, die man von seiner horizontalen Projektion aus auf X zieht, und kann mithin leicht gefunden werden. Die ganze Lösung dieser Aufgabe besteht also darin, dass man diejenige Lage der Generatrix der Ebene projicirt, die durch den gegebenen Punkt geht, sodann auf dieser Linie (§. 73.) die vertikale Projektion des Punktes bestimmt, dessen horizontale Projektion angegeben ist. —

Anmerk. 1. Auf gleiche Weise würde man verfahren, wenn die vertikale Projektion des Punktes gegeben, seine horizontale Projektion aber gesucht wäre. Man kann hierbei die horizontale Spur der Ebene als Generatrix und sodann ihre vertikale Spur als Direktrix, oder die vertikale Spur als Generatrix, und die horizontale Spur als Direktrix betrachten, und nach der in dem letzten §. angegebenen Lösung diejenige Lage der Generatrix projiciren, welche durch den Punkt geht, dessen vertikale oder horizontale Projektion gegeben ist. —

Anmerk. 2. Wäre die horizontale und vertikale Ordinate des Punktes gegeben, der in der Ebene liegen soll, so lege man — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix derselben betrachtend — in der Entfernung, welche die vertikale Ordinate des Punktes angibt, eine Ebene parallel zur horizontalen Tafel, so ist diese die

vertikal-projicirende Ebene der Generatrix, weshalb also ihre vertikale Spur auch durch die vertikale Projektion des gesuchten Punktes (§. 85.) gehen muss. Diese vertikale Spur ist aber (§. 85.) eine in der vertikalen Tafel parallel zur X gezogene Gerade, die von X um die vertikale Ordinate des Punktes absteht, und ist mithin die vertikale Projektion der gesuchten Lage der Generatrix. Die horizontale Projektion dieser Lage der Generatrix kann nun leicht gefunden werden, weil ihre Richtung und die vertikale Spur der Generatrix bekannt ist, und auf dieser horizontalen Projektion kann nun nach §. 73. die horizontale Projektion des gesuchten Punktes angegeben werden. —

§. 108.

Beispiel 1. (Fig. 71.) Ist E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, a die horizontale Projektion eines Punktes in der Ebene, dessen vertikale Projektion gesucht werden soll; so ziehe man (§. 107.) durch a die Gerade ab parallel mit E, von b aus auf X die Gerade bb′ senkrecht; sodann von 'b mit X die Gerade 'ab′ parallel, und endlich von a aus auf X eine Senkrechte, die in 'a von 'a'b durchschnitten wird, wodurch man sodann in 'a die vertikale Projektion des Punktes erhält. Dabei ist E die Generatrix und 'E Direktrix der Ebene, ab die horizontale und 'a'b die vertikale Projektion derjenigen Lage dieser Generatrix, die durch den gesuchten Punkt geht. Betrachtet man 'E als Generatrix, so wird die horizontale Projektion jeder Lage derselben parallel mit X sein, und man hat mithin durch a eine Parallele ac mit X zu ziehen, um die horizontale Projektion dieser bestimmten Lage zu erhalten. Zieht man nun von c aus auf X die Senkrechte c'c, von 'c aus mit 'E die Parallele 'c'a, so wird im Durchschnitte 'a mit der auf X senkrecht stehenden Geraden a'a die vertikale Projektion des gesuchten Punktes sein. Die zweit-vertikale Projektion kann man entweder nach §. 67. oder dadurch finden, dass man die vertikale Projektion einer Generatrix der Ebene aufsucht. Hier ist a″b″ die zweit-vertikale Projektion der durch a_1'a gehenden Lage der Generatrix, die mit E parallel ist, und mithin in "a, dem Durchschnittspunkte von sa″ mit b″a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes. — Ist die vertikale Projektion 'a des Punktes angegeben, so ziehe man — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix betrachtend — 'ab′ parallel mit X, von 'b auf X die Senkrechte 'bb, durch b mit E die Parallele ba, so wird in a dem Durchschnittspunkte von ba mit a'a die horizontale Projektion des Punktes sein. Oder man ziehe von 'a mit 'E die Parallele 'a'c, von 'c aus auf X die Senkrechte 'cc, durch c mit X die Parallele ca, so ist wieder in a dieselbe horizontale Projektion. —

Beispiel 2. (Fig. 71.) Es sei A die horizontale und 'A die vertikale Projektion eines Punktes, der in derselben Entfernung von den beiden Projektionstafeln bleibend, verschoben werden soll, bis er in der Ebene liegt; so ziehe man 'A'b und Aa parallel mit X, betrachte 'aA als vertikale Projektion einer Lage der Generatrix — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix — so wird ihre horizontale Projektion durch b gehen und parallel mit E, folglich ba sein. Im Durchschnittspunkte a von ba mit Aa ist mithin die horizontale Projektion, und folglich in 'a, dem Durchschnittspunkte von a'a mit A'a die vertikale Projektion des gesuchten Punktes. — Betrachtet man Aa als horizontale Projektion einer Lage der Generatrix — folglich 'E als Generatrix — so wird c′a′ die vertikale Projektion derselben, und mithin in a′, dem Durchschnittspunkte von 'Aa' mit 'ae′ die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale Projektion a nach §. 73. gefunden werden kann.

Beispiel 3. (Fig. 72.) Ist E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, abcde die horizontale Projektion eines Fünfeckes, das in der Ebene liegt, und man soll seine vertikale Projektion finden; so wiederhole man das im vor. §. angegebene Verfahren mehrmal. Man denke sich nämlich durch die einzelnen Punkte, deren horizontale Projektionen a, b, c, d, e sind, einzelne Lagen der Erzeugenden gezogen (betrachte dabei die horizontale Spur als Generatrix), ziehe $aa_1 \nparallel bb_1 \nparallel cc_1 \nparallel dd_1 \nparallel ee_1 \nparallel E$, so erhält man die horizontalen Projektionen dieser einzelnen Lagen der Erzeugenden. Da nun a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 die horizontalen Projektionen ihrer vertikalen Spuren sind, so sind diese letzteren durch die Senkrechten $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$, $e_1e'_1$ bestimmt, und müssen in a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1 sein. Zieht man also die mit X parallelen Geraden a_1a', b_1b', c_1c', d_1d', e_1e', so erhält man die vertikalen Projektionen dieser einzelnen Lagen der Erzeugenden, und mithin werden die vertikalen Projektionen der Scheitel des Fünfeckes (§. 72.) durch die auf X senkrecht stehenden Geraden aa′, bb′ etc. etc. bestimmt, und in a′, b′, c′, d′, e′ sein, und es ist also a′b′c′d′e′ die vertikale Projektion des Fünfeckes. Die zweit-vertikale Projektion a″b″c″d″e″ kann entweder auf ähnliche Weise oder nach einem früher (§. 67.) angegebenen Verfahren bestimmt werden. —

§. 109.

Aufgabe 11. Es sind zwei Gerade (durch ihre Projektionen) angegeben; man soll durch eine derselben eine Ebene legen, die parallel zur zweiten ist.

Auflösung. Nimmt man auf der einen dieser Geraden einen Punkt (§. 72.) durch seine Projektionen an, legt durch denselben eine Gerade parallel zur zweiten, indem man (§. 76.) durch die vertikale Projektion des Punktes eine Parallele zur vertikalen Projektion, und durch die horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Projektion der Geraden zieht, und bestimmt nun (§. 101.) die Ebene, welche diese Parallele und die erste Gerade enthält, so wird diese Ebene (§. 29.) auch parallel zur zweiten Geraden und mithin die gesuchte sein. —

Beispiel. (Fig. 73.) Es sei L_1 die horizontale, $'L_1$ die vertikale Projektion einer Geraden, L_2 die horizontale und $'L_2$ die vertikale Projektion einer andern Geraden: man soll durch L_1, $'L_1$ eine Ebene parallel mit L_2, $'L_2$ legen. Nimmt man (§. 72.) in m die horizontale und in m' die vertikale Projektion eines Punktes an, zieht $m_1 s_1 \neq L_1$, $m's'_1 \neq 'L_1$, so wird die Gerade, deren Projektionen $m s_1$, $m' s'_1$ sind, parallel mit der Geraden L_1, $'L_1$ sein. Sucht man nun die horizontale Spur s_2 der ersten Geraden und die horizontale Spur s_3 der Geraden $m s$, $m' s'_1$ (§. 93.), so muss $s_2 s_3$ die horizontale Spur E der gesuchten Ebene sein, deren vertikale Spur (§. 81.) durch S gehen muss. Bestimmt man nun die vertikale Spur s'_1 der Geraden $m s$, $m' s'_1$ (nach §. 93.), zieht $S s'_1$, so erhält man auch die vertikale Spur 'E der gesuchten Ebene.

§. 110.

Aufgabe 12. Die Communsektion zweier durch ihre Spuren angegebene Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. (Fig. 74.) Ist E_1 die horizontale, E'_1 die vertikale und $''E_1$ die zweit-vertikale Spur der einen, E_2 die horizontale, $'E_2$ die vertikale und $''E_2$ die zweit-vertikale Spur der andern Ebene, so verlängere man die Spuren in einer und derselben Tafel, bis sie sich schneiden, und man erhält hierdurch im Durchschnitte der vertikalen Spuren einen Punkt a'_1, welcher beiden Ebenen angehört, weil er sich auf ihren Spuren befindet. Aus demselben Grunde ist der Durchschnittspunkt a_2 der beiden horizontalen Spuren ein Punkt beider Ebenen, also ein Punkt ihrer Communsektion. Nun liegt aber der Punkt a'_1 in der vertikalen und a_2 in der horizontalen Tafel, folglich ist a'_1 die vertikale und a_2 die horizontale Spur der gesuchten Communsektion. Um daher die Communsektion beider Ebenen durch ihre Projektionen anzugeben, verfahre man nach §. 96., so erhält man C die horizontale und 'C die vertikale Projektion der Communsektion, deren zweit-vertikale Projektion ''C entweder nach §. 67. oder ebenso gefunden werden kann, wie die beiden übrigen Projektionen bestimmt wurden. **Schneiden sich also die horizontalen Spuren sowohl, als auch die vertikalen Spuren beider Ebenen, so erhält man sogleich die horizontale und vertikale Spur der Communsektion, und kann also (§. 96.) die Projektionen derselben bestimmen.** Ebenso leicht würde diess geschehen können, wenn sich statt der vertikalen oder horizontalen die zweit-vertikalen Spuren beider Ebenen schneiden würden. —

Anmerk. Nicht immer liegen die Ebenen gegen die Projektionstafeln so, dass sich ihre Spuren schneiden; indem die Durchschnittspunkte derselben weit über die Gränzen unserer Tafeln liegen, oder die Spuren in einer Tafel parallel, in der andern aber sich schneiden können, wenn man dieselben genugsam verlängert. Wir wollen daher in den folgenden Paragraphen einzelne dieser Fälle betrachten, und ihre Auflösung zeigen. —

§. 111.

Beispiel 1. (Fig. 75.) E_1 sei die horizontale und E die vertikale Spur der einen, E_2 und $'E_2$ die Spuren der andern Ebene, man soll die Communsektion beider Ebenen bestimmen. Man verfahre hierbei wieder genau nach der im vor. §. angegebenen Regel: verlängere nämlich die horizontalen Spuren, so werden sich dieselben in a_2 schneiden, und suche den Durchschnittspunkt a'_1 der vertikalen Spuren. Letzterer befindet sich noch auf dem oberhalb der horizontalen Tafel liegenden Theil der vertikalen Tafel, ersterer aber liegt in der rückwärtigen Verlängerung beider Tafeln. Projicirt man nun a_2, so wird dessen vertikale Projektion (§. 70.) in a'_1, seine horizontale Projektion aber a_2 selbst sein. Die horizontale Projektion von a'_1 ist (§. 70.) in a_1, dem Endpunkte der Senkrechten $a'_1 a_1$, weshalb also (§. 96.) $a_1 a_2$ oder C die horizontale, $a'_2 a'_1$ oder 'C die vertikale Projektion der Communsektion sein wird, von welcher der Theil, dessen Projektionen $a_2 a_1$ und $a'_2 a'_1$ sind, im zweiten Quadranten liegt. —

Beispiel 2. (Fig. 76.) Hier schneiden sich die horizontalen Spuren E_1 und E_2 in a_2, einem Punkte desjenigen Theiles der horizontalen Tafel, der vor der vertikalen Tafel liegt, der Durchschnittspunkt a'_1 der beiden vertikalen Spuren aber

liegt in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel. Projicirt man nun (§. 70.) diese Punkte, so ist in a'_2 die vertikale Projektion von a_2, in a_1 die horizontale Projektion von a'_1, mithin (§. 72.) $a_2 a_1$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion der Communsektion. Der Theil von letzterer, dessen Projektionen $a_2 a_1$ und $a'_2 a'_1$ sind, liegt im vierten Quadranten.

Beispiel 3. (Fig. 77.) Ist E_1 die horizontale, $'E_1$ die vertikale Spur der einen, E_2 die horizontale, $'E_2$ die vertikale Spur der andern Ebene, und schneiden sich die horizontalen Spuren in dem Punkte a_1, der in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel liegt, und die vertikalen Spuren in dem Punkte $'a_2$ in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel, so ist (§. 70.) in $'a_1$ die vertikale Projektion von a_1 und a_2 die horizontale Projektion von a'_2, mithin $a_1 a_2$ oder C die horizontale und $a'_1 a'_2$ oder $'C$ die vertikale Projektion der Communsektion. Der Theil von letzterer, der zwischen den Durchschnittspunkten der Spuren liegt, befindet sich im dritten Quadranten. —

Beispiel. 4. (Fig. 80.) Liegen beide Ebenen so gegen die Tafeln, dass ihre vertikalen Spuren sowohl, als auch ihre horizontalen Spuren in einem Punkte S_1 der Axe X zusammentreffen, so bestimme man (§. 82.) ihre zweit-vertikalen Spuren $S'_1 S''_1$ und $'S_2 S''_2$, suche den Durchschnittspunkt a'' der letzteren, bestimme (§. 70.) die vertikale Projektion a' und die horizontale Projektion a desselben, ziehe $S_1 a'$, $S_1 a$, so erhält man die vertikale und horizontale Projektion der Communsektion (§. 72.). Da (§. 70.) die zweit-vertikale Projektion von S_1 oder S_2 in O sein muss, so wird Oa'' die zweit-vertikale Projektion der Communsektion sein. —

Anmerk. In allen diesen Beispielen hat man durch Verlängerung der gleichnamigen Spuren der Ebene die Spuren ihrer Communsektion, und letztere sodann (§. 96.) bestimmt. —

§. 112.

Es soll nun die Communsektion zweier Ebenen gefunden werden, wenn die Spuren einer Tafel sich noch auf letzterer schneiden, die Spuren der andern Tafel aber parallel sind. —

Beispiel 1. (Fig. 78.) Die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ schneiden sich in a'; die horizontalen Spuren E_1 und E_2 sind unter sich parallel. Betrachtet man die horizontalen Spuren beider Ebenen als ihre Erzeugungslinien, und denkt sich dieselben fortbewegt, bis sie durch den Punkt a' gehen, so werden dieselben, wenn sie durch diesen Punkt gehen, in eine Gerade zu liegen kommen, weil sie beide (§. 28.) unter sich parallel sind. Diese beiden Geraden müssen aber sodann auch in beiden Ebenen zugleich liegen, und bilden daher die Communsektion der Ebenen. *Es ist also die Communsektion dieser beiden Ebenen (von welchen die horizontalen Spuren parallel sind) mit den horizontalen Spuren und mit der horizontalen Tafel parallel.* Nun ist die vertikale Projektion einer jeden horizontalen Spur in X, folglich muss (§. 76.) die vertikale Projektion der Communsektion parallel mit X und ihre horizontale Projektion parallel mit E_1 und E_2 sein. Es muss aber auch die vertikale Projektion der Communsektion (§. 72.) durch $'a$ und ihre horizontale Projektion durch a gehen; zieht man daher $'a'C$ parallel X und aC parallel E_1 oder E_2, so erhält man die beiden Projektionen der Communsektion. —

Beispiel 2. (Fig. 79.) Es seien die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ wieder parallel unter sich und zugleich senkrecht auf X, die horizontalen Spuren E_2 und E_1 schneiden sich in a, so ist a ein Punkt der horizontalen und $'a$ ein Punkt der vertikalen Projektion der Communsektion. Nun müssen aber (§. 83.) beide Ebenen senkrecht auf der horizontalen Tafel, und mithin auch (§. 48.) ihre Communsektion senkrecht auf dieser Tafel stehen. Da aber a die horizontale Spur dieser Communsektion ist, so ist (§. 74.) a zugleich ihre horizontale Projektion, und zieht man $a\,a'C$ senkrecht auf X, so wird (§. 70.) die vertikale Projektion von a in a' und (§. 74.) $a'C$ die vertikale Projektion der Communsektion sein. —

Beispiel 3. (Fig. 81.) Die horizontalen Spuren beider Ebenen seien E_1 und E_2, die vertikalen Spuren seien $'E_1$ und $'E_2$ und die zweit-vertikalen Spuren (§. 82.) $''E_1$ und $''E_2$. Ferner seien die horizontalen und die vertikalen Spuren mit X parallel, so ist (§. 83.) jede dieser Ebenen parallel mit X und senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel. Da nun diese beiden Ebenen senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel sind, so ist (§. 48.) auch ihre Communsektion auf dieser Tafel senkrecht. Der Durchschnittspunkt c'' der beiden zweit-vertikalen Spuren ist aber die zweit-vertikale Spur der Communsektion, folglich ist c'', (§. 74.) die zweit-vertikale Projektion der Communsektion. Nach §. 70. ist c' die vertikale und c die horizontale Projektion von $''c$, und nach §. 76. muss daher C' die vertikale und C die horizontale Projektion der Communsektion sein. —

§. 113.

Endlich soll durch einige Beispiele noch gezeigt werden, wie man die Projektionen zweier

Punkte der Communsektion erhalten kann, wenn die vertikalen Spuren oder die horizontalen Spuren sich auf unsern Zeichnungstafeln nicht mehr schneiden.

Beispiel 1. (Fig. 82.) Die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ zweier Ebenen schneiden sich in a'_1, ihre horizontalen Spuren schneiden sich aber auf den Tafeln nicht mehr. Vor Allem hat man in a'_1 die vertikale und (§. 70.) in a_1 die horizontale Projektion eines Punktes der Communsektion. Um nun die Projektionen eines zweiten Punktes derselben zu bestimmen, betrachte man $'E_1$ als Erzeugende der einen und $'E_2$ als Erzeugende der andern Ebene, und projicire zwei solche Erzeugende der Ebenen, die sich schneiden, so werden die Projektionen ihres Durchschnittspunktes einem in beiden Ebenen zugleich enthaltenen Punkte, also einem Punkte der Communsektion angehören. Zu diesem Zwecke ziehe man eine Ebene parallel mit der vertikalen Tafel (also senkrecht auf die horizontale Tafel), so wird die horizontale Spur $g_1 g_2$ dieser Ebene erstens parallel mit X sein müssen, und (§. 73.) die horizontale Projektion jeder Geraden sein, die in dieser Ebene liegt. Man kann daher $g_1 g_2$ als horizontale Projektion zweier Geraden betrachten, von welchen die eine, eine Lage der Erzeugenden von $E_1 S_1 'E_1$ und die andere eine Lage der Erzeugenden von $E_2 S_2 'E_2$ ist, so wird g_1 die horizontale Spur der einen und g_2 die horizontale Spur der andern Erzeugenden sein, deren vertikale Projektionen (§. 70.) in g'_1 und g'_2 sein müssen. Zieht man daher $g'_1 a'_1 \neq E'_1$ und $g'_2 a'_2 \neq 'E_2$, so erhält man (§. 107.) die vertikalen Projektionen dieser Erzeugenden, die sich in $'a_2$ der vertikalen Projektion des Durchschnittspunktes der Erzeugenden schneiden müssen. Zieht man nun $a'_2 a_2$ senkrecht auf X, so erhält man (§. 70.) die horizontale Projektion a_2 des Durchschnittspunktes beider Erzeugenden, und zieht man ferner die Geraden $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$, so sind dieselben die Projektionen der gesuchten Communsektion. —

Beispiel 2. (Fig. 83.) Hier schneiden sich die horizontalen Spuren noch auf den Tafeln, die vertikalen Spuren aber nicht, man hat also a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion eines Punktes der Communsektion. Um noch einen zweiten Punkt zu erhalten, ziehe man $g'_1 g'_2 \neq X$, betrachte diese Gerade als gemeinschaftliche vertikale Projektion zweier Erzeugenden der Ebenen, so werden sich dieselben schneiden, weil sie eine einzige vertikal-projicirende Ebene haben, also in einer Ebene liegen. Da in g'_1 die vertikale Spur der einen Erzeugenden und in g'_2 die vertikale Spur der anderen ist, so werden die horizontalen Projektionen dieser Erzeugenden erhalten, wenn man die horizontalen Projektionen g_1 und g_2 von g'_1 und g'_2 bestimmt, sodann $g_1 a_2 \neq S_1 a_1$ und $g_2 a_2 \neq S_2 a_1$ zieht. Diese horizontale Projektionen schneiden sich in a_2, welcher Punkt die horizontale Projektion des Durchschnittspunktes der Erzeugenden im Raume, und dessen vertikale Projektion a'_2 ist. Zieht man also $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$, so erhält man die horizontale und vertikale Projektion der Communsektion. —

Beispiel 3. (Fig. 84.) Es schneiden sich weder die vertikalen noch die horizontalen Spuren beider Ebenen auf den begränzten Projektionstafeln; man soll die Projektionen der Communsektion angeben.

Ist $E_1 S_1 'E_1$ die eine, $E_2 S_2 'E_2$ die andere Ebene, so nehme man in so grosser Entfernung von der horizontalen Tafel, als es thunlich ist, eine Ebene parallel zu derselben an, denke sich in derselben eine Lage der Erzeugenden der einen und eine Lage der Erzeugenden der andern Ebene gezogen, so wird die vertikale Spur $g'_1 g'_2$ jener Hülfsebene die gemeinschaftliche vertikale Projektion beider Erzeugenden sein. Da man hierbei die horizontalen Spuren beider Ebenen als ihre Erzeugungslinien angenommen hat, so wird g'_1 die vertikale Spur der angenommenen Lage der Erzeugenden für Ebene $E_2 S_2 'E_2$, und mithin die von g_1 mit E_2 parallel gezogene Gerade die horizontale Projektion dieser Lage der Erzeugenden sein. Ebenso erhält man die horizontale Projektion der angenommenen Lage der Erzeugenden von Ebene $E_1 S_1 'E_1$, wenn man $g_2 a_1 \neq E_1$ zieht. Diese beiden Lagen der Erzeugenden beider Ebenen werden sich schneiden als Gerade, die in einer Ebene liegen, und man erhält daher in a_1 die horizontale und in a'_1 die vertikale Projektion ihres Durchschnittspunktes. Nimmt man ebenso eine zweite Ebene an parallel mit der horizontalen Tafel, und denkt sich in dieser eine Lage der Erzeugenden von einer und eine solche von der andern Ebene gezogen, so werden dieselben eine gemeinschaftliche vertikale Projektion haben müssen, und diese sei $g'_3 g'_4$. Hierzu findet man $g_3 a_2$ die horizontale Projektion für die Lage der Erzeugenden einer Ebene und $g_4 a_2$ die horizontale Projektion der Lage der Erzeugenden von der andern Ebene. Diese beiden Erzeugenden müssen sich schneiden, und es ist mithin a_2 die horizontale Projektion ihres Durchschnittspunktes, dessen vertikale Projektion (§. 73.) in a'_2 sein wird. Da nun sowohl $a_1 a'_1$, als auch $a_2 a'_2$ der Ebene angehört, so wird $a_1 a_2$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion

der Communsektion sein. Die Auflösung eines Falles dieser Art besteht also darin, dass man zwei Lagen der Erzeugungslinien beider Ebenen konstruirt, die sich schneiden, wodurch sodann ein Punkt der Communsektion erhalten wird. Sodann wiederholt man dieses Verfahren, um noch einen zweiten Punkt der Communsektion zu erhalten, verbindet beide Punkte durch eine Gerade, so erhält man die Communsektion beider Ebenen. —

§. 114.

Aufgabe 13. Den Durchgangspunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, wenn die Gerade durch ihre Projektionen und die Ebene durch ihre Spuren angegeben ist.

Auflösung. Legt man durch die Gerade eine beliebige Ebene, so wird diese die gegebene Ebene schneiden müssen. Die Communsektion dieser beiden Ebenen wird von der gegebenen Geraden geschnitten, weil letztere und jene Communsektion in der Hülfsebene liegen, und nicht parallel sein können. Dieser Durchschnittspunkt der Communsektion und der gegebenen Geraden gehört nun sowohl der gegebenen Ebene, als auch der Geraden an, und ist mithin der gesuchte Durchschnittspunkt. Man wird daher bei der Auflösung dieser Aufgabe auf folgende Weise verfahren:

1. Suche man (nach §. 93.) die Spuren der Geraden.
2. Nehme man eine Spur der Hülfsebene beliebig an, z. B. die horizontale Spur; indem man durch die horizontale Spur der Geraden eine Gerade zieht, die sowohl die Axe, als auch die horizontale Spur der gegebenen Ebene trifft.
3. Ziehe man vom Durchschnittspunkte der horizontalen Spur der Hülfsebene mit der Axe nach der vertikalen Spur der Geraden eine gerade Linie, so erhält man (§. 80.) die vertikale Spur der Hülfsebene.
4. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion zwischen der gegebenen und der Hülfsebene, so müssen (§. 77.) die Projektionen derselben von den Projektionen der gegebenen Geraden geschnitten werden. Diese Durchschnittspunkte beider Projektionen sind die Projektionen des gesuchten Durchgangspunktes. —

Anmerk. 1. Da die Hülfsebene nur die gegebene Gerade enthalten soll, und ausserdem willkührlich gewählt werden kann, so wird man dieselbe so nehmen, dass man ihre Communsektion mit der gegebenen Ebene leicht bestimmen kann. Man kann daher zur Vereinfachung der Construktion auch eine der projicirenden Ebenen der gegebenen Geraden benützen, welche leicht aufzusuchen ist, indem eine Projektion der Geraden schon eine Spur dieser Hülfsebene und ihre andere Spur senkrecht auf der Axe (§. 83.) sein muss. —

Anmerk. 2. Liegt die Gerade so, dass ihre Projektionen die Axe nicht auf den Tafeln schneiden, so nehme man ausserhalb der Geraden einen Punkt an, ziehe durch diesen (mit Benützung des in §. 77. angegebenen Satzes) zwei Gerade so, dass sie die gegebene Gerade schneiden. Legt man durch jene zwei Gerade eine Ebene, und sucht ihre Communsektion mit der gegebenen Ebene auf, so erhält man den gesuchten Durchgangspunkt. —

§. 115.

Beispiel 1. (Fig. 85.) Es sei $EA'E$ die gegebene Ebene und $L'L$ die Gerade; man soll den Durchgangspunkt der letzteren mit der Ebene bestimmen. Man suche (nach 93.) die horizontale Spur C und die vertikale B' der Geraden, ziehe eine beliebige Gerade CG, und nehme diese als horizontale Spur der Hülfsebene an, so wird FBH die vertikale Spur der letzteren sein. Nun ziehe man HG und HG', so erhält man (§. 110.) die Projektionen der Communsektion, und es wird daher der Durchschnittspunkt von $H'G'$ mit L', nämlich D' die vertikale und der Durchschnittspunkt von HG mit L, nämlich D die horizontale Projektion des gesuchten Durchgangspunktes sein. —

Beispiel 2. (Fig. 86.) Es sei wieder $L'L$ die Gerade und EAE' die gegebene Ebene, so wird man hier die in Anmerkung 1. des vor. §. angegebene Regel anwenden, und als Hülfsebene die horizontal-projicirende Ebene der Geraden $L'L$ benützen. Für diese Hülfsebene ist also $S_1 S_2$ die horizontale und die auf X senkrecht gezogene Gerade $S_2{}'S_2$ die vertikale Spur. Bestimmt man (§. 70.) die vertikale Projektion $'S_1$ von S_1, zieht die Geraden $S_1 S_2$ und $'S_2{}'S_1$, so werden diese (nach §. 110.) die Projektionen der Communsektion, und mithin die Durchschnittspunkte D, $'D$ dieser Projektionen mit den Projektionen L, $'L$ der Geraden die Projektionen des gesuchten Durchgangspunktes sein. —

Beispiel 3. (Fig. 87.) Sind die beiden Spuren E, $'E$ der gegebenen Ebene parallel mit X, L, $'L$ die Projektionen der Geraden, so kann man eine der projicirenden Ebenen der letzteren benützten, um ihren Durchgangspunkt mit der gegebenen Ebene zu erhalten. Nimmt man L als horizontale Spur der Hülfsebene an, so wird die zugehörige vertikale Spur (§. 83.) senkrecht auf X, und mithin BB' sein. Der Durchschnittspunkt B' von $B'B$ mit $'E$ ist die vertikale und der Durch-

schnittspunkt H von L mit E ist die horizontale Spur der Communsektion (§. 110.), folglich (§. 96.) B'H' die vertikale und BH die horizontale Projektion derselben. Nun wird 'L von B'H' in 'D durchschnitten, folglich ist 'D die vertikale Projektion des Durchgangspunktes, dessen horizontale Projektion D nach §. 72. bestimmt werden muss. — Man hätte hier auch die vertikal-projicirende Ebene der Geraden benützen können, um die Projektionen D, D' des Durchgangspunktes zu erhalten. Die Construktion ist eine ähnliche, und man kann dieselbe aus der Figur ersehen. —

Beispiel 4. (Fig. 88.) Es sei ES'E die gegebene Ebene, 'B'A sei die vertikale, S die horizontale Projektion einer Geraden, die senkrecht auf der horizontalen Tafel steht. Legt man durch diese Gerade eine Hülfsebene, so muss dieselbe (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Ist also AC die horizontale Spur dieser Hülfsebene, so muss (§. 83.) ihre vertikale Spur die von C auf X gezogene Senkrechte C'C sein. Bestimmt man nach §. 110. die Communsektion von Ebene FC'C und 'ESE, so wird die vertikale Projektion 'CF' derselben die vertikale Projektion 'A'B der Geraden in 'D schneiden, welcher Punkt die vertikale Projektion des Durchgangspunktes sein muss. Die horizontale Projektion dieses Punktes fällt (§. 75.) mit A zusammen; mithin ist A die horizontale und 'D die vertikale Projektion des Durchgangspunktes. —

Beispiel 5. (Fig. 89.) EA'E sei die gegebene Ebene, L'L die Gerade, von welcher der Durchgangspunkt mit Ebene EA'E bestimmt werden soll. Da die Projektionen dieser Geraden die Axe X auf den Tafeln nicht mehr schneiden, so nehme man ausserhalb der Geraden einen Punkt pp' an, lege durch diesen und die Gerade eine Ebene, so werden die Spuren der letzteren T und T' sein. Nach §. 110. die Communsektion ab, a'b' zwischen der gegebenen und der Hülfsebene bestimmt, so erhält man im Durchschnitte von 'a'b mit 'L die vertikale und im Durchschnitte von ab mit L die horizontale Projektion des Durchgangspunktes, und es sind also D und 'D die Projektionen des gesuchten Punktes. —

§. 116.

Aufgabe 14. Es sei eine Ebene und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben; man soll die Entfernung dieses Punktes von der Ebene bestimmen.

Auflösung. Nach (§. 17.) ist der Abstand eines Punktes von einer Ebene die Senkrechte, welche man vom Punkte auf die Ebene ziehen kann. Man ziehe deshalb durch die vertikale Projektion des Punktes eine Senkrechte auf die vertikale Spur und von der horizontalen Projektion des Punktes aus eine Senkrechte auf die horizontale Spur der Ebene, so erhält man (§. 84.) die Projektionen der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt auf die Ebene senkrecht gezogen werden kann. Sucht man nun nach §. 114. den Durchgangspunkt dieser Senkrechten und der Ebene, und bestimmt nach §. 87. die Entfernung des gegebenen und des Durchgangspunktes, so wird diese Entfernung auch der gesuchte Abstand sein. —

§. 117.

Beispiel. (Fig. 90.) Es sei EA'E die gegebene Ebene, A'A die Projektionen eines Punktes; zieht man von 'A auf 'E die Gerade 'AB', und von A auf E die Gerade AB senkrecht, so wird jene die horizontale und diese die vertikale Projektion der Senkrechten sein, die man von A'A auf EA'E ziehen kann (§. 84.). Nimmt man nun AC als horizontale Spur einer Hülfsebene an, so wird, wenn diese die Gerade enthalten soll, ihre vertikale Spur die Senkrechte CC' sein. Von Y auf X die Senkrechte YY', sodann Y'C' gezogen, so wird letztere (§. 110.) die vertikale Projektion der Communsektion von der gegebenen und der Hülfsebene sein. Der Durchschnittspunkt 'D ist die vertikale Projektion des Durchgangspunktes der Senkrechten mit der Ebene, dessen horizontale Projektion nach (§. 73.) erhalten, und D sein wird. Construirt man nun das Trapez ABNM, in welchem DN = aD', AM = b'A ist, so wird nach §. 87. die Gerade MN der Abstand des gegebenen Punktes A'A von der Ebene sein. —

§. 118.

Aufgabe 15. Es ist eine Ebene und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Ebene parallel zur gegebenen ziehen.

Auflösung. Da die gesuchte Ebene parallel zur gegebenen sein muss, so wird auch (§. 85.) die horizontale Spur jener Ebene parallel zur horizontalen Spur der gegebenen, und die vertikale Spur der gesuchten parallel zur vertikalen Spur der gegebenen Ebene sein müssen. Geben wir daher von jeder Spur jener Ebene einen Punkt an, so wird dieselbe bestimmt werden können. Um von der vertikalen Spur einen Punkt zu erhalten, nehmen wir die horizontale Spur als Generatrix der Ebene an, und denken uns diejenige Lage von letzterer projicirt, die durch den gegebenen Punkt geht; so wird die horizontale Projek-

tion derselben (§. 72.) durch die horizontale Projektion des Punktes gehen, und (§. 113.) parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene ihre vertikale Projektion wird (§. 72.) durch die vertikale Projektion des Punktes gehen und (§. 74.) parallel mit X sein. Zieht man daher die Projektionen dieser Lage der Generatrix, und bestimmt ihre vertikale Spur, so wird dieser Punkt auf der Direktrix der Ebene, also auf ihrer vertikalen Spur enthalten sein. Legt man nun durch diesen Punkt eine Gerade parallel zur vertikalen Spur, und durch den Punkt, in welchem diese Gerade die Axe X trifft, eine Parallele zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene, so werden diese erhaltenen Geraden (§. 86.) die Spuren der gesuchten Ebene sein. — Trifft die vertikale Spur der Ebene die Axe auf den Tafeln nicht, so nehme man diese vertikale Spur als Generatrix der Ebene an, und bestimme diejenige Lage dieser Generatrix, welche durch den gegebenen Punkt geht. Von dieser Lage der Generatrix die horizontale Spur bestimmt (§. 93.), und durch letztere eine Gerade parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene gezogen, gibt die horizontale Spur der Ebene. —

Anmerk. Liegt der gegebene Punkt in einer der Tafeln, so geht durch denselben schon die eine Spur der Ebene, und es kann dieselbe sodann leicht, so wie auch ihre vertikale Spur bestimmt werden. —

§. 119.

Beispiel. (Fig. 91.) Ist ES, 'E die gegebene Ebene, und es soll durch den Punkt, dessen horizontale Projektion A und dessen vertikale 'A ist, eine Ebene gelegt werden, die parallel zur gegebenen ist, so betrachte man die horizontalen Spuren dieser Ebenen als Erzeugungslinien derselben, ziehe Aa $\neq$ E, ferner 'Aa' parallel X, so wird jene die horizontale und diese die vertikale Projektion derjenigen Lage der Erzeugenden der gesuchten Ebene sein, welche durch den gegebenen Punkt geht. Von a aus auf X die Senkrechte aa' gezogen gibt (§. 93.) in a' die vertikale Spur der Erzeugenden, und a' S_2 $\neq$ 'E gezogen, gibt die vertikale Spur der gesuchten Ebene. Ihre horizontale Spur wird entweder erhalten, wenn man S_2b $\neq$ E zieht, oder durch den Punkt eine Gerade zur vertikalen Spur 'E parallel legt, von dieser die horizontale Spur b sucht, und bS_2 $\neq$ E zieht. —

§. 120.

Aufgabe 16. Es ist eine Gerade durch ihre Projektionen gegeben und ein Punkt; man soll durch letzteren eine Ebene legen, die senkrecht auf der Geraden steht.

Auflöung. Aus §. 85. ersieht man, dass die Spuren der zu suchenden Ebene senkrecht auf den entsprechenden Projektionen der Geraden sein müssen. Zieht man daher senkrecht auf die vertikale Projektion der Geraden eine Gerade, so wird mit dieser die vertikale Spur der Ebene parallel sein, und eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Geraden gezogen, so wird mit dieser die horizontale Spur der Ebene parallel sein müssen. Da nun der gegebene Punkt auf der gesuchten Ebene liegen soll, so wird auch die Erzeugende dieser Ebene einmal durch denselben gehen müssen. Man betrachte daher die vertikale Spur der Ebene als Generatrix derselben, ziehe durch die vertikale Projektion des Punktes eine Parallele zur Generatrix und durch seine horizontale Projektion eine Parallele mit X, so erhält man diejenige Lage der Generatrix, welche durch den gegebenen Punkt geht. Sucht man von derselben die horizontale Spur, zieht durch letztere eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Geraden, verlängert diese Senkrechte, bis die Axe X getroffen wird, und fällt von diesem Durchschnittspunkte auf die vertikale Projektion der Geraden eine Senkrechte, so erhält man die Spuren der gesuchten Ebene. Trifft die horizontale Spur der Ebene die Axe X nicht, so lege man durch den Punkt eine zweite Gerade, die parallel zu dieser horizontalen Spur ist, suche von dieser Geraden ihre vertikale Spur, und ziehe durch letztere eine Senkrechte auf die vertikale Projektion der Geraden, so erhält man die vertikale Spur der gesuchten Ebene.

Anmerk. 1. Man kann auch die zweit-vertikale Spur der zu suchenden Ebene zuerst bestimmen, und sodann von ihrem Durchschnittspunkte mit Z auf die vertikale Projektion der Geraden eine Senkrechte, und von ihrem Durchschnittspunkte mit Y auf die horizontale Projektion der Geraden eine Senkrechte ziehen, so werden diese beiden Senkrechten die Spuren der gesuchten Ebene sein. —

Anmerk. 2. Liegt ein Punkt in einer Ebene, und man zieht durch denselben eine Parallele zu einer Spur dieser Ebene, so wird diese Parallele immer als eine Lage der Erzeugungslinie der Ebene betrachtet werden können, und mithin ganz und gar in der Ebene liegen. Eine solche Parallele wird aber (§. 29.) auch parallel mit der Tafel sein, in welcher die Erzeugende der Ebene liegt, und mithin wird die eine Projektion der Parallelen parallel zur Erzeugenden, die andere mit X parallel sein (§. 76.) Wenn man also von der horizontalen Projektion eines in einer Ebene liegenden Punktes eine Parallele zur horizontalen Spur der Ebene, und durch seine vertikale Projektion eine Parallele zur Axe X zieht, so

erhält man immer die Projektionen einer Geraden, die sich in der Ebene befindet, und mithin wird die vertikale Spur dieser Geraden der vertikalen Spur der Ebene angehören. Dasselbe findet auch statt, wenn man die vertikale Spur der Ebene als Erzeugende derselben betrachtet. —

§. 121.

Beispiel. (Fig. 92.) L'L sei die gegebene Gerade und A'A ein Punkt, durch welchen eine Ebene senkrecht auf diese Gerade gezogen werden soll. Man ziehe A a senkrecht auf L und 'A a' ≠ X, bestimme (§. 93.) von dieser Geraden die vertikale Spur 'a, so muss 'a ein Punkt der vertikalen Spur der Ebene sein. Von 'a auf 'L die Gerade 'E senkrecht gezogen, diese bis X verlängert, und von ihrem Durchschnittspunkte S mit X auf L die Senkrechte E gezogen, so wird E S'E die gesuchte Ebene sein. Zieht man von 'A aus senkrecht auf 'L die Senkrechte 'A'b und durch A mit X die Gerade A b parallel, bestimmt (§. 93.) die horizontale Spur b dieser Geraden, so erhält man einen zweiten Punkt von E, so dass letztere auch bestimmt werden könnte, wenn der Punkt S ausserhalb der Gränze unserer Zeichnungstafeln liegen würde. —

§. 122.

Aufgabe 17. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Auflösung. Legt man nach §. 120. vom Punkte aus eine Ebene senkrecht auf die Gerade, sucht den Durchgangspunkt von letzterer mit der Ebene, und verbindet diesen Durchgangspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade, so wird letztere (§. 4.) ganz und gar in der Ebene liegen, und (§. 7.) senkrecht auf der gegebenen Geraden stehen; folglich ist die Gerade, die man vom Durchgangspunkte der gegebenen und der Ebene nach dem gegebenen Punkte zieht, die gesuchte Entfernung des Punktes von der gegebenen Geraden.

Beispiel. (Fig. 93.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, A die horizontale und 'A die vertikale Projektion eines Punktes, so ziehe man 'A s' senkrecht auf 'L und A s senkrecht auf L, bestimme von A s, 'A s' (§. 93.) die horizontale Spur s, ziehe s S senkrecht auf L und S V senkrecht auf 'L, so wird (§. 120.) Ebene H S V senkrecht auf L'L stehen und durch den gegebenen Punkt gehen. Bestimmt man nun (§. 114.) den Durchgangspunkt D D' von L'L und Ebene H S V, zieht 'D'A und D A, so erhält man die Projektionen des gesuchten Abstandes, dessen Länge B F nach §. 87. bestimmt werden kann.

§. 123.

Aufgabe 18. Die kürzeste Entfernung zweier Geraden zu finden, die im Raume unter sich parallel sind.

Auflösung. Man nehme eine Ebene an, die senkrecht auf beiden Geraden steht, kann also nach den Regeln des §. 73. auf einer der Geraden einen beliebigen Punkt annehmen, von diesem aus nach §. 120. auf die zweite Gerade eine Ebene senkrecht legen, so wird letztere (§. 27.) auch auf der ersten Geraden senkrecht stehen. Nun bestimme man (§. 114.) den Durchgangspunkt der zweiten Geraden mit der Hülfsebene, ziehe von diesem aus nach dem auf der ersten Geraden angenommenen Punkte eine Gerade, so wird letztere auf beiden gegebenen Geraden senkrecht stehen (§. 7.), und ist mithin der Abstand derselben. In Fig. 93. ist ein zu dieser Aufgabe gehöriges Beispiel ausgeführt. —

§. 124.

Aufgabe 19. Es sind zwei Gerade gegeben, die weder parallel sind, noch sich schneiden; man soll

1. ihre kürzeste Entfernung bestimmen,
2. den Ort angeben, in welchem diese Entfernung beide Gerade trifft. —

Auflösung. In §. 53. wurde bewiesen, dass man für diese zwei Gerade eine gerade Linie finden kann, die auf beiden zugleich senkrecht steht, und dort wurde auch der Weg gezeigt, welchen man einschlagen muss, um zur Bestimmung dieses Abstandes zu gelangen. Man hat nämlich auf folgende Weise zu verfahren:

1. Muss man durch die erste Gerade eine Ebene legen, die parallel zur zweiten Geraden ist. Diess wird nach §. 109. dadurch geschehen, indem man von einem beliebigen Punkte der ersten Geraden eine Parallele zur zweiten zieht, und (§. 101.) die Ebene bestimmt, welche diese Parallele und die erste Gerade enthält.
2. Hat man von einem beliebigen Punkte der zweiten Geraden auf die Hülfsebene eine Senkrechte zu ziehen, und den Durchgangspunkt derselben zu bestimmen, wobei also ganz nach §. 116. zu verfahren ist; so wird diese Senkrechte (§. 53.) schon gleich der kürzesten Entfernung beider Geraden sein. —
3. Um nun auch den Ort zu bestimmen, in welchem diese Entfernung auf beiden Geraden senkrecht steht, ziehe man (§. 76.) durch den Durch-

gangspunkt jener Senkrechten und der Ebene eine Parallele zur zweiten Geraden, so liegt diese Parallele ganz und gar in der Hülfsebene, und schneidet daher die erste Gerade.

4. Von diesem Durchschnittspunkte aus eine Parallele mit der ersten Senkrechten gezogen, so wird von dieser Parallelen die zweite Gerade (§. 53.) geschnitten, und der zwischen beiden Geraden enthaltene Theil dieser Parallelen wird auf beiden senkrecht stehen, und ihrer kürzesten Entfernung gleich sein. —

§. 125.

Beispiel. (Fig. 94.) Sind $L_1{}'L_1$ die Projektionen der einen Geraden, $L_2 L'_2$ die Projektionen der zweiten Geraden, so nehme man auf der ersten Geraden einen Punkt a a′ an, dessen vertikale Projektion a′ in 'L und dessen horizontale Projektion a in L (§. 72.) liegen muss. Zieht man nun durch diesen Punkt mit der Geraden $L_2{}'L_2$ eine Parallele, so wird $a'\,'b \neq {}'L_2$ und $a b \neq L_2$ (§. 76.) sein müssen. Nun lege man durch diese Parallele und $L_1{}'L_1$ eine Ebene nach §. 101., und es sei E die horizontale und 'E die vertikale Spur dieser Ebene. Nimmt man nun (§. 73.) auf $L_2{}'L_2$ einen Punkt durch seine Projektionen m m′ an, zieht m′ p′ senkrecht auf 'E und m p senkrecht auf E, sucht von dieser Geraden (§. 114.) den Durchgangspunkt mit der Ebene, dessen Projektionen D 'D sind, so erhält man die horizontale Projektion m D und die vertikale Projektion m′ D′ der kürzesten Entfernung beider Geraden. Zieht man $D f \neq L_2$ und $D' f' \neq L'_2$, von f′ die Gerade 'f n parallel m′ D′ und von f aus die Gerade $f n \neq m D$, so werden f n und f′ n′ gleich den Projektionen des kürzesten Abstandes sein, und mithin die Gerade, deren Projektionen f n und f′ n′ sind, die gesuchte sein, weil sie die kürzeste Entfernung beider Geraden ist, und auf denselben (§. 53.) senkrecht sein muss.

Anmerk. Liegen beide Gerade so, dass man durch die eine und einen Punkt der andern eine Ebene legen kann, welche senkrecht auf der letztern ist, so wird die Gerade, die man vom Fusse der letzteren auf die erste Gerade zieht, der kürzeste Abstand beider Geraden sein.

§. 126.

Aufgabe 20. Die Winkel zu bestimmen, welche eine Ebene mit den Projektionstafeln bildet.

Auflösung. Nach §. 43. wird der Winkel zweier Ebenen gefunden, wenn man in ihrer Communsektion einen Punkt annimmt, von diesem aus auf jene zwei Senkrechte zieht, von welchen die eine in der ersten, die andere in der zweiten Ebene liegt, und sodann den Winkel dieser beiden Geraden konstruirt, so wird derselbe der gesuchte sein. In §. 50. wurde aber gezeigt, dass dieser Neigungswinkel in einer Ebene enthalten ist, die man auf die Communsektion der beiden gegebenen Ebenen senkrecht zieht; daher wird der Winkel, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel bildet, auf folgende Weise bestimmt:

1. Man nehme in der horizontalen Spur der gegebenen Ebene einen Punkt an, und ziehe von diesem aus auf die horizontale Spur eine Ebene senkrecht. Da nun diese Hülfsebene senkrecht auf einer in der horizontalen Tafel liegenden Geraden ist, so wird dieselbe (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen, mithin (§. 83.) ihre vertikale Spur senkrecht auf X und (§. 84.) ihre horizontale Spur senkrecht auf der horizontalen Spur der gegebenen Ebene sein. Diese Hülfsebene kann also leicht gefunden werden.
2. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene, so wird der Winkel, den diese Communsektion mit der horizontalen Spur der Hülfsebene bildet, der gesuchte sein. Um nun diesen Winkel konstruiren zu können, konstruire man das rechtwinklige Dreieck, in welchem die Theile der Spuren der Hülfsebene, welche zwischen den Spuren der gegebenen Ebene und X liegen, Katheten sind, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes die Communsektion der Hülfsebene und der gegebenen sein, und mit der horizontalen Spur der Hülfsebene den Winkel bilden, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel macht. Durch ein ähnliches Verfahren kann man den Winkel erhalten, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel macht. — Im folgenden Paragraphe soll durch ein Beispiel die Construktion ausgeführt werden. —

§. 127.

Beispiel. (Fig. 95.) Ist E S 'E die Ebene, deren Neigungswinkel mit der horizontalen Tafel bestimmt werden soll, so nehme man in der horizontalen Spur E einen Punkt A an, lege durch diesen die Ebene A a a′ senkrecht auf E, so wird die horizontale Spur A a dieser Ebene senkrecht auf E, ihre vertikale Spur a a′ senkrecht auf X sein. Denkt man sich nun die Communsektion A a′ beider Ebenen, so wird diese mit A a einen Winkel bilden, welcher der gesuchte ist. Dieser Winkel ist aber in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete A a und dessen andere a a′ ist; daher wird derselbe erhalten, wenn man Ebene A a a′ um A a dreht und in die horizontale Tafel niederlegt, so-

dann aC senkrecht auf Aa zieht und gleich aa' macht, die Gerade AC zieht, so wird diese die Communsektion von Ebene Aaa' und Ebene ES'E sein, und < CAa der gesuchte. —

Soll der Winkel bestimmt werden, den die Ebene ES'E mit der vertikalen Tafel bildet, so ziehe man aB' senkrecht auf Sa' und ab senkrecht auf X in der horizontalen Tafel, wodurch Ebene B'ab erhalten wird, die senkrecht auf 'E steht und deren Communsektion mit der gegebenen Ebene gegen aB' unter denselben Winkel geneigt ist, den Ebene ES'E mit der vertikalen Tafel bildet. Dreht man nun Ebene baB' um bB', und legt sie in die vertikale Tafel, so wird der Punkt b in der Geraden aD bleiben, die senkrecht auf aB ist, und macht man aD = ab, so erhält man den Ort des Punktes D. Nun ziehe man B'D, so wird diese die Communsektion der Ebene AaB' und der Ebene ES'E sein, und folglich < DB'a der gesuchte. —

Anmerk. 1. Dreht man Ebene Aaa' um aa' und legt dieselbe links von dieser Linie in die vertikale Tafel, so beschreibt A einen Kreisbogen vom Halbmesser aA, und kömmt nach der Drehung nach F, folglich ist Fa' die Communsektion von Ebene Aaa' und Ebene ES'E, und < a'Fa = < aAC = h dem Winkel, den Ebene ES'E mit der horizontalen Tafel bildet. —

Auf gleiche Weise kann man den Winkel, welchen Ebene ES'E mit der vertikalen Tafel bildet erhalten, wenn man Ebene B'ab um ab dreht, und links von ab in die horizontale Tafel legt. Dabei beschreibt 'B einen Kreisbogen vom Halbmesser aB' und kömmt nach G zu liegen, wodurch also < bGa = < DB'a = v wird. —

Anmerk. 2. In den Fig. 96., 97. und 98. sind noch einige Beispiele über die Aufsuchung des Winkels einer Ebene und der Tafeln. —

§. 128.

Aufgabe 21. (Fig. 95.) Es ist die horizontale Spur einer Ebene gegeben und der Winkel, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel bildet; man soll die vertikale Spur der Ebene bestimmen.

Auflösung. Ist E die horizontale Spur der Ebene und v' der Winkel, welchen dieselbe mit der vertikalen Tafel macht, so nehme man in der Axe einen beliebigen Punkt G an, und lege von diesem aus an die Axe den gegebenen Winkel, und konstruire nun das rechtwinklige Dreieck, welches die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene enthält. Zu diesem Ende verlängere man den zweiten Schenkel Gb des Winkels v, bis die horizontale Spur E der Ebene getroffen wird, so wird Gb die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene sein. Zieht man daher ba senkrecht auf X, so wird aG die vertikale Spur und ba die horizontale Spur der Hülfsebene sein, und diese beiden Spuren haben in der Axe den Punkt a gemeinschaftlich. Da nun die Hülfsebene, welche den Winkel der gegebenen Ebene und der vertikalen Tafel enthält, senkrecht auf der gesuchten vertikalen Spur stehen muss, so wird letztere erhalten, wenn man von a aus mit aG einen Kreisbogen beschreibt, und von S aus eine Tangente an diesen Bogen zieht. Da von S aus zwei Tangenten an diese Peripherie gezogen werden können, so wird es auch zwei Ebenen geben, die eine gemeinschaftliche horizontale Spur E haben, und unter den gegebenen Winkel gegen die vertikale Tafel geneigt sind —

§. 129.

Aufgabe 22. Es sind die Winkel gegeben, welche eine Ebene mit den beiden Tafeln macht, ferner die Projektionen eines auf der Ebene liegenden Punktes; man soll die Spuren der Ebene bestimmen. —

Auflösung. Die Auflösung dieser, so wie die der vorigen Aufgabe geht aus der Anmerkung des §. 127. hervor. Dort wurde erwähnt, das man das rechtwinklige Dreieck, das den Winkel der Ebene und der horizontalen Tafel enthält, auch in der vertikalen Tafel verzeichnen kann, wenn man die diesen Winkel enthaltende Hülfsebene um ihre vertikale Spur dreht, und in die vertikale Tafel legt. Nun ist die eine Kathete dieses Dreieckes der Theil der vertikalen Spur der Hülfsebene, welcher zwischen der Axe und der vertikalen Spur der gesuchten Ebene liegt; die andere Kathete ist die vom Durchschnittspunkte der einen Kathete mit X auf die horizontale Spur der Ebene gefällte Senkrechte, mit welcher die Hypothenuse den Winkel bildet, den die Ebene mit der horizontalen Tafel macht. (Fig. 96.) Nehmen wir daher in der Axe den beliebigen Punkt F an, machen Fa beliebig lang, legen in F an X in der vertikalen Tafel den Winkel an, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel bildet, ziehen aa' senkrecht auf X, so wird diese Linie von Fa' in a' getroffen, und es ist mithin Faa' das erwähnte rechtwinklige Dreieck, folglich aa' die vertikale, aF die horizontale Spur der Hülfsebene. Da nun a'F die Communsektion der gesuchten und der Hülfsebene ist, so wird a' ein Punkt der vertikalen Spur der gesuchten Ebene sein, ihre horizontale Spur muss Tangente des Kreises sein, den man aus a mit aF beschreibt. Es wurde ferner in der Anmerkung des §. 127. erwähnt, dass man den Winkel, wel-

chen die Ebene mit der vertikalen Tafel macht, in der horizontalen Tafel konstruiren kann, wenn man die vertikale Spur der von a aus auf die vertikale Spur der gesuchten Ebene senkrecht gelegten Hülfsebene auf X trägt, und aG gleich dieser vertikalen Spur macht, sodann den Endpunkt b ihrer horizontalen Spur mit G durch eine Gerade verbindet, so wird $\angle$ bGa der Neigungswinkel der Ebene und der vertikalen Tafel sein. Wenn man daher von a aus eine beliebige Gerade aG auf X annimmt, von G aus in der horizontalen Tafel an X den Winkel anlegt, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel bildet, von a aus auf X die Gerade ab senkrecht zieht, so wird diese von Gb in b getroffen, und es ist mithin b ein Punkt der horizontalen Spur der gesuchten Ebene. Von b aus eine Tangente bA an den von a aus mit aF konstruirten Kreisbogen gezogen gibt die horizontale Spur der gesuchten Ebene, deren vertikale Spur 'aS nun leicht erhalten werden kann. Da von b aus zwei Tangenten an die Peripherie des von a aus mit aF gezogenen Kreises möglich sind, so werden auch zwei Ebenen erhalten, welche die Bedingung erfüllen. Zieht man nun von dem gegebenen Punkte m m' aus (nach §. 118.) eine Ebene T V'T parallel zu einer dieser beiden gefundenen, so erhält man die gesuchte Ebene. —

§. 130.

Aufgabe 23. Es ist eine Ebene gegeben und ein Punkt derselben durch seine Projektionen; man soll die Ebene um eine ihrer Spuren drehen, und in die mit dieser Spur gleichnamige Tafel legen, sodann den Ort des Punktes bestimmen.—

Auflösung. Soll die durch ihre Spuren angegebene Ebene um ihre horizontale Spur gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt werden, so wird jeder auf derselben liegende Punkt einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist (§. 23.). Betrachtet man daher irgend einen auf der Ebene liegenden Punkt, dessen Projektionen gegeben sind, so wird man dessen Lage, nachdem die Ebene in die horizontale Tafel gelegt ist, leicht bestimmen können. Da nämlich dieser Punkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist, so bleibt er während und nach der Drehung in der Ebene dieses Kreisbogens, und kömmt mithin nach der Drehung in die horizontale Spur dieser Ebene zu liegen. Diese Ebene steht nun senkrecht auf der horizontalen Spur der gegebenen Ebene, und muss daher (§. 45.) auch senkrecht auf der horizontalen Tafel sein, weshalb also ihre horizontale Spur durch die horizontale Projektion des betrachteten Punktes gehen muss (§. 83., Anmerk.). Nun muss aber die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der genannte Punkt beschreibt, nach §. 24. auf der horizontalen Spur gegebenen Ebene senkrecht stehen; zieht man daher von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, so erhält man die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der angenommene Punkt beschreibt, und der Mittelpunkt dieses Kreises liegt im Durchschnitte der horizontalen Spur seiner Ebene mit der Drehungsaxe. Um nun den Ort dieser horizontalen Spur der Ebene des Kreisbogens zu bestimmen, nach welchem der Punkt nach der Drehung zu liegen kömmt, darf man nur die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsaxe angeben. Diese Entfernung ist aber die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die horizontal-projicirende Linie also gleich der vertikalen Ordinate, und dessen andere Kathete der Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe ist. Construirt man daher dieses Dreieck, und trägt seine Hypothenuse auf die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Drehungsaxe gezogene Senkrechte von ihrem Durchschnittspunkte mit der Drehungsaxe aus, so erhält man die Lage des Punktes, nachdem die Ebene, auf welcher er sich befindet, in die horizontale Tafel gelegt wurde. Um also die Construktion für die Lage eines Punktes, der sich auf einer Ebene befindet, welche um ihre horizon-Spur gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt wird, auszuführen, verfahre man auf auf folgende Weise:

1. Ziehe man von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und verlängere diese nach derjenigen Seite hinaus, auf welche man die Ebene legen will.
2. Construire man über die Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe als eine Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, dessen andere Kathete gleich der vertikalen Ordinate des Punktes ist.
3. Vom Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der Drehungsaxe, welche von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Drehungsaxe gezogen wurde, trage man nun auf jene Senkrechte die Hypothenuse des Dreieckes auf, so wird der bezeichnete Endpunkt die Lage desjenigen sein, dessen Projektionen angegeben sind. — Auf gleiche Weise wird man verfahren, wenn eine durch ihre Projektionen angegebene Figur, die in einer Ebene liegt, bestimmt werden soll. —

§. 131.

Beispiel. (Fig. 99.) Ist E die horizontale, 'E die vertikale Spur einer Ebene, ferner abcde die horizontale Projektion eines auf dieser Ebene liegenden Fünfeckes, so bestimme man zuerst nach §. 107. seine vertikale Projektion a'b'c'd'e', ziehe von der horizontalen Projektion a aus auf E die Gerade aC_1 senkrecht, errichte von a aus auf aC_1 die Gerade a'A senkrecht, mache a'A = m'a, und ziehe C_1'A. Trägt man nun C_1'A von C_1 aus auf die Verlängerung von aC_1, so erhält man den Punkt A, dessen Projektionen a und a' sind. Auf gleiche Weise kann man die Lage der Punkte B, C, D, E finden, die durch ihre Projektionen bb', cc', dd', ee' angegeben sind. Soll man einen Punkt der vertikalen Spur, z. B 'F angeben, so bestimme man (§. 79.) seine horizontale Projektion F, ziehe FG senkrecht auf E, fälle von F aus auf FG die Gerade FF_1 senkrecht, ziehe GF_1, und trage GF_1 auf GF_2, indem man zugleich $GF_2 = GF_1$ macht, so erhält man die Lage des Punktes F' nach der Drehung und die Gerade SF_2 wird sodann die Lage der vertikalen Spur dieser Ebene sein, wenn dieselbe um E gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt wird. —

§. 132.

Aufgabe 24. Eine Ebene, deren Spuren angegeben sind, ist um ihre horizontale Spur gedreht, und die horizontale Tafel niedergelegt worden, ferner ist auf derselben ein Punkt angegeben; man soll die Projektionen des Punktes bestimmen, nachdem die Ebene wieder in ihre erste Lage gebracht worden ist.

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe benützen wir die in §. 130. erhaltenen Resultate. Dort wurde nämlich erwähnt, dass die Entfernung des Punktes im Raume von der Drehungsaxe gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete die Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe, und dessen andere Kathete gleich der vertikalen Ordinate des Punktes ist. Da aber dieses rechtwinklige Dreieck in einer auf der horizontalen Spur senkrechten Ebene liegt, so ist derjenige Winkel desselben, den seine Hypothenuse mit der horizontalen Spur seiner Ebene — also mit der Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe — bildet, das Maass des Winkels der gegebenen Ebene und der horizontalen Tafel nach §. 126. Nun ist aber die Hypothenuse des genannten Dreieckes, nämlich die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe bekannt, und der Winkel, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel macht, kann nach §. 126. konstruirt werden, folglich kann die Construktion dieses Dreieckes ausgeführt werden. Zieht man also von dem gegebenen Punkte aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und verlängert dieselbe gegen X, legt sodann den Neigungswinkel der Ebene und der horizontalen Tafel vom Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Drehungsaxe aus an die Verlängerung dieser Senkrechten, trägt auf den zweiten Schenkel dieses Winkels die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe, und fällt von dem hierdurch erhaltenen Endpunkte aus auf den ersten Schenkel eine Senkrechte, so wird letztere gleich der vertikalen Ordinate des Punktes, ihr Endpunkt aber die horizontale Projektion des Punktes sein, dessen vertikale Projektion nun leicht bestimmt werden kann.

§. 133.

Beispiel. (Fig. 100) Es sei E die horizontale, 'E die vertikale Spur einer Ebene, welche um E gedreht, und in die horizontale Tafel niedergelegt wurde, ferner A ein auf dieser umgelegten Ebene enthaltener Punkt, man soll die Ebene wieder in diejenige Lage bringen, welche durch ihre Spuren angegeben wird, und die Projektionen von A bestimmen. Zu diesem Zwecke ziehe man von A aus auf E die Senkrechte Am, so ist diese die horizontale Spur der Ebene des Kreises welchen der Punkt beim Zurückbringen in seine erste Lage beschreibt. Diese Ebene wollen wir sogleich benützen, um den Winkel der Ebene und der horizontalen Tafel sogleich bestimmen zu können, welches nach §. 126. geschehen kann, und der durch den Winkel xm'A = h gemessen wird. Legt man nun in m an mx diesen Winkel an, macht ferner m'A = mA, und zieht 'Aa senkrecht auf mx, so wird a die horizontale Projektion des Punktes A sein, dessen vertikale Projektion nach §. 65. erhalten wird, und a sein muss.

Ist nun ABCD ein in der umgelegten Ebene angegebenes Quadrat, so kann man jeden einzelnen Scheitel desselben durch Wiederholung des vorigen Verfahrens projiciren. Man kann zur Abkürzung der Construktion den Winkel h in C an X legen, sodann C'A = CA machen, 'Am' senkrecht auf X und 'Aa' parallel mit X ziehen, sodann ma = Cm' machen, aa' senkrecht auf X fällen, so erhält man im Durchschnitt a' von aa' mit 'Aa' die vertikale und in a die horizontale Projektion des Punktes A. Auf gleiche Weise werden die Projektionen abcd, a'b'c'd' des Quadrates ABCD bestimmt. —

§. 134.

Aufgabe 25. Den Winkel zu bestimmen, welchen zwei Gerade einschliessen.

Auflösung. Legt man durch beide Gerade eine Ebene, und dreht diese letztere um eine ihrer Spuren, bis sie in eine der Tafeln zu liegen kömmt, so wird der Winkel beider Geraden sichtbar. Man wird also nach §. 101. die Spuren der Ebene beider Geraden bestimmen, von welchen bloss eine nothwendig ist, z. B. die horizontale Spur, sodann die Ebene um diese Spur drehen, und in die horizontale Tafel legen. Bei dieser Umlegung bleiben die horizontalen Spuren beider Geraden liegen, weshalb man also bloss noch die Lage ihres Durchschnittspunktes in der umgelegten Ebene anzugeben hat, was nach §. 130. geschieht. Zieht man nun von diesem Durchschnittspunkte nach den Spuren beider Geraden gerade Linien, so erhält man die gegebenen Geraden in der umgelegten Ebene, die also den verlangten Winkel mit einander bilden. —

§. 135.

Beispiel. (Fig. 101.) Es seien $L_1 'L_1$ die Projektionen der ersten, $L_2 'L_2$ die Projektionen der zweiten Geraden, a, a' seien die Projektionen ihres Durchschnittspunktes, so suche man (§. 93.) die horizontale Spuren s_1, s_2 beider Geraden, ziehe $s_1 s_2$, wodurch man die horizontale Spur ihrer Ebene erhält. Dreht man nun diese Ebene um $s_1 s_2$, bis sie in der horizontalen Tafel liegt, so bleiben s_1 und s_2, als Punkte der Drehungsaxe liegen, der Punkt aber, dessen Projektionen a, a' sind, kömmt nach A zu liegen, und es wird A nach §. 130. bestimmt, indem man über ac die Gerade ap senkrecht errichtet, ferner ap = ma' macht, cp zieht, und sodann cA = cp macht. —

§. 136.

Aufgabe 26. Den Winkel, welchen eine Gerade mit einer Ebene macht, zu bestimmen.

Auflösung. Um den Winkel anzugeben, welchen eine Gerade mit einer Ebene macht, erinnern wir uns vor Allem an die Regel (§. 21.), welche uns die Aufsuchung dieses Winkels zeigt. Dort heisst es:

1. Man verlängere zuerst die Gerade, bis sie die Ebene trifft, suche also ihren Durchgangspunkt.
2. Ziehe man von einem beliebig auf der Geraden angenommenem Punkte eine Senkrechte auf die Ebene, und suche auch den Durchgangspunkt der letzteren.
3. Verbinde man diese beiden Durchgangspunkte durch eine Gerade, so wird diese mit der gegebenen Geraden den verlangten Winkel bilden.

Nun ist aber dieser Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten; in welchem die auf die Ebene gezogene Senkrechte und die gegebene Gerade den Complementswinkel zum verlangten bilden. Man wird daher bei der Aufsuchung des Winkels beider Geraden auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man auf der Geraden einen Punkt an, was dadurch geschieht, dass man seine horizontale Projektion beliebig in der horizontalen Projektion der Geraden bezeichnet, und nach §. 73. seine vertikale Projektion bestimmt.
2. Ziehe man von diesem Punkte aus auf die gegebene Ebene eine Senkrechte, indem man (§. 72.) durch die Projektionen des Punktes Senkrechte auf die Spuren der Ebene zieht (§. 84.).
3. Bestimme man den Winkel, den diese Senkrechte mit der gegebenen Geraden macht (§. 134.), und ergänze diesen zu 90°, so ist der hierdurch erhaltene Ergänzungswinkel der gesuchte.

§. 137.

Beispiel. (Fig. 102.) Es sei EA'E die durch ihre Spuren E und 'E gegebene Ebene, L, 'L seien die Projektionen der gegebenen Geraden, so nehme man den Punkt p auf L an, und es wird (§. 73.) seine vertikale Projektion in L' und in der von p auf X gezogenen Senkrechten, also in p' liegen müssen. Zieht man nun pa_1 senkrecht auf E und $p a'_1$ senkrecht auf 'E, so erhält man (§. 84.) die Projektionen der durch den Punkt pp gehenden und auf der Ebene senkrecht stehenden Geraden. Nun verlängere man $p' a'_1$ bis X, ziehe von a'_1 auf X in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung eine Senkrechte, von welcher $p a_1$ in a_1 getroffen wird, so ist dieser Punkt also (§. 93.) die horizontale Spur der genannten Senkrechten. Verlängert man auch ebenso L' bis X, zieht von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte a'_2 mit X auf diese letztere eine Senkrechte, die in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, so erhält man im Durchschnittspunkte a_2 dieser Senkrechten mit L die horizontale Spur der gegebenen Geraden (§. 93.) Zieht man nun $a_2 a_1$, so erhält man die horizontale Spur derjenigen Ebene, welche durch L'L und die auf EA'E gezogene Senkrechte gelegt werden kann. Diese Ebene drehe man um $a_2 a_1$, und lege sie in die horizontale Tafel, ziehe pm senkrecht auf $a_2 a_1$ und mache m'P = np'. Zieht man nun p'P, und macht

$mP = p'P$; so ist P der in der niedergelegten Ebene enthaltene Punkt, dessen Projektionen p, p' sind (§. 130.). Zieht man nun Pa_2, so wird diese die Lage von L, 'L und Pa_1 gezogen wird (§. 130.) die Lage der Senkrechten pa_1, $p'a'_1$ angeben, und es ist also (§. 134.) $< a_2 P a_1$ der von der Senkrechten und der gegebenen Geraden gemachte Winkel. Zieht man nun PA senkrecht auf Pa_2, so erhält man $< a_1 P A$, welcher der verlangte ist. —

§. 138.

Aufgabe 27. **Den Winkel zweier Ebenen, welche durch ihre Spuren angegeben sind, zu bestimmen.**

Auflösung 1. Nimmt man zwischen beiden Ebenen einen Punkt an durch seine Projektionen (§. 65.), zieht von demselben aus auf jede der gegebenen Ebenen eine Senkrechte, deren Projektionen nach §. 84. erhalten werden können, und (§. 72.) durch die Projektionen des Punktes gehen müssen; so bilden diese beiden Senkrechten unter sich einen Winkel, welcher (§. 50.) gleich dem Nebenwinkel desjenigen ist, der den Winkel beider Ebenen misst. Man lege daher durch diese beiden Senkrechten eine Ebene, und bestimme von letzterer bloss eine, z. B. die horizontale Spur (§. 101.), drehe diese Ebene um ihre horizontale Spur, und lege sie in die horizontale Tafel nieder. Nun ziehe man von der horizontalen Projektion des angenommenen Punktes auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und suche die Hypothenuse desjenigen Dreieckes, von welchem jene Senkrechte und die vertikale Ordinate des Punktes die Katheten sind. Diese Hypothenuse trage man vom Durchschnittspunkte der auf die Drehungsaxe gezogenen Senkrechten auf diese selbst, so erhält man die Lage des angenommenen Punktes in der niedergelegten Ebene (§. 130.). Von diesem Punkte aus nach den Spuren beider Senkrechten Gerade gezogen, so werden letztere die Lage der auf die Ebenen gezogenen Senkrechten in der umgelegten Ebene angeben. Verlängert man die erste dieser beiden umgelegten Senkrechten, so bildet diese Verlängerung mit der zweiten Senkrechten den verlangten Winkel, welcher dem Maasse des Winkels beider Ebenen gleich ist. —

§. 139.

Auflösung 2. Man kann auch ganz nach dem in §. 43. angegebenem Verfahren den Winkel der beiden gegebenen Ebenen bestimmen, wornach man Folgendes zu thun hat:

1. Nehme man auf der Communsektion beider Ebenen einen Punkt beliebig an.
2. Ziehe man von diesem Punkte aus auf die Communsektion beider Ebenen zwei Senkrechte, von welchen die eine in der ersten, die andere in der zweiten Ebene liegt.
3. Bestimme man den Winkel dieser beiden Senkrechten, so wird derselbe der verlangte sein.

Um nun dieses vorgeschriebene Verfahren genau anzuwenden, legen wir jede der beiden Ebenen um eine ihrer Spuren in die entsprechende Tafel nieder, und zwar legen wir die erste sowohl, als auch die zweite Ebene um ihre horizontale Spur in die horizontale Tafel, so wird die Communsektion beider Ebenen in jeder derselben erscheinen. Diese Lage der Communsektion in der einen umgelegten Ebene sowohl als auch in der andern bestimmen wir nun (§. 130.), nehmen sodann in der ersten umgelegten Ebene auf der Communsektion einen Punkt an, ziehen von diesem aus auf die Communsektion eine Gerade senkrecht, und verlängern diese Senkrechte bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der entsprechenden Ebene. Auf der Communsektion in der zweiten umgelegten nehmen wir nun einen Pnnkt an, der vom Durchschnitte der horizontalen Spuren beider Ebenen ebenso weit entfernt ist, als der auf der Communsektion in der ersten umgelegten Ebene angenommene, so werden diese beiden Punkte, nachdem die Ebenen in ihre erste Lage zurückgebracht wurden, wieder in einen einzigen Punkt der Communsektion beider Ebenen zusammenfallen. Nun ziehe man von dem in der Communsektion in der zweiten umgelegten Ebene angenommenen Punkte aus auf diese Communsektion eine Senkrechte, und verlängere auch diese bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der zweiten Ebene. Ferner ziehe man von dem Durchschnittspunkte der ersten auf die Communsektion gezogenen Senkrechten mit der horizontalen Spur der ersten Ebene nach dem Durchschnittspunkte der zweiten Senkrechten mit der horizontalen Spur der zweiten Ebene eine Gerade, so bildet diese Gerade, wenn jede der beiden Ebenen in ihre erste Lage zurückgebracht worden ist, mit jenen beiden Senkrechten ein Dreieck, in welchem die beiden Senkrechten einen Winkel bilden, der das Maass des Winkels beider Ebenen ist. Ueber jene Gerade als Grundlinie konstruire man daher ein Dreieck, dessen beide andere Seiten die Senkrechten sind, welche auf die Communsektion errichtet wurden; so wird der Winkel dieser beiden Senkrechten sichtbar und dieser ist der verlangte. —

§. 140.

Auflösung 3. In §. 50. wurde gezeigt, dass wenn man in der Communsektion zweier Ebenen einen Punkt annimmt, von diesem aus auf die Communsektion eine Ebene senkrecht legt, die beiden gegebenen Ebenen nach Geraden geschnitten werden, welche in dem angenommenen Punkte der Communsektion den verlangten Winkel bilden. Es wird daher diese Aufgabe auch dadurch gelösst werden können, dass man eine Hülfsebene senkrecht auf die Communsektion beider Ebenen zieht, sodann dasjenige Dreieck konstruirt, von welchem der Theil der horizontalen Spur dieser Hülfsebene, welcher zwischen den horizontalen Spuren der gegebenen Ebenen liegt als Grundlinie angenommen werden kann, und die Communsektionen der Hülfsebene mit beiden gegebenen Ebenen die zwei andern Seiten sind. Um aber dieses Dreieck leicht durch Construktion erhalten zu können, bestimmen wir seine Höhe und denjenigen Punkt der Grundlinie, in welchem letztere von der Höhe getroffen wird. Ziehen wir nämlich von dem Punkte der Communsektion, in welchem sie von der Hülfsebene getroffen wird, auf die horizontale Spur der letzteren eine Senkrechte, so wird diese die gesuchte Höhe des Dreieckes sein. Da aber die Hülfsebene senkrecht auf der Communsektion ist, so wird letztere (§. 7.) auch senkrecht auf der Höhe des Dreieckes sein, das den gesuchten Winkel enthält. Wenn wir daher auf die Communsektion beider Ebenen in einer ihrer projicirenden Ebenen, z. B. in ihrer horizontal-projicirenden Ebene, eine Senkrechte von einem beliebigen Punkte derselben ziehen, so wird diese Senkrechte die horizontale Projektion der Communsektion treffen müssen, weil sie (§. 47.) mit dieser in der horizontal-projicirende Ebene liegt. Zieht man nun von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte aus eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Communsektion, so kann man diese als horizontale Spur der Hülfsebene annehmen, die den gesuchten Winkel enthält, und errichtet man daher über diese horizontale Spur der Hülfsebene im Dreieck, dessen Höhe die Senkrechte ist, welche vorhin auf die Communsektion gezogen wird, so wird am Scheitel dieses Dreieckes der Neigungswinkel beider Ebenen enthalten sein. Aus diesem Ganzen können wir also folgendes Verfahren ableiten:

1. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion beider Ebenen durch ihre Projektionen.
2. Lege man die horizontal-projicirende Ebene der Communsektion um ihre horizontale Projektion in die horizontale Tafel, und bestimme die wahre Länge eines Theiles der Communsektion.
3. Ziehe man von einem in der Communsektion beliebig angenommenen Punkte aus auf letztere eine Senkrechte, so wird diese die horizontale Projektion der Communsektion in einem Punkte, der durch p bezeichnet sein soll, treffen.
4. Von diesem Punkte p aus ziehe man auf die horizontale Projektion der Communsektion eine Senkrechte, so wird diese (§. 84.) die horizontale Spur der Hülfsebene sein, welche senkrecht auf der Communsektion steht.
5. Ueber den Theil der horizontalen Spur dieser Hülfsebene, welcher zwischen den horizontalen Spuren beider gegebenen Ebenen liegt, konsruire man ein Dreieck, dessen Höhe die Senkrechte ist, welche man auf die Communsektion bis zu ihrer horizontalen Projektion gezogen hat; so wird dieses Dreieck an seinem Scheitel den gesuchten Winkel enthalten.

Anmerk. Durch jede dieser drei Lösungen wird man auf gleiches Resultat gelangen, und die eine oder andere derselben anwenden, wenn sie die Construktion für ein gegebenes Beispiel vereinfacht. — Es ist ferner auch gleichgültig, in welcher Tafel man die Construktion vornimmt, und es wird derjenige, welcher das Vorhergehende wohl verstanden hat, die Construktionen, welche vorher bloss in der horizontalen Tafel ausgeführt wurden, auch in der vertikalen Tafel ausführen können. —

§. 141.

Ueber jede der im Obigen angegebenen Lösungen zur Bestimmung des Winkels zweier Ebenen, sollen nun Beispiele gezeigt werden.

Beispiel 1. (Fig. 130.) Es sei $E_1 S_1 'E_1$ die eine, $E_2 S_2 'E_2$ die andere Ebene, deren Spuren sich noch in den Tafeln schneiden. Da hier die Communsektion leicht zu bestimmen ist, so nehmen wir die dritte Lösung, und bestimmen zu diesem Zwecke zuerst die Communsektion beider Ebenen, indem wir den Durchschnittspunkt s_1 der horizontalen Spuren in s'_1 vertikal und den Durchschnittspunkt s'_2 der vertikalen Spuren in s_2 horizontal-projiciren. Ziehen wir $s_1 s_2$ und $s'_1 s'_2$, so erhalten wir (§. 110.) die Projektionen der Communsektion beider Ebenen. Nun legen wir das horizontal-projicirende Dreieck dieser Communsektion um $s_1 s_2$ in die horizontale Tafel, ziehen $s_2 C$ senkrecht auf $s_1 s_2$ und gleich $s_2 s'_2$, verbinden C mit s_1 durch die Gerade $s_1 C$, so erhalten wir die Communsektion. Nun nehmen wir in $s_1 C$ den Punkt M an, ziehen Mp senkrecht auf $s_1 C$, legen durch p die Gerade pB senkrecht auf $s_1 s_2$, und verlängern Bp bis zum Durchschnitte A mit E_1, so ist AB die Grundlinie und pM die Höhe des Dreieckes, an

dessen Spitze der gesuchte Winkel ist. Nehmen wir daher $p'M = pM$, und ziehen A'M und B'M, so sind letztere die Geraden, nach welchen die durch M gehende und auf der Communsektion senkrecht stehende Hülfsebene die Ebene $E_1 S_1 {}'E_1$ und $E_2 S_2 {}'E_2$ schneidet, weil A in der ersten, B in der zweiten Ebene, 'M aber in beiden Ebenen liegt, und folglich ist (§. 50.) $<$ A'MB der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen.

Anmerk. Projicirt man M, so wird im Durchschnitte der von M auf $s_1 s_2$ gezogenen Senkrechten Mm mit $s_1 s_2$, nämlich in m, die horizontale Projektion von M sein, dessen vertikale Projektion in m' ist, und nach §. 73. erhalten wird. Da nun A und B in der horizontalen Tafel liegen, so wird $<$ AmB die horizontale Projektion des Neigungswinkels beider Ebenen sein. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion von A sowohl, als auch die von B in X, und mithin nach §. 63. durch A'A in 'A die vertikale Projektion von A und durch BB' in 'B die vertikale Projektion von B bestimmt. Zieht man nun 'Am' und B'm', so ist $<$ 'Am'B' die vertikale Projektion des Neigungswinkels beider Ebenen.

Beispiel 2. (Fig. 104.) $E_1 A_1 {}'E_1$ sei die eine und $E_2 A_2 {}'E_2$ die andere Ebene, ferner 'f der Durchschnittspunkt der vertikalen Spuren und c der Durchschnittspunkt der horizontalen Spuren, wobei c auf der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel liegt. Zieht man nun fd senkrecht auf E_1, zieht fF'_1 senkrecht auf fd und macht $fF_1 = f'f$, verbindet d mit F'_1 durch die Gerade dF'_1, und trägt letztere von d aus auf die Verlängerung von fd, indem man $dF_1 = dF'_1$ macht, so erhält man (§. 130.) in F_1 den in der umgelegten Ebene $E_1 A_1 {}'E_1$ enthaltenen Durchschnittspunkt der beiden vertikalen Spuren. Legt man auch $E_2 A_2 {}'E_2$ in die horizontale Tafel, indem man dieselbe um E_2 dreht, und bestimmt sodann die Lage des Punktes 'f in dieser umgelegten Ebene, zieht zu diesem Zwecke fe senkrecht auf E_2 und macht eF_2 gleich der Hypothenuse desjenigen rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten f'f und fe sind, so erhält man in F_2 den in der zweiten umgelegten Ebene enthaltenen Durchschnittspunkt der beiden vertikalen Spuren. Zieht man nun $F_1 C$, so ist diese Gerade die Communsektion beider Ebenen, welche nach §. 130. mit $E_1 A_1 {}'E_1$ in der horizontalen Tafel umgelegt wurde, und zieht man cF_2, so erhält man (§. 130.) die mit der zweiten Ebene in die horizontale Tafel gelegte Communsektion beider Ebenen. Nimmt man nun m_1 auf cF_1 und m_2 auf cF_2 so an, dass $cm_1 = cm_2$ wird, so werden die Punkte m_1 und m_2 in einen Punkt der Communsektion zusammenfallen, sobald die Ebenen wieder in ihre erste Lage zurückgebracht werden. Wenn man also m_1 senkrecht auf cF_1 errichtet und $m_2 b$ senkrecht auf cF_2 zieht, so wird die erstere dieser Linien, wenn die Ebenen wieder in ihre erste Lage gebracht werden, auf der Communsektion senkrecht sein und in $E_1 A {}'E_1$ liegen, die zweite wird mit der ersten einen Punkt der Communsektion gemeinschaftlich haben, auf letzterer senkrecht sein und in Ebene $E_2 A_2 {}'E_2$ liegen, so dass also diese beiden Geraden (§. 139.) den Winkel beider Ebenen bilden. Zieht man also ab, und konstruirt mit den Seiten am_1, am_2 und ab ein Dreieck abM, so ist $<$ aMb der Neigungswinkel beider Ebenen (§. 139.).

Beispiel 3. (Fig. 105.) Es sei $E_1 A {}'E_1$ die eine, $E_2 A {}'E_2$ die andere Ebene, so suche man den Winkel dieser beiden Ebenen nach §. 138. Zu diesem Zwecke nehme man einen beliebigen Punkt (§. 63.) durch seine Projektionen a'a an, ziehe 'aC' senkrecht auf $'E_1$ und ac senkrecht auf E_1, so erhält man (nach §. 72. und §. 84.) die Projektionen der durch den angenommenen Punkt gehenden und auf $E_1 A {}'E_1$ senkrecht stehenden Geraden. Nun ziehe man ab senkrecht auf E_2 und a'b' senkrecht auf $'E_2$, so erhält man (§. 72.) die Projektionen der durch den angenommenen Punkt gehenden und (§. 84.) auf $E_1 A {}'E_2$ senkrecht stehenden Geraden. Verlängert man nun a'c' bis X, so erhält man in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur und im Durchschnitte der auf X senkrechten Geraden $s'_1 s_1$ mit ab die horizontale Spur der ersten Senkrechten (§. 93.). Ebenso bestimme man (§. 93.) die horizontale Spur s_2 der zweiten Senkrechten, ziehe $s_1 s_2$, so ist diese Gerade (§. 101.) die horizontale Spur der durch die beiden Senkrechten gelegten Ebene. Zieht man nun ad senkrecht auf $s_1 s_2$, macht dA gleich der Hypothenuse desjenigen rechtwinkligen Dreieckes, von welchem da die eine und a'a die andere Kathete ist, so erhält man den Punkt A (§. 130.), welcher die Lage des Punktes aa' angibt, der mit der Hülfsebene in die horizontale Tafel gelegt wurde. Zieht man nun As_1 und As_2, so werden diese Geraden die Lage der auf die Ebenen gefällten Senkrechten, welche mit ihrer Ebene in die horizontale Tafel gelegt wurden, angeben; daher ist (§. 138.) auch $<$ $s_1 A s_2$ der Nebenwinkel des Neigungswinkels selbst. —

Beispiel 4. (Fig. 106.) $E_1 A E'_1$ sei die erste, $E_2 {}'E_2$ die zweite der gegebenen Ebenen, man soll ihren Neigungswinkel bestimmen. Hier verfahre man nach §. 140., und bestimme daher nach §. 110. vor Allem die Communsektion beider Ebenen, indem man die horizontale Projektion s_1

von s'_1 und die vertikale Projektion s'_2 von s_2 angibt, und die Geraden $s_1 s_2$, $s'_1 s'_2$ zieht. Nun lege man das die Communsektion horizontal-projicirende Dreieck in die horizontale Tafel, und bestimme (§. 87. die Länge desjenigen Theiles derselben, welcher zwischen s'_1 und s_2 liegt, wodurch man $s_2 S$ erhält. Nun nehme man M auf $s_2 S$ an, ziehe Mp senkrecht auf $s_2 S$, lege durch p eine Gerade senkrecht auf $s_1 s_2$, so kann man letztere als horizontale Spur einer auf der Communsektion senkrechten Hülfsebene betrachten, welche beide Ebenen nach Geraden schneidet, die den Neigungswinkel jener Ebenen bilden, und welche mit der horizontalen Spur der Hülfsebene ein Dreieck bilden, dessen Höhe (§. 140.) Mp ist. Macht man nun $p'M = pM$, zieht $a'M$ und $b'M$, so werden letztere die Durchschnittslinien der Hülfsebene mit den beiden gegebenen Ebenen sein, weil a in $E_1 A' E_1$ und der Hülfsebene, und b in $E_2 ' E_2$ und der Hülfsebene, M aber in beiden gegebenen Ebenen liegt; folglich ist auch (§. 140.) $<$ a'Mb der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Wollte man diesen projiciren, so dürfte man nur M auf $s_1 s_2$ projiciren, wodurch sodann die horizontale Projektion von M erhalten wird, dessen vertikale nach §. 63. bestimmt werden kann. Da nun die horizontale Projektionen von a und b diese Punkte sind, und ihre vertikale Projektionen (§. 70.) in X liegen, so kann leicht jede der Projektionen des Neigungswinkels bestimmt werden. —

Beispiel 5. (Fig. 107.) Es sei $E_1 A_1 ' E_1$ die eine, $E_2 A_2 ' E_2$ die zweite Ebene, von welchen angenommen ist, dass sie sich auf den Gränzen unserer Tafeln nicht mehr schneiden; man soll ihren Neigungswinkel bestimmen. Hier wende man das in §. 138. angegebene Verfahren an, nehme daher die Projektionen eines Punktes (§. 63.) an, diese seien a und a', ziehe $a' p_1$ senkrecht auf E_1 und $a' p'_1$ senkrecht $'E_1$, so erhält man (§. 84.) die Projektionen einer auf Ebene $E_1 A_1 ' E_1$ senkrechten Geraden, die (§. 72.) durch den Punkt geht, dessen Projektionen a und 'a sind. Nun ziehe man ferner $a p_2$ senkrecht auf E_2 und $a' p'_2$ senkrecht auf $'E_2$, so werden diese Linien die Projektionen einer Geraden sein, die (§. 84.) senkrecht auf $E_2 A_2 ' E_2$ steht, und (§. 72.) durch den Punkt geht, dessen Projektionen a und 'a sind. Man verlängere nun $'a p_1$ bis X, so wird s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur von $'a p'_1$, $a p_1$, und daher die horizontale Spur dieser Geraden im Durchschnitte von $a p_1$ mit der auf X gezogenen Senkrechten $s'_1 s_1$, also in s_1 (§. 93.) sein. Verlängert man auch $a' p'_2$ bis X, zieht von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_2 auf X eine Senkrechte $s'_2 s_2$, so wird diese von $a p_2$ in s_2 geschnitten, und es ist daher in s_2 (§. 93.) die horizontale Spur von $a p_2$, $a' p'_2$. Zieht man nun $s_1 s_2$, so wird diese Gerade (§. 101.) die horizontale Spur derjenigen Ebene sein, welche $a p_1$, $a' p'_1$ und $a p_2$, $a' p'_2$, und folglich auch den Winkel dieser beiden Geraden enthält. Man drehe daher diese Ebene um $s_1 s_2$, und lege sie in die horizontale Tafel, bestimme sodann in dieser umgelegten Ebene jede der beiden Geraden, so wird auch der Winkel von letzteren sichtbar werden. Zieht man daher am senkrecht auf $s_1 s_2$, und konstruirt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete am, und dessen zweite gleich a' n ist, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes von m aus auf mA getragen, in A den Punkt der umgelegten Ebene angeben, dessen Projektionen a und a' sind. Da nun s_1 in der Geraden $a p_1$, $a' p_1$ und s_2 in der Geraden $a p_2$, $a' p'_2$ liegt, beide Punkte aber, nämlich s_1 sowohl als auch s_2 in der Drehungsaxe liegen, so bleiben dieselben auch in der umgelegten Ebene in s_1 und s_2; zieht man daher $s_1 A_1$ so wird diese die Lage der Geraden, deren Projektion $a p_1$ und $a' p'_1$ sind, und $s_2 A$ gezogen die Lage jener Geraden, deren Projektionen durch $a p_2$ und $a' p'_2$ angegeben wurden, in der umgelegten Ebene angeben. Der Winkel nun, welchen diese beide Geraden bilden, nämlich $< s_1 A s_2$ ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels beider Ebenen, folglich erhält man durch Verlängerung von $s_2 A$ den Winkel $B A s_1$, der den Winkel beider Ebenen misst. —

§. 142.

Aufgabe 28. **Es sind zwei Gerade gegeben, die in verschiedenen Ebenen liegen und ein Punkt ausserhalb dieser Linien; man soll eine Gerade finden, welche durch den gegebenen Punkt geht, und jede der beiden gegebenen Geraden schneidet.**

Auflösung. In §. 52. wurde gezeigt, dass es eine Gerade gibt, die durch einen gegebenen Punkt geht und zwei andere Gerade sneidet. Um daher diese Gerade zu bestimmen, verfahre man nach dem in §. 52. bewiesenen Lehrsatze, und zwar auf folgende Weise:

1. Lege man durch den gegebenen Punkt und die erste Gerade nach §. 106. eine Ebene, und sodann bestimme man (§. 106.) diejenige Ebene, welche den gegebenen Punkt und die zweite Gerade enthält.

2. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion dieser beiden Hülfsebenen, so wird diese die gesuchte Gerade sein. Denn diese Communsektion liegt mit jeder der gegebenen Geraden in einer dieser Hülfsebenen, und kann mit keiner derselben parallel sein, weil diese Geraden (§. 28.) auch dann unter sich parallel wären; folglich muss die Communsektion beider Hülfsebenen jede der gegebenen Geraden schneiden. Da nun der gegebene Punkt nach Voraussetzung in jeder der Hülfsebenen liegt, so muss sich derselbe auch auf ihrer Communsektion befinden, und folglich ist letztere die gesuchte Gerade. —

Anmerk. 1. Sind drei Gerade gegeben, und man soll eine vierte Gerade finden, welche die drei ersteren schneidet, so nehme man auf einer der gegebenen Geraden einen Punkt (§. 73.) an, lege durch diesen nach dem letzten Paragraph eine Gerade, welche die übrigen zwei Geraden schneidet, so wird diese die gesuchte sein. —

Anmerk. 2. Diese Aufgabe könnte man auch dadurch lösen, dass man durch einen Punkt der ersten Geraden und die zweite Gerade eine Ebene legt, den Durchgangspunkt der dritten Geraden mit dieser Ebene bestimmt, diesen Punkt mit dem auf der ersten angenommenen durch eine Gerade verbindet, so wird letztere die gesuchte sein, weil sie auch die zweite Gerade schneiden muss. —

§. 143.

Beispiel. (Fig. 108.) Es sei a die horizontale und a' die vertikale Projektion des gegebenen Punktes, L_1, $'L_1$ seien die Projektionen der ersten, L_2, $'L_2$ seien die Projektionen der zweiten Geraden. Soll nun eine Gerade bestimmt werden, welche den gegebenen Punkt enthält, und jede der gegebenen Geraden schneidet, so nehme man (§. 73.) auf den Projektionen L_1 und $'L_1$ die Punkte b und b' an, welche die Projektionen eines Punktes sind, nehme ferner auf L_2 und $'L_2$ die Punkte c und c' (§. 73.) an, so dass sie die Projektionen eines einzigen Punktes sind. Nun ziehe man durch a a' die Gerade a b, 'a'b und sodann die Gerade a c, a c', so wird jene die Gerade $L_1 'L_1$ und diese die Gerade L_2 $'L_2$ (§. 76.) schneiden. Sucht man nun (§. 93.) die horizontale Spur s_1 von $L_1 L'_1$, ferner die horizontale Spur s_2 von a b, 'a b', und zieht die Gerade $s_1 s_2$, verlängert dieselbe bis S_1, so erhält man die horizontale Spur der Ebene, in welcher a'a und L_1, $'L_1$ liegt (§. 106.). Bestimmt man (§. 93.) die vertikale Spur s'_3 der Geraden a b, a' b', und zieht $s'_3 S_1$, so erhält man (§ 80.) die vertikale Spur jener Ebene. Sucht man ferner die horizontalen Spuren s_4 und s_5 der Geraden L_2, $'L_2$ und a c, a' c' (nach §. 93.), zieht $s_4 s_5$ und verlängert diese Gerade bis S_2, verbindet ferner S_2 mit der (nach §. 93.) gesuchten vertikalen Spur s'_6 der Geraden $L_2 'L_2$, so erhält man (§. 106.) die Spuren jener Ebene, welche den Punkt a a' und die Gerade a c, a' c' enthält. Nun suche man (§. 110.) die Communsektion der Ebenen $E_1 S_1 'E_1$ und $E_2 S_2 'E_2$, indem man die Durchschnittspunkte m und n' ihrer Spuren projicirt, so erhält man durch m' n' und m n die Projektionen einer Geraden, welche den Punkt a a' enthält, die erste Gerade in $p_1 p'_1$ und die zweite in p_2 p'_2 schneidet, folglich ist diese die gesuchte Gerade. —

§. 144.

Aufgabe 29. Es sind zwei in verschiedenen Ebenen liegende Gerade und eine Ebene gegeben; man soll in einer von der Ebene angegebenen Entfernung eine Gerade ziehen, welche mit der Ebene parallel ist, und jede der zwei gegebenen Geraden schneidet.

Auflösuung. Man nehme eine auf der Ebene senkrechte Gerade nach §. 84. durch ihre Projektionen an, mache diese Gerade von ihrem Durchgangspunkte mit der Ebene aus so lange, als die gegebene Entfernung von der Ebene angibt; vom Endpunkte dieser Senkrechten aus eine Ebene parallel zur gegebenen (§. 118.) gezogen, so wird (§. 25.) jede Gerade, die in dieser Ebene liegt, mit der gegebenen parallel sein. Sucht man daher die Durchgangspunkte der zwei gegebenen Geraden mit dieser Hülfsebene (§. 114.), und verbindet diese beiden Durchgangspunkte durch eine Gerade, so wird diese die verlangten Bedingungen erfüllen, denn sie schneidet die gegebenen zwei Geraden, weil sie zwei Punkte mit denselben gemeinschaftlich hat, ferner ist sie zur gegebenen Ebene parallel, und ist mithin die gesuchte. —

Anmerk. Um in einer gegebenen Entfernung mit einer Ebene eine andere parallel zu ziehen, kann man auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man eine Gerade (nach §. 84. durch ihre Projektionen) an, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht.
2. Bestimme man den Durchgangspunkt dieser Senkrechten mit der Ebene (§. 114.)
3. Lege man eine der projicirenden Ebenen dieser senkrechten Geraden in eine der Tafeln (§. 87.), und schneide vom Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Ebene aus auf jener eine Gerade ab, die gleich der gegebenen Entfernung ist.

4. Den Endpunkt dieser Geraden projicire man nun, und lege durch denselben (§. 118.) eine Ebene, die parallel zur gegebenen ist. —

§. 145.

Aufgabe 30. Es ist eine Ebene gegeben, ferner eine auf dieser Ebene liegende Gerade; man soll durch letztere eine Ebene legen, die mit jener Ebene einen gegebenen Winkel bildet.

Auflösung. In §. 140. wurde vermittelst der Communsektion zweier Ebenen und einer auf diese Communsektion senkrecht gelegten Hülfsebene der Winkel beider Ebenen gefunden. Da nun in der hier vorliegenden Aufgabe sowohl die Communsektion, als auch der Winkel beider Ebenen und eine der letzteren gegeben ist, so wird die andere Ebene leicht gefunden werden können, wenn man auf die in §. 140. angegebene Lösung der 27. Aufgabe Rücksicht nimmt. Wir verfahren daher ganz ebenso, als wenn wir den Winkel zweier Ebenen nach §. 140. suchen wollten, und benützen dabei diejenigen Resultate, welche uns hier zum Ziele führen. Es muss daher Folgendes geschehen:

1. Müssen wir die gegebene Gerade mit einer ihrer projicirenden Ebenen in eine Tafel legen.
2. Nehmen wir auf der in einer Tafel sich nun befindlichen Geraden — Communsektion der gegebenen und der gesuchten Ebene — einen Punkt an, ziehen von diesem aus eine Senkrechte auf die gegebene Gerade, und verlängern diese Senkrechte bis zur horizontalen Projektion der Geraden, so ist diese letztere Senkrechte die Höhe desjenigee Dreieckes, welches den Winkel der gegebenen und der gesuchten Ebene enthält. —
3. Vom Durchschnittspunkte jener Senkrechten mit der horizontalen Projektion der gegebenen Geraden ziehen wir eine Gerade senkrecht auf diese horizontale Projektion, so wird diese die horizontale Spur der Hülfsebene sein, die vom angenommenen Punkte der Geraden aus auf diese senkrecht gezogen wurde. Diese horizontale Spur der Hülfsebene schneidet die horizontale Spur der gegebenen Ebene in einem Punkte, welcher diesen beiden Ebenen, also auch ihrer Communsektion angehört. Wir tragen daher
4. die Höhe des Dreieckes, das den Winkel der gesuchten und der gegebenen Ebene enthält, vom Durchschnittspunkte der horizontalen Spur der Hülfsebene mit der horizontalen Projektion der gegebenen Geraden auf diese, und verbinden den hierdurch erhaltenen Scheitel des Dreieckes mit dem Durchschnittspunkte der horizontalen Spuren der gegebenen und der Hülfsebene durch eine Gerade, so erhalten wir die Communsektion dieser beiden Ebenen.
5. Legen wir an diese Communsektion vom Scheitel des Winkels beider Ebenen aus — der ʃin dem auf der gegebenen Geraden angenommenen Punkte ist — den gegebenen Winkel, so wird vom zweiten Schenkel dieses Winkels die horizontale Spur der Hülfsebene in einem Punkte geschnitten, welcher der horizontalen Spur der gesuchten Ebene (§. 140.) angehört.
6. Verbinden wir diesen Punkt mit der horizontalen Spur der gegebenen Geraden, so erhalten wir also die horizontale Spur der gesuchten Ebene, deren vertikale Spur nun leicht bestimmt werden kann, und zwar entweder dadurch, dass man den Durchschnittspunkt der horizontalen Spur und der Axe mit der vertikalen Spur der gegebenen Geraden verbindet; oder dass man durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden eine Gerade legt, die parallel zur horizontalen Spur der gesuchten Ebene ist, so wird diese (§. 120., Anmerk. 2.) in dieser Ebene sein. Sucht man daher von dieser Geraden (§. 93.) die vertikale Spur, und zieht von dieser aus nach der vertikalen Spur der gegebenen Geraden eine Gerade, so ist letztere die vertikale Spur der gesuchten Ebene. —

§. 146.

Beispiel. (Fig. 103.) Ist $E_2 S_2 {}'E_2$ die gegebene Ebene, $s_1 s_2$ die horizontale, $'s_1 {}'s_2$ die vertikale Projektion einer auf dieser Ebene liegenden Geraden, deren vertikale Spur s'_2 und deren horizontale in s_1 ist; endlich a der Winkel, unter welchen eine Ebene an die gegebene gelegt werden soll; so ziehe man $s_2 C$ senkrecht auf $s_2 s_1$, mache $s_2 C = s_2 s'_2$, ziehe $s_1 C$, so ist letztere (§. 87.) die Länge des zwischen s_1 und s'_2 enthaltenen Theiles der gegebenen Geraden. Auf $s_1 C$ nehme man den Punkt M an, ziehe Mp senkrecht auf $s_1 C$, von p aus auf $s_1 s_2$ die Gerade AB senkrecht gezogen, $p'M = pM$ gemacht und $'MB$ gezogen, so wird letztere die Communsektion der Hülfsebene und der gegebenen Ebene sein. Legt man nun in M' an $'MB$ den Winkel $AM'B = a$ an, so erhält man den Punkt A, welcher der Hülfsebene und der gesuchten angehört, durch welchen also die horizontale Spur der gesuchten Ebene gehen muss. Zieht man also von s_1 nach A die Gerade $s_1 AS$, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Ebene sein. Die vertikale Spur dieser Ebene wird

erhalten, wenn man von S_1 nach s'_2 die Gerade $S_1 s'_2$ zieht. —

§. 147.

Aufgabe 31. **Ein Punkt ist durch seine Projektionen gegeben; man soll denselben um eine in einer Tafel liegende Gerade unter einen bestimmten Winkel bewegen, und seine Projektionen bestimmen, wenn er an seinem neuen Orte liegt.**

Auflösung. Bewegt sich ein Punkt um eine Gerade, so beschreibt derselbe (§. 23.) einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe steht. Denkt man sich daher vom Punkte aus auf die Drehungsaxe (§. 120.) eine Ebene senkrecht gelegt, so wird letztere diejenige sein, in welcher der Punkt während und nach seiner Bewegung bleibt. Der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe (der nach §. 114. bestimmt wird) ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, welchen der Punkt beschreibt, und der Halbmesser dieses Kreisbogens ist die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe, welche letztere nach §. 122. bestimmt werden kann. Denkt man sich nun ferner in dieser (auf der Drehungsaxe senkrechten und durch den gegebenen Punkt gehenden) Ebene in dem Durchschnittspunkte derselben mit der Drehungsaxe an die vom Punkte auf letztere gezogene Senkrechte den Winkel gelegt, um welchen der Punkt auf- oder abwärts bewegt werden soll, und auf den zweiten Schenkel dieses Winkels von seinem Scheitel aus die Entfernung des Punktes von der Durchgangsaxe getragen, so erhält man die neue und verlangte Lage des gegebenen Punktes, und man hat nun auch seine neuen Projektionen zu bestimmen. Um nun diese leicht zu erhalten, kann man die vom Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht gezogene Ebene mit dem Punkte in eine der Tafel (nach §. 130.) umlegen, in dieser die vorhin angezeigte Construktion vornehmen, sodann die Ebene wieder in ihre erste Lage bringen, und (§. 132.) die neuen Projektionen bestimmen. —

In unserem vorliegenden Falle wird die Construktion einfacher, weil die Drehungsaxe in einer der Tafeln liegen soll. Ist z. B. die Gerade, um welche der Punkt bewegt werden soll, in der horizontalen Tafel, und man denkt sich vom Punkte aus auf die Drehungsaxe eine Ebene senkrecht gezogen, so wird letztere (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel, und folglich wird (§. 83., Anmerk.) in der horizontalen Spur dieser Ebene die horizontale Projektion des Punktes liegen müssen, oder die horizontale Spur jener Ebene, die man vom Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht zieht, muss durch die horizontale Projektion des Punktes gehen. Da aber diese horizontale Spur (§. 84.) senkrecht auf unserer Drehungsaxe sein muss, so wird die Senkrechte, die man von der horizontalen Projektion des gegebenen Punktes auf die Drehungsaxe zieht, die horizontale Spur jener Ebene sein, welche man vom gegebenen Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht legen kann, und der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit der Drehungsaxe ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, welchen der Punkt bei seiner Bewegung beschreibt. Legen wir nun diese auf der Drehungsaxe senkrechte Ebene (in welcher der Punkt während und nach der Drehung bleibt) um ihre horizontale Spur (§. 130.) in die horizontale Tafel, und bestimmen (§. 130.) die Lage des gegebenen Punktes in dieser umgelegten Ebene, ziehen von diesem Punkte nach dem Mittelpunkte seines Kreisbogens eine Gerade, und legen an diese den gegebenen Winkel, so erhalten wir den neuen Ort des Punktes, wenn wir auf den zweiten Schenkel des angelegten Winkels seine Entfernung von der Drehungsaxe vom Scheitel dieses Winkels aus tragen. Nun bleibt (§. 23.) der Punkt in der auf der Drehungsaxe senkrecht gelegten Ebene, folglich auch seine horizontale Projektion (§. 83., Anmerk.) in der horizontalen Spur dieser Ebene; wenn wir daher von der neuen Lage des Punktes in der umgelegten Ebene auf die horizontale Spur der letzteren eine Senkrechte ziehen, so wird diese die horizontal-projicirende Linie des Punktes, und mithin ihr Fuss die horizontale Projektion des Punktes sein. Diese horizontal-projicirende Linie ist aber (§. 63.) gleich der vertikalen Ordinate des Punktes, folglich kann seine neue vertikale Projektion leicht erhalten werden, wenn man (§. 63.) von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf X eine Senkrechte zieht, die in der vertikalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, und auf diese Senkrechte von der Axe aus die horizontal-projicirende Linie des Punktes trägt. —

Anmerk. Würde die Gerade, um welche der Punkt bewegt werden soll, in der vertikalen Tafel sich befinden, so könnte man bei der Aufsuchung der neuen Projektionen des Punktes eine ähnliche Construktion befolgen, als die vorhin gezeigte. Auf gleiche Weise kann man auch ein ganzes System von Punkten um eine Gerade drehen, und in dieser neuen Lage seine Projektion bestimmen. Sind nun die einzelnen Punkte dieses Systemes durch Gerade verbunden, so kann man leicht die Projektionen des Vieleckes oder des Polyeders, deren Scheitel die gegebenen Punkte sind, nach der Dre-

hung bestimmen. — Die Anwendung dieser Aufgabe hat besonders da ihren Vortheil, wo man eine Projektion eines Gegenstandes erhalten will, die genaueren Aufschluss über denselben gibt, als die angegebenen Projektionen. —

§. 148.

Beispiel 1. (Fig. 109.) Es sei m_1 die horizontale und m'_1 die vertikale Projektion eines Punktes, xy eine Gerade, um welche der angegebene Punkt sich aufwärts bewegen soll, und zwar so, dass die Gerade, welche man von demselben auf xy senkrecht zieht mit derjenigen Senkrechten, die man aus seiner neuen Lage auf xy zieht, den Winkel r bildet. Vor Allem ziehe man also $m_1 C$ senkrecht auf xy, so ist diese Gerade $m_1 C$ die horizontale Spur der Ebene, in welcher der Punkt $m_1 m'_1$ vor und nach der Drehung bleibt. Legt man nun diese Ebene um $m_1 C$ in die horizontale Tafel, zieht $m_1 M_1$ senkrecht auf $m_1 C$, macht $m_1 M_1 = m'_1 n_1$, so erhält man (§. 130.) die Lage des Punktes $m_1 m'_1$ in der umgelegten Ebene, und $M_1 C$ wird die Entfernung desselben von xy sein. In C lege man nun an CM_1 den Winkel $M_1 C M_2 = \angle r$, mache $CM_2 = CM_1$, so ist M_2 die neue Lage des Punktes in der umgelegten Ebene. Zieht man $M_2 m_2$ senkrecht auf $m_1 C$, so muss m_2 die horizontale Projektion des Punktes M_2 (§. 147.), und $M_2 m_2$ seine vertikale Ordinate sein. Zieht man daher $m_2 n_2$ senkrecht auf X, und macht $n_2 m'_2$ gleich $M_2 m_2$, so wird in m'_2 die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale in m_2 ist, und man hat also die Projektionen $m_2 m'_2$ der neuen Lage des gegebenen Punktes im Raume. —

Beispiel 2. (Fig. 110.) In der horizontalen Tafel liege das regelmässige Sechseck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$; man soll dasselbe um xy drehen, bis seine Ebene mit der horizontalen Tafel den Winkel von 45° bildet. Man ziehe $a_1 C_1$ senkrecht auf xy, lege in C_1 den Winkel $A C_1 a_1 = 45°$ an, mache $C_1 A = C_1 a_1$, so wird A die neue Lage von a_1 sein, und in der von a_1 auf xy senkrecht gezogenen Ebene liegen. Zieht man nun $A a_2$ senkrecht auf $a_1 C$, so wird a_2 die horizontale Projektion und $A a_2$ die vertikale Ordinate des Punktes A sein. Auf gleiche Weise erhält man die neuen Projektionen $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$, $e_2 e'_2$ und $f_2 f'_2$ der gegebenen Punkte a_1, c_1, d_1, e_1 und f_1. Zieht man nun die Geraden $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, $c_2 d_2$, $d_2 e_2$, $e_2 f_2$ und $f_2 a_2$, so erhält man die verlangten Projektionen $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2 f'_2$ des Sechseckes, das ursprünglich in $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ war, und dessen Ebene nun (nach §. 126.) mit der horizontalen Tafel den Winkel von 45° bildet. —

Beispiel 3. (Fig. 111.) Es sei $a_1 b_1 c_1 d_1$ die horizontale und $a'_1 b'_1$ oder $d'_1 c'_1$ die vertikale Projektion eines Quadrates, man soll dasselbe so drehen, dass seine Ebene mit der horizontalen Tafel (oder mit einer zu dieser Tafel parallelen Ebene) einen Winkel von 60° bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, ziehe man von a_1 auf xy die Gerade $a_1 n_1$ senkrecht, so ist diese (§. 147.) die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der Punkt $a_1 a'_1$ bei seiner Bewegung beschreibt. Legt man nun diese Ebene um $a_1 n_1$ in die horizontale Tafel, zieht $a_1 A_1$ senkrecht auf $a_1 a_2$, macht $a_1 A_1 = m_1 a'_1$, legt in n_1 an $n_1 A_1$ den Winkel $A_1 n_1 A_2 = 60°$ an, und trägt $n_1 A_1$ auf $n_1 A_2$, so erhält man in A_2 die neue Lage des Punktes $a_1 a'_1$. Von A_2 aus auf $a_1 n_1$ die Senkrechte $A_2 a_2$ gezogen, ferner $a_2 m_2$ senkrecht auf X gefällt, und $m_2 n'_2$ gleich $A_2 a_2$ gemacht, gibt in a'_2 die neue vertikale Projektion des Punktes $a_1 a'_1$, dessen horizontale Projektion a_2 ist. Auf gleiche Weise kann man die Projektionen $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$, und mithin auch die neuen Projektionen $a_2 b_2 c_2 d_2$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2$ bestimmen, das vorher parallel zur horizontalen Tafel war, und nun mit letzterer einen Winkel von 60° macht. —

§. 149.

Zum Schlusse dieser Abtheilung sollen noch einige Aufgaben zur Uebung angegeben werden, deren Lösungen im Anhange kurz angezeigt werden sollen. —

1. Es ist eine Gerade im Raume gegeben; man soll auf derselben einen Punkt bestimmen, der von einem auf ihr gegebenen eine bestimmte Entfernung hat. —

2. Die Projektionen eines Punktes und die einer Geraden sind gegeben, die jenen nicht enthält; man soll auf der Geraden den Punkt aufsuchen, welcher vom gegebenen Punkte eine bestimmte Entfernung hat. —

3. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht.

4. Von einer Ebene ist eine Spur bekannt, und ferner sind die Projektionen eines auf derselben liegenden Punktes gegeben; man soll die übrigen Spuren der Ebene bestimmen. —

5. In einer gegebenen Entfernung mit einer angegebenen Ebene eine andere parallel zu ziehen.

6. Es ist eine Gerade, die im Raume liegt, durch ihre Projektionen gegeben; man soll in einer von dieser Geraden angegebenen Entfernung eine andere zu jener parallel ziehen.

7. Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gezogen werden, die mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel macht. —

8. Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden zu halbiren.

9. Drei Gerade sind gegeben, die in verschiedenen Ebenen liegen; man soll eine vierte bestimmen, welche jede der drei ersteren schneidet. —

10. Eine Ebene und ein [auf derselben angegebenes Viereck so zu drehen, bis sie mit der vertikalen Tafel einen Winkel von 45° einschliesst, und die neuen Spuren der Ebene, so wie die Projektionen des Viereckes anzugeben. —

Dritte Abtheilung.

Viertes Kapitel.

Dreiseitiges körperliches Eck.

§. 150.

Im §. 54. wurde die Erklärung eines dreiseitigen körperlichen Eckes gegeben, und gezeigt, dass die Summe zweier Linienwinkel desselben grösser ist, als der dritte. Wir wollen nun die drei Linienwinkel des dreiseitigen körperlichen Eckes seine **Seiten**, und die Winkel, welche die die Ebenen dieser Seiten unter einander bilden, **Winkel** des dreiseitigen Eckes nennen. Beshreiben wir aus dem Scheitel desselben mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel, so wird letztere von den Ebenen seiner Seiten nach grössten Kreisen geschnitten, von welchen die Bögen, welche zwischen den Kanten des Eckes liegen, seine Seiten messen.

Der Theil der Kugeloberfläche, welcher zwischen den drei Seiten des körperlichen Eckes liegt, wird von Bögen der drei grössten Kreise begränzt, nach welchen die Kugel von den Seitenebenen des Eckes geschnitten wird und man nennt diesen Theil ein **sphärisches Dreieck**. Die drei Bögen, welche dieses sphärische Dreieck begränzen, werden seine **Seiten**, und die Winkel, welche die Ebenen dieser Bögen, also die Seiten des dreiseitigen körperlichen Eckes unter sich bilden, werden **Winkel** des sphärischen Dreieckes genannt. Man ersieht also hieraus, dass man die Seiten des sphärisehen Dreieckes mit den Winkeln des dreiseitigen körperlichen Eckes, und die Winkel des letzteren mit den Winkeln des sphärischen Dreieckes verwechseln kann, wenn der Halbmesser der Kugel bekannt ist, auf deren Oberfläche sich das sphärische Dreieck befindet. —

Anmerk. Unter Kugel versteht man nämlich einen Körper, der von einer einzigen krummen Fläche so begränzt wird, dass alle beliebigen Punkte dieser Fläche von einem bestimmten Punkte dieselben Entfernungen haben. Dieser bestimmte Punkt wird Mittelpunkt, und die Entfernung eines Punktes der krummen Fläche von demselben, Halbmesser genannt.

§. 151.

Nimmt man in einem solchen dreiseitigen körperlichen Ecke einen beliebigen Punkt an, zieht von diesem aus senkrechte Gerade auf die Seitenebenen des Eckes, und legt durch je zwei dieser Senkrechten eine Ebene, so erhält man ein neues dreiseitiges Eck, welches mit dem vorigen in einem bestimmten Zusammenhange steht, und deshalb **Supplementar- oder Ergänzungsdreieck** genannt wird. (Fig. 112.) Ist nämlich aCb die erste Seite, bCc die zweite und cCa die dritte Seite des gegebenenen Eckes, 'C ein innerhalb dieses körperlichen Raumes angenommener Punkt, und man zieht 'C'a senkrecht auf Ebene acb, 'C'b senkrecht auf Ebene bCc und 'C'c senkrecht auf Ebene aCc, legt durch a''C und 'C'b, ferner durch 'b'C und 'c'C und endlich durch 'c'C und 'C'a eine Ebene, so wird das hierdurch erhaltene dreiseiiige körperliche Eck das Supplementardreieck des vorigen genannt. Es ist nun aus §. 50. bekannt, dass wenn man innerhalb des Raumes zweier Ebenen einen Punkt annimmt, von diesem aus auf jede der beiden Ebenen eine Senkrechte zieht, diese Geraden einen Winkel bilden, welcher der Supplementswinkel desjenigen ist, der den Winkel beider Ebenen misst; folglich ist < a''Cc' der Nebenwinkel desjenigen, welchen Ebene aCc mit Ebene aCb bildet, oder < (Ebene aCc, Ebene aCb) + < a''Cc' = 2 R.

Aus demselben Grunde ist auch

< (Ebene aCb, Ebene cCb) + < 'a'Cb' = 2 R

und

< (Ebene bCc, Ebene cCa) + < 'b'Cc' = 2 R

woraus also folgt, dass die Seiten des neuen dreiseitigen Eckes die Supplemente der Winkel des gegebenen Eckes sind.

Wird nun Ca von Ebene 'C'a'c in a, Cb von Ebene 'a'Cb' in b und Cc von Ebene 'b'C'c in c geschnitten, und man zieht a'a, 'ab, b'b, b'c, c'c und 'ca, so erhält man die Communsektionen der Seitenebenen a''C'c, a''Cb' und 'b'Cc' mit den Seitenebenen aCb, bCc und cCa. Da nun a'C' senkrecht auf Ebene aCb ist, so ist a'C senkrecht auf aa' sowohl, als auch auf a'b, uud mithin ist (§. 43.) < ba'a der Neigungswinkel der Ebenen 'a'Cc' und 'a'Cb. Ebenso kann gezeigt werden, dass < bb'c der Neigungswinkel von Ebene a''C'b und Ebene b'C'c und endlich cc'a, der Neigungswinkel von Ebene 'b'Cc' und Ebene 'c'Ca' ist. Nun wurde schon eewähnt, dass aa' senkrecht auf

a C in Ebene a C b, und in derselben Ebene 'a b senkrecht auf b C ist (weil Ebene 'a'C c' senkrecht auf a C und Ebene 'a'C'b senkrecht auf b C nach §. 48. sein muss), daher ist $\angle$ ab'b + $\angle$ a C b gleich 2 R, oder ein Winkel des neuen körperlichen Eckes ist Ergänzungswinkel zu einer Seite des gegebenen dreiseitigen körperlichen Eckes. Ebenso kann auch gezeigt werden, dass $\angle$ b'b c + $\angle$ b C c = 2 R und $\angle$ a c' c + $\angle$ a C c = 2 R. Nimmt man nun diese beiden Sätze zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Zieht man von einem beliebigen Punkte des körperlichen Raumes eines dreiseitigen Eckes auf seine drei Seiten senkrechte Gerade, und legt durch je zwei der letzteren eine Ebene, so erhält man ein neues dreiseitiges körperliches Eck, dessen Seiten die Supplementswinkel von den Winkeln des gegebenen, und dessen Winkel die Supplementswinkel der Seiten des gegebenen dreiseitigen Eckes sind. Man nennt deshalb das eine dieser dreiseitigen Ecke das Supplementareck des anderen. —

§. 152.

(Fig. 113.) Ist S_1 sowohl, als auch S_2 ein dreiseitiges körperliches Eck, und zwar $\angle A_1 S_1 B_1 = \angle A_2 S_2 B_2$, $\angle A_1 S_1 C_1 = \angle A_2 S_2 C_2$ und $\angle B_1 S_1 C_1 = \angle B_2 S_2 C_2$, so müssen auch in beiden Ecken die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel einzeln einander gleich sein. Macht man $S_1 B_1 = S_2 B_2$, zieht $B_1 M_1$ senkrecht auf Ebene $A_1 S_1 C_1$ und $B_2 M_2$ senkrecht auf Ebene $A_2 S_2 C_2$, fällt ferner $M_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$, $M_1 C_1$ senkrecht auf $S_1 C_1$, $M_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ und $M_2 C_2$ senkrecht auf $S_2 C_2$, und zieht die Geraden $B_1 A_1$, $B_1 C_1$, $B_2 A_2$, $B_2 C_2$, so muss (nach §. 24., 1.) $B_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$, $B_1 C_1$ senkrecht $S_1 C_1$, $B_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ und $B_2 C_2$ senkrecht auf $S_2 C_2$ sein. Da nun $B_1 A_1$ senkrecht auf $A_1 S_1$ in Ebene $A_1 S_1 B_1$, $M_1 A_1$ senkrecht auf $A_1 B_1$ in Ebene $A_1 S_1 C_1$ ist, so muss auch (nach §. 43.) der Winkel, welchen Ebene $A_1 S_1 B_1$ mit Ebene $A_1 S_1 C_1$ macht durch $\angle B_1 A_1 M_1$ gemessen sein. Auf gleiche Weise kann man sich überzeugen, dass $\angle B_1 C_1 M_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $B_1 S_1 C_1$ und $A_1 S_1 C_1$, $\angle B_2 A_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$ und endlich $\angle B_2 C_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $B_2 S_2 C_2$ und $A_2 S_2 C_2$ ist. Nun ist nach Annahme $S_1 B_1 = S_2 B_2$ und $\angle B_1 S_1 A_1 = \angle B_2 S_2 A_2$, und nach Construktion $\angle B_1 A_1 S_1 = \angle B_2 A_2 S_2 = R$, mithin ist $\triangle A_1 B_1 S_1 \cong \triangle A_2 B_2 S_2$, und daher

1. $A_1 S_1 = A_2 S_2$,
2. $A_1 B_1 = A_2 B_2$.

Man hat nun ferner nach Annahme $B_1 S_1 = B_2 S_2$ und $\angle B_1 S_1 C_1 = \angle B_2 S_2 C_2$, ferner ist nach Construktion $\angle B_1 C_1 S_1 = \angle B_2 C_2 S_2 = R$, daher $\triangle B_1 S_1 C_1 \cong \triangle B_2 S_2 C_2$ und daher auch

3. $S_1 C_1 = S_2 C_2$ und
4. $B_1 C_1 = B_2 C_2$. Legt man nun S_1 auf S_2, $S_1 A_1$ in die Richtung von $S_2 A_2$, so muss A_1 auf A_2, $S_1 C_1$ in die Richtung von $S_2 C_2$ und C_1 auf C_2 fallen. Da aber $\angle S_1 A_1 M_1 = \angle S_2 A_2 M_2 = R$ und $\angle S_1 C_1 M_1 = \angle S_2 C_2 M_2 = R$ ist, so muss auch ferner $A_1 M_1$ in die Richtung von $A_2 M_2$ und $C_1 M_1$ in die Richtung von $C_2 M_2$ fallen, und es ist daher auch
5. $A_1 M_1 = A_2 M_2$ und
6. $C_1 M_1 = C_2 M_2$. Nun ist aber ferner $\angle B_1 M_1 A_1 = \angle B_2 M_2 A_2 = R$, daher ist auch
7. $\triangle A_1 B_1 M_1 \cong \triangle A_2 B_2 M_2$, folglich
8. $\angle B_1 A_1 M_1 = \angle B_2 A_2 M_2$ und
9. $B_1 M_1 = B_2 M_2$.

Ferner ist

10. $\triangle B_1 C_1 M_1 \cong \triangle B_2 M_2 C_2$, daher auch
11. $\angle B_1 C_1 M_1 = \angle B_2 C_2 M_2$, und es folgt also, dass der der Seite $A_1 S_1 B_1$ gegenüber stehende Winkel des einen Eckes, gleich dem Winkel des andern Eckes ist, welcher der Seite $A_2 S_2 B_2$ gegenüber steht, und dass ferner der im einen Ecke der Seite $B_1 S_1 C_1$ gegenüber liegende Winkel gleich dem des andern Eckes ist, welcher der Seite $B_2 S_2 C_2$ gegenüber liegt. Um nun die Gleichheit der übrigen zwei Winkel zu zeigen, legen wir von B_1 aus auf $B_1 S_1$ eine Ebene senkrecht, und es sei deren Durchschnitt mit Ebene $A_1 S_1 B_1$ die Gerade $B_1 D_1$ und ihr Durchschnitt mit Ebene $B_1 S_1 C_1$ sei $B_1 E_1$. Ferner ziehen wir von B_2 aus auf $S_2 B_2$ eine Ebene senkrecht, und es sei der Durchschnitt derselben mit der Ebene $A_2 S_2 B_2$ die Gerade $D_2 B_2$ und $E_2 B_2$ sei der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit Ebene $B_2 S_2 C_2$. Da nun Ebene $D_1 B_1 E_1$ senkrecht auf $S_1 B_1$ ist, so hat man (§. 7.)

1. $\angle S_1 B_1 D_1 = R$
2. $\angle S_1 B_1 E_1 = R$

und mithin ist (§. 43.) $\angle D_1 B_1 E_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $B_1 S_1 C_1$. Analog wird

3. $\angle S_2 B_2 D_2 = R$ und

4. $< S_2 B_2 E_2 = R$, und mithin (§. 43.) $< D_2 B_2 E_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 B_2 S_2$ und $B_2 S_2 C_2$. —

Da nun $S_1 B_1 = S_2 B_2$, $< S_1 B_1 D_1 = < S_2 B_2 D_2$ und $< B_1 S_1 D_1 = < B_2 S_2 D_2$, so hat man

5. $\triangle D_1 B_1 S_1 \cong \triangle D_2 B_2 S_2$, daher auch

6. $B_1 D_1 = B_2 D_2$.

Ferner hat man, weil $S_1 B_1 = S_2 B_2$, $< B_1 S_1 E_1 = < B_2 S_2 E_2$ und $< S_1 B_1 E_1 = S_2 B_2 E_2$, auch

7. $S_1 E_1 = S_2 E_2$ und 8. $B_1 E_1 = B_2 E_2$.

Hieraus ist nun $D_1 S_1 = D_2 S_2$, $E_1 S_1 = E_2 S_2$ und nach Annahme war $< D_1 S_1 E_1 = < D_2 S_2 E_2$, folglich wird auch

9. $\triangle D_1 S_1 E_1 \cong \triangle D_2 S_2 E_2$ und daher

10. $D_1 E_1 = D_2 E_2$.

Nun ist $D_1 B_1 = D_2 B_2$, $E_1 B_1 = E_2 B_2$ und $D_1 E_1 = D_2 E_2$, folglich wird $\triangle D_1 B_1 E_1 \cong \triangle D_2 B_2 E_2$ und daher auch

11. $< D_1 B_1 E_1 = < D_2 B_2 E_2$.

Aus diesem Ganzen folgt also:

1. Sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den drei Seiten eines andern körperlichen dreiseitigen Eckes, so sind auch die Winkel des einen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den Winkeln des andern.

2. Die Perpendikel, welche man von den Endpunkten zweier entsprechenden und gleichen Kanten dieser beiden Ecke auf die gegenüberliegenden Ebenen ziehen kann, sind einander gleich.

Anmerk. 1. Aus dem (in 1.) ausgesprochenen Lehrsatze folgt, dass wenn drei Winkel gegeben sind, von welchen die Summe zweier grösser, als der dritte ist, ein körperliches dreiseitiges Eck aus diesen Winkeln als Seiten konstruirt werden kann, dessen Winkel konstant sind; denn wenn man ein zweites dreiseitiges Eck aus diesen gegebenen drei Seiten konstruirt, so müssen die Winkel des letzteren einzeln gleich den Winkeln des ersteren sein. Man kann also aus den drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes seine drei Winkel finden.

Anmerk. 2. In §. 151. wurde gezeigt, dass für ein dreiseitiges Eck ein anderes bestimmt werden kann, dessen Seiten die Supplemente der Winkel und dessen Winkel die Supplemente der Seiten des gegebenen Eckes sind. Wenn daher von einem dreiseitigen körperlichen Ecke die drei Winkel bekannt sind, und man sucht ihre Supplemente, so erhält man die Seiten des Supplementareckes. Aus diesen Seiten kann man aber die Winkel des letzteren (Anmerk. 1.) finden, und da diese die Supplemente der Seiten des ersten Eckes sind, so wird man diese finden, wenn man die Winkel des Supplementareckes bestimmt, und diese einzeln zu 2 R ergänzt. Hieraus ersieht man also, dass aus den drei Winkeln eines körperlichen dreiseitigen Eckes auch seine drei Seiten bestimmt werden können.

Anmerk. 3. Sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den drei Seiten eines zweiten dreiseitigen Eckes, und folgen die Seiten des ersten Eckes in derselben Ordnung auf einander, wie die des zweiten, so sind nicht allein die Winkel des ersten einzeln gleich den Winkeln des zweiten Eckes, sondern man kann auch dann diese beiden dreiseitigen Ecke so in einander bringen, dass sie sich vollkommen decken. Diess kann leicht aus dem vorigen §. ersehen werden. —

Anmerk. 4. Liegen die Seiten $A_1 S_1 B_1$ und $B_1 S_1 C_1$ in Bezug auf $S_1 B_1$ ebenso, wie die Seiten $A_2 S_2 B_2$ und $B_2 S_2 C_2$ in Bezug $S_2 B_2$, haben ferner die Senkrechten $B_1 M_1$ und $B_2 M_2$ gleiche Richtung, so haben die drei Seiten des einen dieselbe Ordnung, wie die des andern Eckes, und beide Ecke sind kongruent, wenn sie ihre Seiten einzeln gleich haben. Haben die Perpendikel $B_1 M_1$ und $B_2 M_2$ entgegengesetzte Richtung, so sind die körperlichen Ecke symetrisch gleich.

Anmerk. In §. 150. wurde schon erwähnt, dass, wenn man aus dem Scheitel eines körperlichen dreiseitigen Eckes als Mittelpunkt eine Kugel sich beschrieben denkt, ein sphärisches Dreieck erhalten wird, dessen Seiten durch die Seiten des Eckes und dessen Winkel auch durch die Winkel des Eckes bestimmt sind. Was daher vorher vom körperlichen dreiseitigen Ecke dargethan wurde, gilt auch für das sphärische Dreieck. Wenn also die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes bekannt sind, so können auch seine Winkel bestimmt werden, und aus seinen Winkeln kann man seine Seiten bestimmen. —

§. 153.

(Fig. 113.) Ist $< A_1 S_1 B_1 = < A_2 S_2 B_2$, $< A_1 S_1 C_1 = < A_2 S_2 C_2$ und der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $A_1 S_1 C_1$ gleich dem Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$, so kann gezeigt werden, dass $< B_1 S_1 C_1 = < B_2 S_2 C_2$ ist. Denn macht man dieselbe Construktion, die im vor. §. ausgeführt wurde, schneidet nämlich $S_1 B_1 = S_2 B_2$ ab, zieht $B_1 M_1$ senkrecht auf Ebene $A_1 S_1 C_1$, und $B_2 M_2$ senkrecht auf Ebene $A_2 S_2 C_2$, fällt von M_1 auf $S_1 A_1$ die Senkrechte $M_1 A_1$ und von M_2 auf $S_2 A_2$ die Gerade $M_2 A_2$ senkrecht, und zieht die Geraden $B_1 A_1$ und $B_2 A_2$, so wird (§. 24., 1.) $B_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$ und $B_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ stehen; folglich ist (§. 43.) $< B_1 A_1 M_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $A_1 S_1 C_1$ und $< B_2 A_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$ sein. Nun hat man schon nach vor. §. $A_1 S_1 = A_2 S_2$ und $A_1 B_1 = A_2 B_2$, und da $< B_1 A_1 M_1 = < B_2 A_2 M_2$ nach Voraussetzung und $< B_1 M_1 A_1 = < B_2 M_2 A_2 = R$ ist, so muss auch

1. $\triangle A_1B_1M_1 \cong \triangle A_2B_2M_2$, folglich
2. $B_1M_1 = B_2M_2$ und
3. $A_1M_1 = A_2M_2$

Es ist nun $\angle A_1S_1C_1 = \angle A_2S_2C_2$ nach Voraussetzung,

$S_1A_1 = S_2A_2$ nach vor. §.,

$\angle S_1A_1M_1 = \angle S_2A_2M_2 = R$,

$A_1M_1 = A_2M_2$ nach 1. dieses §..

$S_1C_1M_1 = \angle S_2C_2M_2 = R$,

folglich muss auch

$\angle A_1M_1C_1 = \angle A_2M_2C_2$ und

daher

4. $M_1C_1 = M_2C_2$ und
5. $S_1C_1 = S_2C_2$

Da also

$B_1M_1 = B_2M_2$

$M_1C_1 = M_2C_2$

und

$\angle B_1M_1C_1 = \angle B_2M_2C_2 = R$,

so hat man auch

6. $\triangle B_1S_1C_1 \cong \triangle B_2S_2C_2$, daher
7. $B_1C_1 = B_2C_2$
8. $\angle B_1C_1M_1 = \angle B_2C_2M_2$

Man hatte aber auch

$S_1B_1 = S_2B_2$ und da (nach 5. und. 7. dieses §.)

$S_1C_1 = S_2C_2$ und

$B_1C_1 = B_2C_2$ ist, so wird endlich

9. $\triangle S_1B_1C_1 \cong \triangle S_2B_2C_2$ und daher
10. $\angle B_1S_1C_1 = \angle B_2S_2C_2$

Nun wurde zugleich gezeigt, dass $\angle B_1C_1M_1 = \angle B_2C_2M_2$, also $\angle$ (Ebene $B_1S_1C_1$, Ebene $A_1S_1C_1$) $= \angle$ (Ebene $B_2S_2C_2$, Ebene $A_2S_2C_2$) und nach vor. §. muss nun auch $\angle$ (Ebene $A_1S_1B_1$, Ebene $B_1S_1C_1$) $= \angle$ (Ebene $A_2S_2B_2$, Ebene $B_2S_2C_2$) sein. Es folgt also hieraus der Satz:

Sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes, einzeln gleich zweien Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel eines andern dreiseitigen körperlichen Eckes, so müssen auch die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel des einen Eckes einzeln gleich der dritten Seite und den beiden übrigen Winkeln des andern Eckes sein. —

Anmerk. 1. Aus dem letzten Satze folgt, dass wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes gegeben sind, die übrigen drei Stücke desselben, nämlich die dritte Seite mit den ihr anliegenden Winkeln bestimmt werden können, weil (nach diesem §.) alle dreiseitigen Ecke, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel einzeln gleich haben, auch die übrigen drei Stücke gleich haben müssen. —

Anmerk. 2. Haben zwei dreiseitige körperliche Ecke zwei Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel einzeln gleich, und folgen diese drei Stücke im einem Ecke in derselben Ordnung auf einander, als im andern, so kann man diese beiden Körperwinkel so in einander legen, dass sie sich decken, also kongruent sind. —

Anmerk. 3. In Anmerk. 1. wurde gezeigt, dass durch zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes, die drei übrigen Stücke des letzteren bestimmt werden können. Nun kann man aber durch die gegebenen drei Stücke, wenn man jedes derselben zu 2 R ergänzt, eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel des Supplementareckes bestimmen, und von diesem erhält man ferner die übrigen zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel, wenn man zu den drei gesuchten Stücken des ersten Eckes die Supplemente angibt; folglich kann man aus einer Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln des Supplementareckes die übrigen drei Stücke des letzteren bestimmen. Da man nun aus den Stücken eines jeden dreiseitigen Eckes die Stücke eines seiner Supplementarecke angeben kann, so folgt hieraus, dass, wenn eine Seite und die ihr anliegenden Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes bekannt sind, die übrigen drei Stücke des letzteren bestimmt werden können. —

Anmerk. 4. Da schon im vor. §. gezeigt wurde, dass man die einzelnen Bestimmungsstücke eines dreiseitigen körperlichen Eckes — nämlich seine Seiten und Winkel — mit denen eines sphärischen Dreieckes vertauschen kann, das auf einer Kugeloberfläche liegt, welche ihren Mittelpunkt im Scheitel des Eckes hat, und letzteres abschneidet; so werden auch diese zwei hier bewiesenen Sätze für das sphärische Dreieck gelten. Aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreieckes kann also seine dritte Seite und jeder der beiden übrigen Winkel, und aus einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln eines sphärischen Dreieckes kann jedes der drei übrigen Stücke desselben bestimmt werden. —

§. 154.

In §. 55. wurde gezeigt, dass die Summe der Winkel, welche ein körperliches vielseitiges Eck bilden, kleiner als vier Rechte sein muss. Nun macht die Summe aus den Winkeln des dreiseitigen körperlichen Eckes und den Seiten seines Supplementareckes gleich 3 mal 2 R, nämlich 6 R aus, und da die Summe der Seiten des Supplementareckes kleiner als vier Rechte sein muss, so muss die Summe der Winkel des dreiseitigen Eckes grösser als zwei Rechte sein. Grösser als 6 Rechte kann dieselbe aber in keinem Falle sein, weil sie zur Summe der Seiten des Supplementareckes addirt, sechs

Rechte ausmacht, **folglich ist die Summe der Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes immer grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte.**

Anmerk. Hieraus folgt zugleich, dass in einem sphärischen Dreiecke die Summe der Seiten kleiner als vier Rechte, die Summe seiner Winkel aber grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte sein muss. — Da die einzelnen Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes kleiner als zwei Rechte sein müssen, so ist auch hier nur von solchen sphärischen Dreiecken die Rede, von welchen jede Seite kleiner als zwei Rechte ist, und deshalb konnte auch die Anwendung dieses Paragraphs auf sphärische Dreiecke gemacht werden. —

§. 155.

Aufgabe 32. Es sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes gegeben; man soll

1. seine drei Winkel bestimmen;
2. seine Projektionen angeben.

Auflösung. (Fig. 114.) Es sei a die erste, b die zweite und c die dritte Seite des zu suchenden körperlichen Dreieckes, ferner sei $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$, und man soll die drei Winkel dieses dreiseitigen körperlichen Eckes bestimmen. Man nehme in der horizontalen Tafel und zwar in S den Scheitel dieses Eckes an, lege den Winkel a in die horizontale Tafel, mache also $< ASB = < a$. In S an SA lege man $< ASC_1 = < b$ und in S an SB lege man $< BSC_2 = < c$, welche man sich um SA und SB gedreht denken muss, bis die Geraden SC_1 und SC_2 zusammenfallen. Denken wir uns diese beiden Seiten um SA und SB so weit gedreht, bis die Geraden SC_1 und SC_2 in eine Gerade fallen, so beschreibt jeder Punkt SC_1 einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf SA_1 und jeder Punkt der Geraden SC_2 beschreibt einen Bogen, dessen Ebene senkrecht auf SB steht. Nehmen wir daher $SC_1 = SC_2$ an, so beschreiben die Punkte C_1 und C_2 beim Aufheben der Seiten b und c Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht auf SA und SB sind, und diese beiden Punkte C_1 und C_2 kommen in einen einzigen zu liegen, wenn die Drehung von b und c in ihre wahre Lage gemacht wurde. — Denkt man sich daher von diesem Punkte C_1 oder C_2 auf SA sowohl, als auch auf SB eine Ebene senkrecht gelegt, so wird die erste den Kreisbogen enthalten, welchen C_1 bei der Bewegung um SA und die zweite den Kreisbogen enthalten, welchen C_2 bei seiner Bewegung um SB beschreibt. Die Durchschnitte der von C_1 aus auf SA senkrecht gelegten Ebene mit den Ebenen ASB und ASC bilden aber (§. 50.) den Winkel der Seiten a und b, und liegen (nach §. 23.) in einer auf SA senkrechten Geraden CAC_1, wenn die Seite b in der Ebene von a liegt. Zieht man daher von C_1 aus auf SA die Gerade C_1A_1 senkrecht und verlängert dieselbe, so wird C_1A_1 der eine und A_1C der andere Schenkel des Winkels sein, welchen a und b unter sich machen. Da nun SA_1 in der horizontalen Tafel liegt, so steht auch die Ebene C_1A_1C senkrecht auf der horizontalen Tafel, und es wird mithin die horizontale Projektion des Punktes C_1 (§. 83.) auf A_1C fallen müssen. Wenn wir nun von C_2 aus auf SB die Gerade C_2B_1 senkrecht ziehen, und bis C verlängern, so wird aus gleichem Grunde die Ebene C_2B_1C den Winkel enthalten, welchen c mit a bildet, und zwar wird C_2B_1 der eine und B_1C der andere Schenkel dieses Winkels sein. Denkt man sich nun c sowohl, als auch a so weit um SB und SA gedreht, bis die Punkte C_1 und C_2 in einen zusammenfallen, so ist das verlangte körperliche Eck konstruirt, und in dieser Lage wird die horizontale Projektion von C_2 dieselbe, wie die von C_1 sein. Die von C_2 muss aber aus demselben Grunde in B_1C liegen, aus welchem die horizontale Projektion von C_1 in A_1C liegen muss, folglich fällt die horizontale Projektion dieses im Raume befindlichen Punktes C_1 oder C_2 in den Durchschnitt von C_2B_1 mit C_1A_1, also in C. Nun ist die horizontale Projektion von S dieser Punkt selbst; zieht man daher die Gerade SC_1 so wird ASC die horizontale Projektion von b und CSB die horizontale Projektion von c sein. —

Nun ist (§. 126.) der Winkel, welchen Ebene C_1SA mit der horizontalen Tafel bildet, in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten, dessen eine Kathete die horizontal-projicirende Linie von C_1, dessen andere Kathete die Entfernung der horizontalen Projektion dieses Punktes von SA, also CA_1 und dessen Hypothenuse C_1A_1 ist; zieht man daher von C aus auf CA_1 eine Senkrechte, und schneidet diese von A_1 aus mit der Länge von A_1C_1 ab, so erhält man (§. 126.) $< C'_1A_1C$, welchen die Seite b mit der Seite a macht, und $C_1C'_1$ muss die horizontal-projicirende Linie von C_1 sowohl, als auch die von C_2, und mithin (§. 63.) gleich der vertikalen Ordinate dieses Punktes sein. Zieht man also von C auf X die Gerade Cm senkrecht, und verlängert diese oberhalb X, macht $m'C = C'C_1$, so erhält man in $'C$ die vertikale Projektion des Punktes C_1 oder C_2. Da nun A, B und S in der horizontalen Tafel liegen, so wird die vertikale Projektion von A im Durchschnitte $'A$ der von A aus auf X senkrecht gezogenen $A'A$ mit X, die vertikale Projektion von S in $'S$, dem Durchschnitte der auf X gezogenen Senkrechten $S'S$ mit X und die vertikale Projektion von B im Durchschnitte $'B$ der von B auf X gezogenen

Senkrechten mit X (nach §. 63. und §. 70.) sein. Wenn man daher $'A'S$, $'S'C$ und $'B'S$ zieht, so erhält man die vertikale Projektion des körperlichen Eckes. Da $'C_1C$ die horizontal-projicirende Linie von C_2 ist, so wird der Winkel, welchen c mit a bildet (nach §. 126.) erhalten, wenn man CC'_2 senkrecht auf B_1C zieht, und $CC'_2 = C'C_1$ macht, sodann $'C_2$ mit B_1 durch $B_1'C_2$ verbindet, und es ist der Winkel $CB_1'C_2$ also gleich dem Maasse des Winkels von c und a. — Nun ist noch der Winkel aufzusuchen, welchen b mit c macht. Um diesen zu erhalten, verfahren wir ganz nach §. 139., legen also b um SA und c um SB in die horizontale Tafel, machen $SC_1 = SC_2$, ziehen von C_2 auf C_2S die Gerade C_2E senkrecht, und von C_1 aus auf C_1S die Gerade C_1D senkrecht, ziehen DE, und konstruiren über DE das Dreieck DEF, in welchem $DF = DC_1$, $EF = EC_2$ ist, so wird (§. 139.) $<$ DEF gleich dem sein, welchen Ebene C_1SA mit Ebene C_2SB macht. —

§. 156.

Aufgabe 33. Aus den drei Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes seine drei Seiten und die Projektionen desselben zu bestimmen.

Auflösung. In Anmerk. 2. des §. 152. wurde dargethan, dass man aus den drei Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes seine drei Seiten bestimmen kann, und zwar wurde dort gezeigt, dass man zur Bestimmung dieser Winkel ein Supplementardreieck des zu suchenden konstruiren muss. Wir werden also (nach §. 152.) auf folgende Weise verfahren:

1. Suchen wir zu jedem der drei gegebenen Winkel seinen Nebenwinkel, so erhalten wir die drei Seiten eines Supplementareckes von dem zu suchenden.
2. Aus diesen drei Nebenwinkeln als Seiten konstruiren wir dieses dreiseitige Supplementareck (nach §. 155.), indem wir seine drei Winkel und seine Projektionen bestimmen.
3. Nun ergänzen wir jeden der drei Winkel dieses Supplementareckes zu zwei Rechten, so erhalten wir die gesuchten drei Seiten des zu bestimmenden Eckes.
4. Aus diesen drei Seiten konstruiren wir nach §. 155. ein körperliches Eck, so müssen seine Winkel gleich den gegebenen sein. —

Anmerk. Auf gleiche Weise, wie in §. 155. aus den drei Seiten die drei Winkel und in diesem §. aus den drei Winkeln die drei Seiten eines dreiseitigen körperlichen Eckes gefunden wurden, kann man (§. 152. Anmerk. 4.) aus den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes seine drei Winkel und aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreieckes die drei Seiten dieses Dreieckes finden. —

§. 157.

Aufgabe 34. Zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes sind bekannt; man soll die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel bestimmen. —

Auflösung. Da in (§. 153., Anmerk.) dargethan wurde, dass man aus zwei Seiten und dem von denselben eingeschlossenen Winkel ein körperliches Dreieck konstruiren kann, so wird auch die dritte Seite und jeder der beiden übrigen Winkel durch diese gegebenen drei Stücke bestimmt sein. Um nun aus den gegebenen drei Stücken die übrigen drei zu bestimmen, legen wir die eine der Seiten in die horizontale Tafel, und es sei daher (Fig. 114.) $<$ ASB die eine der gegebenen Seiten, an SA legen wir die andere derselben, welche $< C_1SA$ sein soll. Ziehen wir nun von einem beliebigen Punkte aus auf die Communsektion SA dieser beiden Seiten eine Ebene senkrecht, so werden dieselben von dieser Ebene nach zwei Geraden geschnitten, die den Neigungswinkel beider Seiten bilden (§. 50.). Denken wir uns daher die Seite C_1SA um SA so weit aufgehoben, bis sie mit der Seite ASB den gegebenen Winkel bildet, nehmen auf SC_1 den Punkt C_1 beliebig an, und ziehen von diesem aus auf SA eine Ebene senkrecht, projiciren sodann C_1, so muss die horizontale Projektion dieses Punktes (nach §. 83.) in die horizontale Spur dieser Hülfsebene fallen, und es liegt mithin (§. 126.) der Neigungswinkel der Seiten C_1SA und ASB in einem rechtwinkligen Dreiecke, von welchem die horizontal-projicirende Linie des Punktes C_1 die eine, der zwischen der horizontalen Projektion dieses Punktes und der Geraden SA liegende Theil der horizontalen Spur der Hülfsebene die andere Kathete, die Hypothenuse aber der Durchschnitt der Seiten C_1SA mit der Hülfsebene ist, und diese Hypothenuse bildet mit der horizontalen Spur der Hülfsebene den angegebenen Winkel. Nun ist die von C_1 auf SA senkrecht gezogene Gerade C_1A_1 der Durchschnitt der auf SA senkrecht gelegten Hülfsebene mit der Seite C_1SA, und die von A_1 aus auf SA senkrecht gezogene A_1C_1 gibt die horizontale Spur dieser Hülfsebene an; legen wir daher die Seite C_1SA wieder um SA in die horizontale Tafel, ziehen C_1A_1 senkrecht auf SA, und legen in A_1 an C_1A_1 den Winkel C'_1A_1C der beiden angegebenen Seiten an, so können wir das vorhin erwähnte Dreieck

leicht konstruiren. Wir haben nämlich $A_1'C_1 = A_1 C_1$ zu machen, $'C_1 C$ senkrecht auf $A_1 C$ zu ziehen, so ist $\triangle\ 'C_1 C A_1$ das erwähnte, in welchem $C_1 C$ gleich der horizontal-projicirenden Linie des Punktes C_1 und C die horizontale Projektion dieses Punktes ist. Ziehen wir nun SC, so ist diese Gerade die horizontale Projektion der Communsektion von der Seite ASC_1 und der dritten gesuchten Seite, und mithin ASC die horizontale Projektion von C_1SA und CSB die horizontale Projektion der gesuchten Seite. Um nun diese selbst anzugeben, verfahren wir ebenso, als wenn wir den Neigungswinkel derselben und der Seite ASB finden wollten, denken uns daher von C aus auf SB eine Ebene senkrecht gezogen, und bezeichnen die Durchschnitte derselben mit diesen Seiten. Die von C aus auf SB gezogene Senkrechte CB_1 ist der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit ASB, und die von B_1 aus auf SB gezogene Senkrechte B_1C_2 wird der Durchschnitt jener Ebene mit der gesuchten Seite sein, wenn letztere in der horizontalen Tafel liegend angenommen wird. Da aber der eine Schenkel dieser Seite SB_1, der andere aber mit SC_1 einerlei ist, wenn das körperliche Eck konstruirt gedacht wird, so wird die gesuchte Seite erhalten, wenn man aus S mit SC_1 einen Bogen beschreibt, und mit diesem die Gerade B_1C_2 abschneidet. Von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte C_2 aus ziehen wir nach S die Gerade C_2S, so wird $\angle C_2SB$ gleich der gesuchten dritten Seite des körperlichen dreiseitigen Eckes sein. Von C auf B_1C die Gerade CC'_2 senkrecht gezogen und gleich CC'_1 gemacht, sodann C'_2B gezogen gibt den Winkel $CB_1C'_2$, welcher der gesuchte Neigungswinkel der Seiten ASB und BSC_2 ist. Der dritte Winkel so wie die vertikale Projektion dieses dreiseitigen körperlichen Eckes können nach vor. §. bestimmt werden. —

§. 158.

Aufgabe 35. Es ist eine Seite mit den ihr anliegenden Winkeln eines körperlichen dreiseitigen Eckes gegeben; man soll die übrigen drei Stücke desselben bestimmen.

Auflösung. Nach §. 153. Anmerk. ist durch eine Seite mit den ihr anliegenden Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes, letzteres sowohl als jedes seiner übrigen drei Stücke völlig bestimmt. Wir werden daher vor Allem die gegebene Seite sowohl, als auch jeden der ihr anliegenden Winkel zu zwei Rechten ergänzen, aus diesen Supplementswinkeln ein körperliches Dreieck konstruiren, von welchem die Ergänzungswinkel der gegebenen Winkel des zu suchenden Eckes Seiten sind und der Ergänzungswinkel der angegebenen Seite der eingeschlossene Winkel ist, so wird dieses dreiseitige Eck ein Supplementareck des gegebenen sein, und seine übrigen drei Stücke werden nach vor. §. gefunden werden können. Bestimmt man nun die dritte Seite dieses Eckes, und ergänzt sie zu zwei Rechten, so ist der hierdurch erhaltene Ergänzungswinkel gleich dem dritten Winkel des gesuchten Eckes. Bestimmt man ferner von diesem Supplementarecke die beiden übrigen Winkel, und ergänzt jeden derselben zu 2 R, so werden diese Ergänzungswinkel gleich den beiden gesuchten Seiten des zu bestimmenden körperlichen Eckes sein (§. 151.), und letzteres kann mithin konstruirt werden, weil zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel nunmehr bekannt sind. —

Anmerk. Ebenso, wie in §. 157. aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel und in §. 158. aus zwei Winkeln und der diesen anliegenden Seite die übrigen Stücke des dreiseitigen körperlichen Eckes gefunden wurden, so kann man auch aus zwei Seiten und dem zwischen diesen liegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes, oder aus einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln eines solchen Dreieckes, seine übrigen drei Stücke bestimmen. —

§. 159.

Aufgabe 36. Aus zwei Seiten und dem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber liegt, ein dreiseitiges körperliches Eck und die übrigen Stücke desselben zu konstruiren.

Auflösung. (Fig. 115.) Es sei ASB die eine der gegebenen Seiten, ASC sei die andere, welche um AS gedreht und mit der Seite ASB in die horizontale Tafel gelegt wurde. Um nun die Aufgabe zu lösen, verfahren wir ebenso, als wollten wir den Winkel, welchen die Seite BSA mit der dritten gesuchten und sodann den Winkel suchen, den die Seite ASC_1 mit der Seite BSA macht. Zur Bestimmung des ersteren müssen wir (nach §. 155.) auf die Kante SB eine Ebene senkrecht legen, so wird der Durchschnitt dieser Ebene und der gesuchten mit dem Durchschnitte der Hülfsebene und der Seite BSA den Winkel bilden, welchen BSA mit der gesuchten Seite bildet, und der hier angegeben ist. Legen wir daher von B aus eine Ebene senkrecht auf SB, so wird der Durchschnitt BD der eine Schenkel des gegebenen Winkels sein, wenn wir daher in B an BD diesen Winkel anlegen, so dass $\angle DBF$ gleich diesem Winkel wird, so wird BF der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit der dritten Seite sein. Heben wir daher ADC_1 um AS auf, so muss diese Drehung so weit geschehen, bis die Ebene SBF

von S C_1 getroffen wird. Nun wollen wir zur Aufsuchung des Winkels übergehen, welchen die Seite AS C_1 mit der Seite ASB bildet. Wir legen daher (§. 155.) von D aus auf AS eine Ebene senkrecht, so werden die Durchschnitte derselben mit ASC und ASB, nämlich DC und DE den verlangten Winkel bilden. In dieser Hülfsebene C_1DE bleibt aber der Punkt C_1 stets liegen; folglich wird C_1 in den Durchschnitt der Ebene SBF mit der Ebene C_1DE zu liegen kommen. Von diesem Durchschnitte ist nun E ein Punkt, weil SBE in der einen und C_1DE in der andern Ebene liegt, ferner haben die drei Ebenen SBF, C_1DE und BDF den Punkt F, der im Durchschnitte von DF und BF ist gemeinschaftlich; legen wir daher die Communsektion von Ebene C_1DE mit Ebene BDF um C_1E in die horizontale Tafel, so erhalten wir in A diesen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der dritten Seite mit den beiden Hülfsebenen. Ziehen wir daher von A nach E die Gerade AE, so erhalten wir die Gerade, in welche nach der Aufhebung der Seite AS C_1 der Punkt C_1 zu liegen kommen muss. Von D aus ziehen wir daher mit D C_1 einen Kreisbogen, so wird von diesem die Gerade AE in dem Punkte H getroffen, und es muss in der Entfernung HE von SB der Punkt C_1 nach der Aufhebung der Seite AS C_1 zu liegen kommen. Denken wir uns nun die gesuchte Seite um SE gedreht, und links von ASB in die horizontale Tafel gelegt, ferner mit S C_1 von S aus und mit EH von E aus Kreisbögen beschrieben, so wird im Durchschnitte dieser Bögen nämlich in C_2 ein Punkt erhalten, welcher dem zweiten Schenkel der dritten Seite angehört, und mit C_1 in einen Punkt zusammenfällt, sobald das dreiseitige Eck wirklich konstruirt ist. Zieht man daher S C_2, so erhält man die gesuchte Seite C_2SE, welche mit der Seite ASB den gegebenen Winkel bildet. — Die übrigen Stücke, so wie die Projektionen dieses Eckes können nun nach §. 155. bestimmt werden. —

Anmerk. Hier trifft der Kreisbogen C_1H die Gerade EA nach in 'H, folglich wird C_3 ein Punkt der dritten Seite und C_3 S E diese selbst sein, wenn H' der Durchschnittspunkt ist. In diesem Falle finden also zwei Auflösungen statt, und man findet zwei körperliche dreiseitige Ecke, welche die zwei gegebenen Seiten mit dem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber steht, enthalten. — Wird der von D aus mit D C_1 beschriebene Bogen von AE nur berührt, so erhalten wir bloss ein körperliches dreiseitiges Eck, und die Aufgabe ist dann eine ganz bestimmte. In dem Falle aber, in welchem EA von dem aus D mit D C_1 beschriebenen Kreisbogen gar nicht getroffen wird, ist die Auflösung unmöglich. —

§. 160.

Aufgabe 37. Aus zwei Winkeln und einer Seite, welche einem dieser Winkel gegenüber steht, ein körperliches dreiseitiges Eck und die übrigen drei Stücke desselben zu konstruiren.

Auflösung. Man ergänze jedes dieser drei gegebenen Stücke zu 180°, so erhält man (§. 151.) zwei Seiten und einen Gegenwinkel des Supplementareckes. Aus diesen drei Ergänzungswinkeln (nach vor. §.) das Ergänzungseck und seine übrigen drei Stücke konstruirt, sodann jeden dieser letzteren zu 180° ergänzt, so erhält man die beiden übrigen Seiten und den dritten Winkel des gesuchten Eckes, welches also leicht konstruirt werden kann. —

Anmerk. Auf dieselbe Weise, wie in diesem und dem vor. Paragraphe angegeben wurde, wird man verfahren, wenn man aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel oder aus zwei Winkeln und einer Gegenseite eines sphärischen Dreieckes seine übrigen drei Stücke konstruiren wollte. —

Fünftes Kapitel.

Von den Polyedern, ihrer Erzeugung, ihren Durchschnitten mit Ebenen und ihren Durchdringungen unter sich.

§. 161.

Ein körperlicher Raum wird von wenigstens vier Ebenen begränzt, und ein solcher Körper — der einfachste — ist das Tetraeder. Wird ein Körper von mehr als vier Seiten begränzt, so wird er ein Polyeder genannt, wenn man nicht auf die Anzahl seiner Seitenebenen Rücksicht nehmen will. —

§. 162.

Unter den eckigen Körpern sollen folgende besonders betrachtet werden:

1. das Prisma,
2. die Pyramide und
3. die regelmässigen Körper. —

Begränztes Prisma wird ein Körper genannt, welcher von Parallelogrammen umgränzt wird, die durch zwei parallele Ebenen abgeschnitten sind. — Nimmt man daher eine beliebige drei- oder mehrseitige ebene Figur an, zieht von einem Scheitel derselben aus eine Gerade, die gegen die Ebene

der Figur beliebig geneigt ist, und lässt diese Gerade parallel zu ihrer ersten Richtung an dem Perimeter der gegebenen Figur fortbewegen, so erhält man ein Prisma. Man nennt diese Gerade die Erzeugende oder Generatrix des Prisma, die angegebene Figur, deren Umfang von der Generatrix stets getroffen werden muss, die Direktrix desselben.

§. 163.

Betrachtet man einen beliebigen Punkt der Generatrix, so bleibt derselbe während der Bewegung der Generatrix stets in gleicher Entfernung von der Direktrix, weil jene gegen diese dieselbe Neigung behält, mithin bleibt der betrachtete Punkt der Generatrix in einer Ebene, die parallel zur Direktrix ist. Legt man daher durch einen beliebigen Punkt der Generatrix eine Ebene parallel zur Direktrix, so schneidet diese Ebene das Prisma nach einer Figur, deren Perimeter der Ort ist, auf welchem der angenommene Punkt während der Bewegung der Generatrix bleibt.

Nun beschreibt die Generatrix (nach §. 5.) so viele Ebenen, als wie viele Seiten die Direktrix hat, und da jeder Punkt der Generatrix in einer zur Direktrix parallelen Ebene bleibt, so schneidet jede Ebene, in welcher ein Punkt der Generatrix während der Bewegung der letzteren bleibt (§. 33.) die Seitenebenen des Prisma nach Geraden, die parallel zu den Seiten der Direktrix sind. Die Generatrix bleibt aber bei der Erzeugung des Prisma stets parallel zu ihrer ersten Richtung, folglich sind die Figuren, welche in den einzelnen Seitenebenen entstehen, wenn man parallel zur Direktrix eine Ebene legt, Parallelogramme, und die Seiten der Figur, welche den Durchschnitt dieser mit der Direktrix parallelen Ebene mit dem Prisma bildet, sind einzeln gleich den Seiten der Direktrix. Da aber die Seiten der Figur, welche entsteht, wenn man parallel zur Direktrix eine Ebene legt, auch einzeln parallel zu den Seiten der Direktrix sein müssen, so sind (§. 36.) auch die Winkel jener Figur einzeln gleich den Winkeln der Direktrix.

Hieraus folgt also der Satz:

Legt man in einem unbegränzten Prisma eine Ebene parallel zur Direktrix, so wird dasselbe nach einer Figur abgeschnitten, deren Seiten und Winkel einzeln gleich den Seiten und Winkeln der Direktrix sind, die also auch völlig gleich der Direktrix ist.

Anmerk. 1. Schneidet man die Seitenebenen des Prisma durch eine beliebige Ebene ab, schneidet von einem Scheitel der erhaltenen Durchschnittsfigur aus auf der Generatrix ein bestimmtes Stück ab, und zieht durch den Endpunkt der Generatrix eine Ebene parallel zur ersteren, so schneidet letztere das Prisma nach einer Figur, die gleich und kongruent mit der Durchschnittsfigur der ersten Ebene sein muss. Denkt man sich das Prisma nicht über diese beiden Durchschnittsebenen hinaus verlängert, so nennt man die beiden Durchschnittsfiguren die Grundflächen des zwischen denselben enthaltenen Theiles vom Prisma, und die unter sich gleichen Theile der Generatrix, welche zwischen den Grundflächen liegen, nennt man die Kanten des Prisma. —

Anmerk. 2. Steht die Generatrix senkrecht auf einer Grundfläche des Prisma, so steht sie auch senkrecht auf seiner andern Grundfläche (§. 34.) und das Prisma wird in diesem Falle ein senkrechtes genannt, in jedem anderen Falle ein schiefes. Nach der Anzahl der Seiten, welche die Direktrix hat, unterscheidet man dreiseitige, vierseitige etc. etc. Prismen. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelepipedum genannt; sind diese Grundflächen Rechtecke und das Prisma ein senkrechtes, so nennt man das Parallelepipedum ein rechteckiges. Sind die Grundflächen eines schiefen Parallelepipedums Rhomben, deren Seiten gleich den einzelnen Kanten des Prisma sind, so nennt man dieses Prisma ein Rhomboeder. Sind die Grundflächen eines rechteckigen Parallelepipedums Quadrate, und ist jede Kante so gross, als eine Seite eines solchen Quadrates, so wird dieses Parallelepipedum ein Cubus oder Würfel, auch Hexaeder, regelmässiges Prisma genannt. —

§. 164.

Aus dem vorigen Paragraphe ist also zur Genüge zu ersehen, dass

1. ein Prisma dadurch erzeugt werden kann, indem sich eine Gerade parallel zu ihrer ersten Richtung an dem Perimeter eines Polygones fortbewegt.
2. Die Durchschnittsfiguren von zwei parallelen, also auch von mehreren unter sich parallelen Ebenen völlig gleich sind.

Wir können nun sogleich eine zweite Erzeugungsart des Prisma folgen lassen, die auf diesen letzten Satz beruht. Nimmt man nämlich eine fix bleibende Gerade als Direktrix an, und lässt an dieser eine ebene geradlinige Figur parallel zu ihrer ersten Richtung als Generatrix fortbewegen, so entsteht ein Körper, von welchem man zeigen kann, dass derselbe ein Prisma ist. Denn die Generatrix bleibt stets parallel zu ihrer ersten Richtung, und mithin behält jeder Punkt ihres Perimeters gleiche Entfernung von der Direktrix: es beschreibt daher jeder Punkt der Generatrix eine Gerade, die parallel zur Direktrix ist. Betrachtet

man daher einen Theil des beschriebenen Körpers, welcher zwischen der ersten und einer beliebigen Lage der Generatrix liegt, so wird die Begränzungsfläche desselben aus so vielen Ebenen zusammengesetzt sein, als wie viele Seiten die Generatrix hat (weil nach §. 5. jede Seite der Generatrix eine Ebene beschreibt), und zwar werden die Theile dieser Ebenen, die zwischen den zwei betrachteten Lagen der Generatrix enthalten sind, Parallelogramme sein (weil jede Seite der Generatrix dieselbe Länge beibehält und parallel zu sich selbst bleibt); folglich ist der hierdurch beschriebene Körper ein Prisma. Die Entfernung dieser beiden Lagen der Generatrix, oder überhaupt die Entfernung der Grundflächen eines Prisma wird Höhe desselben genannt. Bei einem senkrechten Prisma gibt jede Kante die Höhe desselben an.

§. 165.

Aus §. 163. und §. 164 kann man ein Mittel ableiten, um ein Prisma projiciren zu können. Benützt man die erste Erzeugungsart, so hat man auf folgende Weise zu verfahren:

1. Hat man die Projektionen seiner Direktrix anzunehmen;
2. Nehme man die Projektionen der Richtung seiner Generatrix an.
3. Ziehe man durch die einzelnen Scheitel der Direktrix Parallele mit der Richtung der Generatrix, und durch je zwei auf einander folgende Lagen der Generatrix eine Ebene gelegt, so erhält man die Seitenflächen des Prisma.

(Fig. 116.) Ist A B C D die horizontale und 'A'B'C D' die vertikale Projektion eines Parallelegrammes, welches Direktrix eines Prisma sein soll, von welchem G, G' die Projektionen der Richtung der Generatrix sind; so ziehe man A a ≠ B b ≠ C c ≠ D d ≠ G, ferner 'A'a ≠ 'B'b ≠ 'C'c ≠ 'D'd ≠ 'G, so werden die diesen Projektionen entsprechenden Geraden im Raume (§. 76.) unter sich parallel sein, und die auf einander folgenden Lagen der Erzeugenden des Prisma sein, mithin stellt A B C D a b c d die horizontale und 'A'B'C'D'd b' a' c' die vertikale Projektion des Prisma dar, dessen zweit-vertikale Projektion leicht bestimmt werden könnte.

Nimmt man die zweite Erzeugungsart zu Hülfe, so projicire man die Generatrix sowohl, als auch die Richtung der Direktrix, ziehe durch die einzelnen Scheitel der ersteren parallele Linien zur Direktrix, so erhält man die einzelnen Kanten des Prisma, durch welche man sich das Prisma vorstellen kann, wenn man durch je zwei aufeinander folgende Kanten eine Ebene gelegt denkt.

§. 166.

Aufgabe 38. Es ist die horizontale Projektion eines auf einem Prisma liegenden Punktes gegeben; man soll seine vertikale Projektion bestimmen.

Auflösung. Da sich der zu bestimmende Punkt auf dem Prisma befinden soll, so wird die Generatrix desselben auch einmal durch diesen Punkt gehen. Denkt man sich daher durch den anzugebenden Punkt eine Parallele zur Richtung der Generatrix (§. 76.) gezogen, so wird diese Parallele jene Lage der Generatrix sein, in welcher dieselbe durch den Punkt geht, dessen horizontale Projektion gegeben ist. Da aber (§. 76.) parallele Gerade auch parallele Projektionen haben, und (§. 72.) die Projektionen eines auf einer Geraden liegenden Punktes in den Projektionen der Geraden liegen müssen; so wird die Gerade, welche man durch die horizontale Projektion des gegebenen Punktes zieht, die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den anzugebenden Punkt geht. Zur horizontalen Projektion dieser Lage der Generatrix kann man aber ihre vertikale Projektion bestimmen, wenn man zur horizontalen Projektion des Punktes, in welchem diese Lage der Generatrix die Direktrix trifft die vertikale Projektion (§. 73.) bestimmt, und durch letztere eine Gerade parallel zur vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix zieht. Zieht man daher von der gegebenen horizontalen Projektion des zu suchenden Punktes aus eine Senkrechte auf die Axe X, so wird der Punkt, in welchem diese Senkrechte von der vertikalen Projektion jener aufgesuchten Lage der Generatrix getroffen wird (§. 73.) die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale Projektion gegeben ist, und der sich auf der Oberfläche des gegebenen Prisma befindet.

(Fig. 116.) Es sei m die horizontale Projektion eines auf dem gegebenen Prisma liegenden Punktes; man soll seine vertikale Projektion bestimmen. Man ziehe m n ≠ G, so ist m n die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix, welche durch den angegebenen Punkt geht, und n ist die horizontale Projektion des Punkes, in welchem letztere die Direktrix trifft. Nach §. 72. muss aber die zu n gehörende vertikale Projektion in 'C'D und nach §. 63. muss dieselbe in der von n auf X senkrecht gezogenen Geraden sein; zieht man daher n'n senkrecht auf X, so wird im Durchschnittspunkte von n'n mit 'C'D, nämlich in n' die

vertikale Projektion des Punktes sein, in welchem die durch den anzugebenden Punkt gehende Lage der Generatrix die Direktrix trifft. Zieht man nun 'n'm ≠ 'G, so wird 'n m' die vertikale Projektion dieser Lage der Generatrix sein, in welcher sich die vertikale Projektion des Punktes befindet, dessen horizontale Projektion m ist. Von m aus auf X die Senkrechte mm' gezogen, gibt im Durchschnitte mit n' m', nämlich in m' (§. 73.) die vertikale Projektion des zu suchenden Punktes an.

§. 167.

Aufgabe 39. Diejenigen Figuren zu bestimmen, nach welchen ein Prisma jede der Projektionstafeln trifft, oder die Spuren eines Prisma anzugeben.

Auflösung. Denkt man sich die Oberfläche des Prisma so weit ausgedehnt, bis sie die horizontale Tafel sowohl, als auch die vertikale Tafel trifft, so erhält man die Spuren des Prisma. Bei der Verlängerung dieser Oberfläche wird nun nicht allein von jeder Ebene derselben, sondern auch von jeder Lage der Generatrix des Prisma die Spur gesucht; daher haben wir zwei Mittel, um die Spuren eines Prisma zu bestimmen, wir können nämlich entweder

1. durch die einzelnen Scheitel der Direktrix Parallele mit der Richtung der Generstrix gezogen denken, durch je zwei auf einander folgende Lagen dieser Parallelen (§. 103.) eine Ebene legen und von diesen Ebenen die Spuren bestimmen, so werden die vertikalen Spuren dieser Seitenebenen des Prisma eine Figur bilden, welche die vertikale Spur des Prisma ist, und ebenso werden die horizontalen Spuren dieser Seitenebenen eine Figur einschliessen, welche die horizontale Spur des Prisma ist. Oder wir können
2. von den durch die einzelnen Scheitel der Direktrix gezogenen Parallelen ihre Spuren bestimmen, die vertikalen Spuren derselben unter sich und ebenso die horizontalen Spuren in derselben Ordnung durch Gerade verbinden, in welcher die Scheitel der Direktrix auf einander folgen, so erhält man (§. 73.) die beiden Spuren des angegebenen Prisma.

(Fig. 116.) Es sei ABCDb die horizontale und 'A'B'C'D'b die vertikale Projektion eines Prisma, man soll seine Spuren bestimmen. Man suche (nach §. 93.) die Spuren h_1 und v_1 der Geraden Aa, 'A'a, ebenso die horizontale Spur h_2 und die vertikale v_2 der Geraden Bb, 'B'b, sodann die horizontale Spur h_3 und die vertikale v_3 von Cc, 'C'c und endlich die horizontale Spur h_4 und die vertikale v_4 der Geraden Dd, 'D'd, ziehe die Geraden $h_1 h_2$, $h_2 h_3$, $h_3 h_4$ und $h_4 h_1$, sodann $v_1 v_2$, $v_2 v_3$, $v_3 v_4$ und $v_4 v_1$, so erhält man die horizontale Spur $h_1 h_2 h_3 h_4$ und die vertikale Spur $v_1 v_2 v_3 v_4$ des angegebenen Prisma.

§. 168.

Aufgabe 40. Es ist die horizontale Spur eines Prisma angegeben, ferner die Richtung seiner Generatrix durch ihre Projektionen und die Spuren einer Ebene; man soll

1. das Prisma projiciren.
2. den Durchschnitt desselben mit jener Ebene angeben.

Auflösung. Um 1. die Projektionen des Prisma anzugeben, ziehe man durch die Scheitel der gegebenen horizontalen Spur parallele Gerade mit mit der horizontalen Projektion der Richtung der Generatrix, so erhält man die horizontale Projektion des Prisma (§. 165.), weil man die horizontale Spur des Prisma als Direktrix desselben betrachten kann. Da nun die vertikale Projektion dieser Spur in der Axe liegen muss (§. 70.), so werden die vertikalen Projektionen ihrer einzelnen Scheitel (§. 70.) in den Durchschnitten der von denselben auf X gezogenen Senkrechten mit X sein. Durch die vertikale Projektion dieser einzelnen Scheitel der horizontalen Spur des Prisma parallele Gerade zur vertikalen Projektion der Generatrix gezogen, gibt (§. 165.) auch die vertikale Projektion des Prisma.

Nun soll 2. die Durchschnittsfigur des Prisma mit der gegebenen Ebene bestimmt werden. Denkt man sich die Oberfläche des Prisma bis zum Durchschnitte mit der gegebenen Ebene verlängert, so wird auch jede Lage der Generatrix desselben hierdurch bis zu jener Ebene ausgedehnt, und mithin auch jene Lagen derselben, die durch die einzelnen Scheitel der horizontalen Spur des Prisma gehen. Es enthält also die Durchschnittslinie der Oberfläche des Prisma mit der gegebenen Ebene die einzelnen Durchgangspunkte seiner Kanten mit jener Ebene. Bestimmt man daher (§. 114.) den Durchgangspunkt einer jeden Kante des Prisma mit der gegebenen Ebene, verbindet diese einzelnen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix (hier der horizontalen Spur) auf einander folgen; so erhält man die Projektionen der gesuchten Durchschnittsfigur. —

Die wahre Grösse dieser Durchschnittsfigur erhält man dadurch, dass man die gegebene Ebene um eine ihrer Spuren dreht, und in die mit dieser

Spur gleichnamige Tafel legt, sodann (nach §. 130.) jeden Scheitel der Durchschnittsfigur in der umgelegten Ebene bestimmt, und diese erhaltenen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade verbindet, in welcher die einzelnen Scheitel selbst aufeinander folgen.

Anmerk. Man kann die Grösse dieser Durchschnittsfigur auch dadurch angeben, dass man die Durchschnittsebene so weit dreht, bis sie parallel mit einer der Tafeln ist, z. B. parallel zur horizontalen Tafel, sodann die neue horizontale Projektion der Durchschnittsfigur bestimmt, so wird diese auch gleich ihrer wahren Grösse sein. —

§. 169.

Beispiel 1. (Fig. 117.) Das regelmässige Sechseck ABCDE sei die horizontale Spur eines sechsrechten Prisma, man soll die Projektionen dieses Prisma und die Durchschnittsfigur der Ebene HSV mit demselben angeben, wenn letztere senkauf der vertikalen Tafel steht.

Da dieses Prisma senkrecht auf seiner horizontalen Spur ist, so ist dasselbe auch senkrecht auf der horizontalen Tafel, und es steht mithin die Richtung seiner Erzeugenden senkrecht auf dieser Projektionstafel. Da nun die Punkte A, B, C, D, E die horizontalen Spuren der einzelnen Kanten des Prisma sind, so werden diese zugleich ihre horizontalen Projektionen sein, und ihre vertikalen Projektionen müssen (§. 75.) senkrecht auf X sein. Bestimmt man daher (§. 70.) die vertikalen Projektionen 'A, 'B, 'C, 'D, 'E der Scheitel des gegebenen Sechseckes, zieht sodann die Geraden 'AM, 'BN, 'EP, 'CQ senkrecht auf X, so erhält man die vertikale Projektion des Prisma, dessen horizontale Projektion mit seiner horizontalen Spur zusammenfällt, also ABCDE ist. Soll nun der Durchschnitt dieses Prisma mit der Ebene HSV angegeben werden, und steht letztere senkrecht auf der vertikalen Tafel, so hat man nur noch die wahre Grösse dieses Durchschnittes zu bestimmen; denn diese Durchschnittsebene ist, weil sie senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, zugleich vertikal - projicirende Ebene der Durchschnittsfigur (§. 83., Anmerk.), weshalb also 'a'b'e'c die vertikale Projektion der letzteren ist. Nun muss ferner die horizontale Projektion eines jeden Scheitels dieser Figur (§. 72.) in der horizontalen Projektion einer Kante des Prisma sein, und da die horizontalen Projektionen aller Kanten in ABCDE sind, so wird auch die horizontale Projektion der Durchschnittsfigur mit ABCDE zusammenfallen; folglich ist ABCDE die horizontale und 'a'b'e'e die vertikale Projektion der gesuchten Durchschnittsfigur. — Um die wahre Grösse dieser letzteren anzugeben, wollen wir die Ebene HSV um V drehen und in die vertikale Tafel legen, sodann (§. 130.) den wahren Ort eines jeden Scheitels der Figur angeben. Ziehen wir daher die Geraden $'aA_1$, $'bB_1$, $'cC_1$, $'bE_1$ senkrecht auf 'V, machen $'aA_1 = 'AA$, $'aF_1 = 'AF$, $'bB_1 = 'BB$, $'bE_1 = B'E$, $'cC_1 = 'CC$ und $'cD_1 = 'CD$, zieht A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 und E_1F_1, so erhalten wir die Figur $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, welche die wahre Grösse der Durchschnittsfigur angibt. —

Anmerk. Die Grösse dieser Durchschnittsfigur ist auch durch $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ bestimmt, und es wird letztere gefunden, wenn man die Ebene HSV um die auf der vertikalen Tafel senkrecht stehende Gerade B'B, 'b dreht, bis sie parallel mit der horizontalen Tafel ist.

Beispiel 2. (Fig 118.) Es sei ABCDE die horizontale Spur eines Prisma, G, 'G seien die Projektionen seiner Generatrix, ferner HSV eine beliebige Ebene; man soll die Projektionen des Prisma und seine Durchschnittsfigur mit der gegebenen Ebene bestimmen. Nach (§. 70.) ist die vertikale Projektion eines jeden in der horizontalen Tafel liegenden Punktes in der Axe X, folglich ist 'A'B'C'D'E die vertikale Projektion von ABCDE, und ist leicht zu bestimmen. Da nun die einzelnen Kanten des Prisma durch die Punkte A, B, C. D, E gehen, so werden die vertikalen Projektionen dieser Kanten durch die Punkte 'A, 'B, 'C, 'D, 'E und ihre horizontalen Projektionen durch die Punkte A, B, C, D, E gehen müssen. Da aber diese einzelnen Kanten parallel mit der gegebenen Richtung der Erzeugenden, also ihre vertikalen Projektionen parallel 'G und ihre horizontalen Projektionen parallel mit G sein müssen, so erhält man die horizontale Projektion dieses Prisma, wenn man die Geraden Af, Bg, Ch, Dk, El parallel mit G zieht; die vertikale Projektion desselben wird erhalten, wenn man $'Af_1$, $'Bg_1$, $'Ch_1$, $'Dk_1$, $'El_1$ parallel mit 'G zieht. Sucht man nun von diesen einzelnen Kanten (nach §. 114.) die Durchgangspunkte mit der Ebene HSV, und verbindet diese in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die horizontale Projektion abcde und die vertikale Projektion 'a'b'c'd'e der Figur, nach welcher das angegebene Prisma von der Ebene HSV geschnitten wird. — Nun lege man diese Ebene, indem man dieselbe um V dreht, in die vertikale Tafel, ziehe 'am senkrecht auf V, ziehe $'aA_1$ senkrecht auf 'am, und mache $'aA_1 = as$, verbinde m mit A_1 durch mA_1, und mache $mA_2 = mA_1$, so erhält man (§. 130.) in A_2 den Ort a'a in der umgelegten Ebene. Auf gleiche Weise kann man die Punkte b'b, c'c etc, etc. in der umgelegten Ebene finden, die in B_2, C_2, D_2 und E_2 sein werden.

Verbindet man diese Punkte der Ordnung nach durch Gerade, so erhält man die Figur $A_2\ B_2\ C_2\ D_2\ E_2$, welche die Grösse derjenigen angibt, nach welcher das angegebene Prisma von der Ebene HSV geschnitten wird. —

Beispiel 3. (Fig. 119.) Es sei die Direktrix eines Prisma durch ihre Projektionen (A B C und 'A'B'C) gegeben, ferner seien G, 'G die Projektionen der Richtung der Generatrix desselben, man soll parallel mit der Direktrix in einer bestimmten Entfernung das Prisma durch eine Ebene abschneiden, die Projektionen der Durchschnittsfigur bestimmen, und die Grösse der letzteren angeben. Vor Allem ziehe man durch die einzelnen Scheitel der Direktrix, nämlich durch A'A, B'B, C'C parallele Gerade zur Generatrix, ziehe also ihre horizontalen Projektionen parallel zur horizontalen Projektion der Generatrix und ihre vertikalen Projektionen parallel zur vertikalen Projektion der Generatrix, so erhält man die Projektionen der Kanten des Prisma und kann daher letzteres sich leicht vorstellen. Nun suche man die Ebene, in welcher die Direktrix liegt, lege also durch die drei Punkte A'A, B'B und C'C eine Ebene HNV (§. 105.), und ziehe durch den Endpunkt einer Kante die Ebene ES'E parallel zu HNV, suche nach vor. §. den Durchschnitt von ES'E mit dem gegebenen Prisma, so wird derselbe parallel, und mithin (§. 163.) auch gleich der gegebenen Direktrix (A B C, 'A'B'C) sein. Von diesem Schnitte könnte man die wahre Grösse ebenso finden, wie diess in den vorigen Beispielen von den Durchschnittsfiguren geschehen ist; allein da man aus §. 163. weis, dass derselbe gleich der gegebenen Direktrix ist, so ist das Aufsuchen desselben unnöthig. —

Anmerk. Da bei diesen Construktionen auf die Anzahl der Scheitel der Direktrix nicht Rücksicht genommen wurde, so gelten dieselben für ein Prisma, das irgend ein Polygon zur Direktrix hat. —

§. 170.

Aufgabe 41. Es ist ein Prisma durch seine Direktrix und die Projektionen seiner Generatrix gegeben; man soll den Durchschnitt desselben mit einer Ebene angeben, welche parallel zur Erzeugenden ist.

Auflösung. Vor Allem haben wir zu untersuchen, was für eine geometrische Grösse dieser gesuchte Durchschnitt ist. Ist die Durchschnittsebene nicht parallel mit der Erzeugenden, so ist sie auch nicht parallel mit einer der Kanten des Prisma, und wird mithin von jeder der Kanten auch getroffen, so dass also die Durchschnittsfigur in diesem Falle ebenso viele Seiten hat, als wie viele Kanten das Prisma, oder als wie viele Seiten seine Direktrix hat. In unserem vorliegenden Falle kann aber keine der Kanten die Durchschnittsebene treffen, sondern es müssen entweder die einzelnen Kanten mit dieser Ebene parallel oder einzelne derselben in ihr selbst enthalten sein. Nun schneidet unsere Durchschnittsebene zwei Seitenebenen des Prisma (§. 13.) nach Geraden, und da diese Ebene parallel zu den einzelnen Kanten ist, so muss auch jede der Kanten parallel zu jener Geraden sein, nach welchen zwei Seitenebenen des Prisma von der Durchschnittsebene geschnitten werden. Solche zwei Gerade aber, welche sich auf der Oberfläche des Prisma befinden und parallel zu seinen Kanten sind, müssen auch (§. 28.) parallel zu seiner Erzeugenden sein, und sind mithin zwei Lagen dieser Generatrix. Es folgt also hieraus, dass der Durchschnitt eines unbegränzten Prisma mit einer Ebene ein unbegränzter Raum ist, und zwar zwei Gerade, welche parallel mit der Erzeugenden sind. Ist das Prisma begränzt, so werden auch (§. 33.) seine beiden Grundflächen nach zwei unter sich parallelen Geraden von jener Durchschnittsebene geschnitten, und es ist mithin der Durchschnitt eines begränzten Prisma durch eine Ebene ein Parallelogramm. —

Um nun bei einem unbegränzten Prisma seinen Durchschnitt mit einer Ebene zu finden, welche parallel zur Erzeugenden ist, bestimme man vor Allem eine Spur des Prisma, z. B. seine horizontale Spur (nach §. 167.), so muss diese von der Durchschnittsebene geschnitten werden. Die Punkte nun, in welchen der Umfang der horizontalen Spur des Prisma von der horizontalen Spur der Ebene getroffen wird, liegen sowohl auf dem Prisma (weil sie seiner Spur angehören), als auch in der Durchschnittsebene (weil sie auf ihrer horizontalen Spur sich befinden), und gehören mithin den Durchschnittslinien der Ebene mit dem Prisma an. Da aber diese letzteren parallel zur Erzeugenden sind, so darf man nur durch jeden der Punkte, in welchem die horizontale Spur des Prisma von der horizontalen Spur der Ebene getroffen wird, eine Gerade (§. 76.) parallel zur Generatrix legen, so erhält man die beiden Geraden, nach welchen das Prisma von der Ebene geschnitten wird. Diese Durchschnittslinien treffen die Direktrix des Prisma in Punkten, welche der Durchschnittsebene und dieser Direktrix angehören müssen; verbindet man daher dieselben durch eine Gerade, so wird diese der Durchschnitt der Direktrix mit der gegebenen Ebene sein. —

§. 171.

Beispiel. (Fig. 120.) Ist ABCD die horizontale Spur eines Prisma, G die horizontale und 'G die vertikale Projektion seiner Generatrix, und man schneidet dasselbe durch eine Ebene ES'E, die parallel mit der Generatrix ist, so ist jeder der Punkte M und N, welche die horizontale Spur ABCD des Prisma mit der horizontalen Spur E der Ebene ES'E gemeinschaftlich hat, den Durchschnitten der Ebene mit dem Prisma angehörig. Da nun diese Durchschnitte Parallele zu G, 'G sein, und die Punkte M und N enthalten müssen, so werden ihre horizontalen Projektionen parallel mit G sein und durch M und N gehen, und ihre vertikalen Projektionen werden die durch 'M und 'N gehenden und mit 'G parallel gezogenen Geraden sein; daher ist MP, 'M'P die eine, NQ, 'N'Q die andere Gerade, nach welcher die Oberfläche des Prisma von der mit G, 'G parallelen Ebene geschnitten wird. —

§. 172.

Aufgabe 42. Ein auf der horizontalen Tafel senkrecht stehendes Prisma ist durch eine Ebene abgeschnitten; man soll die Oberfläche dieses Prisma abwickeln und in eine Ebene legen, sodann den Durchschnitt jener Ebene mit der Oberfläche des Prisma angeben.

Auflösung. Dreht man die erste Seitenebene um die mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftliche Kante, bis dieselbe in die Verlängerung dieser zweiten Seitenebene fällt, so beschreibt jeder Punkt der ersten Seitenebene einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der gemeinschaftlichen Kante der ersten und zweiten Seitenebene steht. Da nun die einzelnen Kanten des Prisma senkrecht auf der horizontalen Tafel, also auch senkrecht auf den Seiten seiner horizontalen Spur sind, und (§. 23.) die horizontale Spur der ersten Seitenebene des Prisma auch senkrecht auf der mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftlichen Kante bleibt, so wird die horizontale Spur der ersten mit der horizontalen Spur der zweiten Seitenebene in eine Gerade fallen, die senkrecht auf ihrer gemeinschaftlichen Kante ist, sobald die erste Seitenebene in der Verlängerung der zweiten Seitenebene liegt. Dreht man ebenso die Ebene der beiden ersten Seitenebenen um die Kante, welche die zweite mit der dritten Seitenebene gemeinschaftlich hat, bis die beiden ersten Seitenebenen in die Verlängerung der dritten Seitenebene fallen, so wird wieder die horizontale Spur dieser letzteren senkrecht auf der mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftlichen Kante bleiben, und mit den horizontalen Spuren der letzteren in eine Gerade fallen. Auf diese Weise fortgefahren kann man die ganze Oberfläche entwickeln. — Man ersieht also hieraus, dass wenn man ein senkrechtes Prisma entwickelt, der Perimeter seiner Grundfläche eine Gerade wird, die senkrecht auf der Kante des Prisma steht, und gleich seiner vorigen Länge ist. Oder allgemeiner: wenn man ein Prisma entwickelt, so bleibt der Umfang des auf eine Kante senkrecht gelegten Schnittes senkrecht auf jeder Kante, und verwandelt sich nach der Abwickelung in einer Gerade von der ursprünglichen Länge. Hieraus folgt also die Regel, ein senkrecht auf der horizontalen Tafel stehendes Prisma abzuwickeln, und diese besteht in Folgendem:

1. Ziehe man eine beliebige Gerade in der Ebene, in welcher man die Oberfläche des Prisma ausbreiten will, und trage auf diese Gerade alle Seiten der horizontalen Spur des Prisma.
2. Ziehe man von den Endpunkten der auf jene Gerade getragenen Seiten senkrechte Gerade auf letztere, und mache diese gleich den einzelnen Theilen der Kanten, welche zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene liegen.
3. Verbinde man die Endpunkte dieser Kanten durch Gerade, so erhält man den Umfang der Durchschnittsfigur, welche nun mit dem Prisma abgewickelt ist.

§. 173.

Beispiel 1. (Fig. 117.) Ist ABCDEF die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Prisma, welches von der auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Ebene HSV abgeschnitten wird, und man soll dieses Prisma mit der Durchschnittsfigur abwickeln, so ziehe man (Fig. 117. a.) die Gerade $A_1 A_1$, mache $A_1 B_1 = AB$, $B_1 C_1 = BC$, $C_1 D_1 = CD$, $D_1 E_1 = DE$, $E_1 F_1 = EF$, so ist AF die Gerade, in welche sich (§. 172.) die Grundfläche der Figur bei der Entwickelung des Prisma verwandelt. Zieht man nun die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ etc. etc. senkrecht auf $A_1 A_1$, und macht $A_1 A_2 =$ 'A'a, $B_1 B_2 =$ 'B'b, $C_1 C_2 =$ 'C'c etc. etc., zieht sodann $A_2 B_2$, $B_2 C_2$ etc. etc., so wird $A_2 A_1 A_1 A_2$ das entwickelte Prisma, und zwar derjenige Theil desselben sein, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Schnittebene liegt. —

Beispiel 2. (Fig. 121.) ABCD sei ein in der horizontalen Tafel liegendes Parallelogramm,

über welches ein Prisma senkrecht errichtet werden soll; man soll dieses Prisma durch die beliebig gegen die Tafeln geneigte Ebene E S'E abschneiden, und das Prisma sammt diesem Schnitte entwickeln. Vor Allem verlängere man A B bis zur Axe X, ziehe vom Durchschnittspunkte q der Geraden A B mit X auf letztere eine Senkrechte q q', so kann man A q q' als eine Hülfsebene betrachten, welche die Kanten 'A M, A und 'B N, B enthält. Zieht man daher m m' senkrecht auf X, verbindet m' mit q' durch eine Gerade, so werden die Durchschnittspunkte der letzteren mit 'A M und 'B N, nämlich 'a und b' die vertikalen Projektionen der Durchgangspunkte der Senkrechten 'A 'M, A und 'B 'M, B in die Ebene E S 'E sein. Auf gleiche Weise kann man (mit Hülfe des §. 114.) die vertikalen Projektionen der Durchgangspunkte der übrigen Kanten in die Ebene E S 'E finden. Die horizontalen Projektionen dieser Durchgangspunkte liegen in A, B, C und D, weil die einzelnen Kanten des Prisma senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Die wahre Grösse dieses Schnittes kann nach §. 168. angegeben werden. Um nun dieses Prisma sammt dem erhaltenen Schnitte zu entwickeln, ziehe man $A_1 A_1$, mache $A_1 B_1 = AB$, $B_1 C_1 = BC$, $C_1 D_1 = CD$, $D_1 A_1 = DA$, so wird $A_1 D_1$ der entwickelte Umfang der horizontalen Spur des Prisma sein. Errichtet man nun $A_1 A_2$ senkrecht auf $A_1 D_1$, so entspricht diese Senkrechte der Kante, deren horizontale Projektion A, und deren vertikale Projektion 'A M ist. Ferner ziehe man $B_1 B_2$ senkrecht auf $A_1 D_1$, so entspricht dieselbe der Kante B, 'B N; errichte ferner auf $A_1 D_1$ die Geraden $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$ senkrecht, so entspricht die erste derselben der Kante 'C P, C und die zweite der Kante 'D Q, D. Macht man nun auch $A_1 A_2$ = 'a 'A, $B_1 B_2$ = 'b 'B, $C_1 C_2$ = 'c 'C und $D_1 D_2$ = 'D 'd, und zieht die Geraden $A_2 B_2$, $B_2 C_2$, $C_2 D_2$, $D_2 A_2$, so erhält man das entwickelte Prisma $A_2 B_2 C_2 D_2 A_2 A_1 A_1$. —

§. 174.

Aufgabe 43. Ein beliebiges Prisma ist durch eine Ebene abgeschnitten, man soll das Prisma sowie den Schnitt entwickeln.

Auflösung. Aus §. 172. ist bekannt, dass wenn man ein Prisma entwickelt, jeder auf seiner Kante senkrecht stehende Schnitt bei der Entwickelung des Prisma sich in eine Gerade verwandelt, auf welcher die Kanten senkrecht bleiben. Legt man daher senkrecht auf eine Kante des gegebenen Prisma eine Ebene senkrecht, und bestimmt ihre Durchschnittsfigur mit dem Prisma, so kann man den zwischen dieser Figur und der zweiten Durchschnittsfigur enthaltenen Theil des Prisma sowohl, als auch den zwischen dem senkrechten Schnitte und der horizontalen Tafel liegenden Theil entwickeln, wenn man genau nach den Regeln des vorigen §. und des §. 172. verfährt, und die Länge der Kantentheile des Prisma vor der Entwickelung desselben bestimmt. —

§. 175.

Beispiel. (Fig. 122.) Es sei A B C D E die horizontale Spur eines Prisma und G'G die Projektionen seiner Generatrix, man soll den Durchschnitt dieses Prisma durch die Ebene E_1 S E'_1 angeben, und das Prisma mit diesem Schnitte entwickeln. Wir ziehen V'S senkrecht auf 'G und 'S H senkrecht auf G, so erhalten wir (§. 84.) die Spuren einer Ebene H'S V, welche senkrecht auf den Kanten des Prisma, also auf letzterem selbst senkrecht steht. Bestimmen wir nun den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Prisma, so erhalten wir (§. 170.) die Projektionen m n p q r, m' n' p' q' r, dieses Durchschnittes. Entwickelt man nun das Prisma, so wird dieser Durchschnitt (nach §. 172.) sich in eine Gerade verwandeln, die gleich der Länge seines Umfanges ist. Legt man daher diese Hülfsebene in eine der Tafeln, und bestimmt den Durchschnitt in dieser umgelegten Ebene, trägt sodann auf die Gerade a_2 k diesen Umfang, so dass $m_2 m_2$ gleich der Länge von $m_1 n_1 p_1 q_1 r_1$ wird, so werden die Kanten des Prisma bei seiner Entwickelung senkrecht auf $m_2 m_2$ zu stehen kommen. Bestimmt man den Durchschnitt der Ebene E_1 S'E_1 mit dem Prisma, welcher a b c d e, a' b' c' d' e' sein wird, und zieht die Geraden $m_2 A_1$, $n_2 B_1$, $p_2 C_1$, $q_2 D_1$, $r_2 E_1$, $m_2 A_1$ senkrecht auf m_2 k, macht $m_2 A_1$ = der Länge Geraden (m a, m' a'), $n_2 B_1$ = der Länge der Geraden (n b, n' b'), $p_2 C_1$ = der Länge der Geraden (p' c', p c), und $q_2 D_1$ = der Länge von (q d, q' d'), zieht sodann $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 D_1$, $D_1 E_1$ und $E_1 A_1$, so erhält man den Theil der Oberfläche vom gegebenen Prisma, welcher zwischen der senkrechten Hülfsebene und der gegebenen Ebene liegt. Nun verlängere man die Kanten $A_1 m_2$, $B_1 n_2$ etc. etc., mache $m_2 A_2$ = der Länge der Kante ('m 'A, m A), $n_2 B_2$ = der Länge von (n B, 'n 'B), $p_2 C_2$ gleich der Länge von (p C, p' C') und $q_2 D_2$ = der Länge der Geraden (q D, q' D'), ziehe $A_2 B_2$, $B_2 C_2$ etc. etc., so ist $m_2 A_2 B_2 C_2 D_2 A_2 m_2$ derjenige Theil der Oberfläche, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der Ebene H 'S V liegt, folglich ist $A_1 A_2 B_2 D_2 A_2 A_1 D_1 B_1$ derjenige Theil der Oberfläche des Prisma, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der gegebenen Durchschnittsebene liegt. —

§. 176.

Bewegt sich eine Gerade, die stets durch einen bestimmten Punkt geht, an dem Perimeter irgend einer ebenen geradlinigen Figur fort, so entsteht ein Körper, welcher **Pyramide** genannt wird, von welcher die sich bewegende Gerade die **Generatrix** und die Figur, an welcher sich diese Generatrix fortbewegt, **Direktrix** genannt wird. Der Punkt, durch welchen die Generatrix bei ihrer Bewegung stets gehen muss, wird **Centrum** oder **Scheitel** der Pyramide genannt. Sind die Theile der Erzeugenden einer Pyramide, welche zwischen dem Centrum und der Direktrix liegen, gleich lang, so werden auch (nach §. 18.) die Endpunkte dieser Theile der Generatrix vom Fusse derjenigen Senkrechten, welche vom Centrum auf die Ebene der Direktrix gezogen wird, gleiche Entfernung haben, und man nennt die Pyramide in diesem Falle eine **senkrechte**. Die vom Centrum einer Pyramide auf die Ebene ihrer Direktrix gezogene Senkrechte wird ihre **Höhe** und sodann die Direktrix ihre **Grundfläche** genannt, wenn man sich die Pyramide bloss bis zur Direktrix und nicht weiter ausgedehnt denkt. Die einzelnen Lagen der Generatrix, welche durch die Scheitel der Direktrix gehen, werden die **Kanten**, auch **Seitenlinien** der Pyramide genannt. —

§. 177.

Die Erzeugung der Pyramide gibt uns wieder ein Mittel an, um dieselbe darstellen zu können. Wir wissen nämlich, dass

1. ein fixer Punkt, nämlich das Centrum der Pyramide zu wissen nothwendig ist;
2. eine ebene Figur bekannt sein muss, welche die Direktrix der Pyramide ist.

Um daher eine Pyramide darzustellen, geben wir die Projektionen ihres Centrums sowohl, als auch die Projektionen ihrer Direktrix an, ziehen durch die vertikale Projektion des Centrums Gerade, die durch die vertikalen Projektionen der Scheitel der Direktrix gehen, und ebenso ziehen wir durch die horizontale Projektion des Centrums gerade Linien, die durch die horizontalen Projektionen der Scheitel der Direktrix gehen, so erhalten wir die Projektionen der Kanten der Pyramide, wodurch man sich letztere sowohl, als auch ihre Oberfläche vorstellen kann, wenn man durch je zwei auf einander folgende Lagen dieser Kanten eine Ebene gelegt denkt. Diese Ebenen geben Theile der Oberfläche an, und werden **Seitenebenen** oder **Seitenflächen** der Pyramide genannt. —

§. 178.

(Fig. 123.) Schneidet man die Pyramide, deren Grundfläche A B C D E sein soll und deren Centrum in S ist durch eine Ebene, die parallel zur Ebene der Grundfläche A B C D E ist, so erhält man eine Durchschnittsfigur von eben so vielen Seiten, als wie viele die Grundfläche hat, weil jede Kante der Pyramide jene Ebene trifft, und die Verbindungslinien der einzelnen Durchgangspunkte die Durchschnittsfigur begränzen. Diese letztere hat aber mit der Grundfläche noch andere Beziehungen. Sind nämlich a, b, c, d, e die Durchgangspunkte der einzelnen Pyramidenkanten in jene Ebene, also a b c d e die Durchschnittsfigur, so müssen die Durchschnittslinien der Ebenen a b c d e und A B C D E mit S A B, nämlich a b und A B (§. 33.) unter sich parallel sein, ebenso muss auch $bc \neq BC$, $cd \neq CD$, $de \neq DE$ und $ea \neq EA$ sein. Nun muss aber auch (nach §. 36.), $\angle abc = \angle ABC$, $\angle bcd = \angle BCD$, $\angle cde = \angle CDE$ und $\angle dea = \angle DEA$ sein, und da $AB : ab = BS : bS$ und $BC : bc = BS : bS$, also $AB : ab = BC : bc$; ferner $BC : bc = CS : cS = BS : bS$ und $CD : cd = cS : cS$, so hat man $ab : AB = bc : BC = cd : CD$ etc. etc. und es wird also

$$abcde \sim ABCDE$$

sein. Da nun diess von irgend zwei Figuren, deren Scheitel in den Kanten einer Pyramide liegen, und deren Ebenen parallel sind, gezeigt werden kann, so folgt hieraus der Satz:

Schneidet man eine Pyramide durch zwei parallele Ebenen, so müssen die erhaltenen Durchschnittsfiguren unter sich ähnlich sein.

Anmerk. 1. Kennt man eine dieser beiden Figuren und eine Seite der andern, so kann man leicht diese letztere konstruiren, weshalb also auch der Durchschnitt einer Pyramide durch eine Ebene, die parallel zur Ebene einer auf der Pyramide schon angegebenen Figur ist, leicht bestimmt werden kann. —

Anmerk. 2. (Fig. 123.) Denkt man sich von S aus auf die Ebene A B C D E eine Senkrechte S M gezogen, und durchschneidet diese die Ebene a b c d e in m, so ist wieder (§. 33.) $am \neq AM$, und mithin

$$am : AM = mS : MS \text{ oder}$$
$$ab : AB = mS : MS, \text{ also auch}$$
$$\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{mS}^2 : \overline{MS}^2,$$

Nun ist aber auch

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = ABCDE : abcde \text{ oder}$$
$$\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = abcde : ABCDE,$$

folglich hat man

$$abcde : ABCDE = \overline{mS}^2 : \overline{MS}^2,$$

woraus also folgt:

zwei parallele Schnitte einer Pyramide verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Centrum.

§. 179.

(Fig. 123.) Es werde durch S eine beliebige Ebene gelegt, welche die Ebene A B C D E nach der Geraden K L schneidet. Zieht man nun die Geraden S L und S K, so wird die erstere in der Ebene B S C und die letztere in der Ebene S A E liegen. Da aber nur diese beiden Geraden in der Ebene und in der Aussenfläche der Pyramide zugleich liegen, und dieselben auch die Direktrix der Pyramide bei gehöriger Verlängerung treffen, wenn nicht schon A B C D E dieselbe ist, so ist S L eine und S K eine andere Lage der Generatrix der gegebenen Pyramide, und es folgt mithin der Satz: **Schneidet man eine Pyramide — die unbegränzt ist — durch eine Ebene, welche durch das Centrum der Pyramide geht, so erhält man zwei Lagen der Erzeugenden der Pyramide; ist aber die Pyramide begränzt, so erhält man als Durchschnitt ein Dreieck, von welchem zwei Seiten jene beiden Lagen der Erzeugenden sind, die dritte aber der Durchschnitt der Grundfläche — oder der Begränzungsebene — mit der Durchschnittsebene ist.**

§. 180.

Aufgabe 44. Es ist die Direktrix einer Pyramide durch ihre Projektionen gegeben und ihr Centrum durch seine Projektionen; man soll

1. **die Pyramide konstruiren und ihre Projektionen angeben,**
2. **ihre Durchschnittsfiguren mit den Projektionstafeln, nämlich ihre Spuren angeben.**

Auflösung. Um die Projektionen der Pyramide zu erhalten, müssen wir die Projektionen ihrer einzelnen Kanten (§. 177.) angeben, und durch zwei auf einander folgende Kanten eine Ebene gelegt denken. Wir ziehen daher durch die vertikale Projektion des Centrums Gerade nach den vertikalen Projektionen der Scheitel der Direktrix, sodann durch die horizontale Projektion des Centrums Gerade nach den horizontalen Projektionen der Scheitel der Direktrix, so erhalten wir (§. 72.) die Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide, weil diese (§. 176.) durch das Centrum und die einzelnen Scheitel der Direktrix gehen müssen. Denkt man sich nun (§. 101.) durch zwei auf einander folgende Kanten eine Ebene gelegt, so erhält man die Seitenflächen der Pyramide, und man kann sich daher letztere leicht vorstellen. —

Nun muss die horizontale Spur sowohl, als auch die vertikale Spur der Pyramide bestimmt werden. Zu diesem Zwecke müssen wir uns jede Seitenfläche derselben so weit verlängert denken, bis sie die Tafeln trifft, und die einzelnen Spuren dieser Seitenebenen angeben; so werden die vertikalen Spuren sowohl, als auch die horizontalen eine Figur von ebenso viel Seiten, als die Direktrix hat, bilden, wodurch man die Spuren der Pyramide erhält. Da aber durch diese Verlängerung der Seitenebenen bis zu den Projektionstafeln zugleich die Spuren einer jeden Kante bestimmt werden, und diese Spuren in den Spuren ihrer entsprechenden Seitenebenen liegen müssen, so werden die einzelnen Seiten der Spuren der Pyramide durch die Spuren der Kanten gehen müssen. Um daher die Spuren der Pyramide zu erhalten, bestimmen wir die Spuren einer jeden Kante, und verbinden die horizontalen Spuren sowohl, als auch die vertikalen in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix auf einander folgen.

§. 181.

Beispiel. (Fig. 124.) Ist A B C D die horizontale und 'A B'C'D' die vertikale Projektion eines im Raume angegebenen Parallelogrammes, das als Direktrix einer Pyramide dienen soll, von welcher (S, 'S) die Projektionen des Centrums sind, so ziehe man die Geraden S A, 'S'A, und es werden diese die Projektionen der durch den Punkt A, 'A gehenden Pyramidenkanten sein. Ebenso ziehe man S B und 'SB', S C und 'S'C, S D und 'S D', so erhält man die Projektionen der durch die Punkte (B, B'), (C, C'), (D, D') gehenden Kanten der Pyramide, und folglich ist S A B C D die horizontale, 'S'A'B'C'D die vertikale Projektion desjenigen Theiles der Pyramide, welcher zwischen der Direktrix und dem Scheitel S, 'S liegt. Verlängert man die Projektionen der einzelnen Kanten auch gegen die andere Seite, so erhält man auch den zweiten Theil oder das zweite Fach der angegebenen Pyramide. Nun bestimme man (nach §. 93.) die horizontalen Spuren G, H, K, L und sodann die vertikalen Spuren M, N, P, Q der einzelnen Kanten, verbinde die letzteren Punkte durch die Geraden M N, N P, P Q, Q M und ebenso die ersteren durch die Geraden G H, H K, L K und K G, so wird die M N P Q die vertikale und G H K L die horizontale Spur der angegebenen Pyramide sein. —

§. 182.

Aufgabe 45. Eine Pyramide ist durch ihre horizontale Spur und durch die Projektionen ihres Centrums gegeben; man soll

1. **die Projektionen dieser Pyramide angeben.**
2. **Die Projektionen der Durchschnittsfigur einer durch ihre Spuren angebenen Ebene mit dieser Pyramide bestimmen.**
3. **Die wahre Grösse dieser Durchschnittsfigur angeben.**

Auflösung. Sollen die Projektionen der Pyramide bestimmt werden, so betrachte man ihre horizontale Spur als ihre Direktrix, und denke sich die Pyramide dadurch erzeugt, dass eine Gerade am Umfange dieser Direktrix sich so fortbewegt, dass sie stets durch das gegebene Centrum geht. Projicirt man also diese horizontale Spur vertikal, und zieht durch die horizontale Projektion des Centrums nach den einzelnen Scheiteln der horizontalen Spur Gerade, so erhält man die horizontalen Projektionen der Kanten der Pyramide, und durch die einzelnen vertikalen Projektionen der von der horizontalen Spur der Pyramide angegebenen Scheitel nach der vertikalen Projektion des Centrums Gerade gezogen, werden die vertikalen Projektionen der einzelnen Pyramidenkanten sein, und man kann sich daher leicht die Pyramide selbst vorstellen. —

Um nun den Durchschnitt der Pyramide mit der angegebenen Ebene zu bestimmen, muss man sich die einzelnen Seitenebenen derselben bis zum Durchschnitte mit der gegebenen Ebene verlängert denken. Da aber bei dieser Verlängerung der einzelnen Seitenebenen auch die Kanten der Pyramide bis zum Durchschnitte mit der angegebenen Ebene verlängert werden, und mithin ihre Durchgangspunkte auf den Communsektionen der einzelnen Seitenebenen der Pyramide mit der gegebenen Ebene liegen müssen, so gehen die Seiten der gesuchten Durchschnittsfigur durch die einzelnen Durchgangspunkte der Kanten mit der gegebenen Ebene. Man e hält daher die Projektionen des Durchschnittes der Pyramide und der gegebenen Ebene, wenn man nach §. 114. die Durchgangspunkte der einzelnen Kanten der Pyramide mit der gegebenen Ebene aufsucht, sodann die vertikalen Projektionen sowohl, als auch die horizontalen Projektionen dieser Durchgangspunkte durch Gerade verbindet, und zwar in derselben Ordnung, in welcher die Scheitel der horizontalen Spur der Pyramide auf einander folgen. —

Es bleibt nun noch übrig die wahre Grösse dieses Durchschnittes anzugeben. Zu diesem Zwecke drehe man die Durchschnittsebene um eine ihrer Spuren, z. B. um ihre vertikale Spur, und lege sie in die vertikale Tafel, bestimme sodann nach §. 130. in dieser umgelegten Ebene einen jeden Scheitel der Durchschnittsfigur, verbinde diese einzelnen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix verbunden sind, so erhält man die wahre Grösse der verlangten Durchschnittsfigur. —

§. 183.

Beispiel. (Fig. 125.) Es sei ABCDE ein in der horizontalen Tafel liegendes regelmässiges Fünfeck, das die horizontale Spur einer Pyramide sein soll, S sei die horizontale und 'S die vertikale Projektion des Scheitels dieser Pyramide, so ziehe man die Geraden SA, SB, SC, SD, SE, und man erhält hierdurch die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide. Da nun die vertikale Projektion von ABCDE (nach §. 70.) in X liegen muss, so hat man nur die Senkrechten A'A, B'B, C'C, DD' und E'E auf X zu ziehen, so erhält man die vertikale Projektion 'A'C der horizontalen Spur der Pyramide. Zieht man nun 'SA', S'B', 'SC', 'SD' und 'S'E, so werden diese Geraden die vertikalen Projektionen der einzelnen Pyramidenkanten und mithin 'S'A'C die vertikale Projektion des zwischen dem Scheitel S'S und der horizontalen Tafel liegenden Theiles der Pyramide sein. Diese Pyramide ist nun von der Ebene HSV geschnitten, welche senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, man soll die Durchschnittsfigur angeben. Da die Ebene HSV senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, so liegt (§. 83.) die vertikale Projektion einer jeden in derselben enthaltenen Geraden oder Figur in der vertikalen Spur dieser Ebene, nämlich in V. Die vertikalen Projektionen der Scheitel des Durchschnittes müssen aber nach vor. §. in den vertikalen Projektionen der Kanten der Pyramide enthalten sein; folglich ist 'a'c die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur, von welcher 'a, b', 'c, d', 'e, nämlich die Durchschnitte der Geraden V mit den vertikalen Projektionen 'S'A, 'S'B etc. etc. der Kanten, die vertikalen Projektionen der Scheitel des Durchschnittes sind. Nun müssen die horizontalen Projektionen dieser Scheitel in den Projektionen SA, SB etc. etc. der Kanten sein (§. 72.), weil sich die Scheitel selbst auf den Kanten befinden; zieht man daher 'aa senkrecht auf X, so wird (§. 72.) im Durchschnitte dieser Senkrechten mit SA, nämlich in a die horizontale Projektion des Scheitels sein, dessen vertikale Projektion in 'a ist. Auf gleiche Weise erhält man die horizontalen Projektionen c, d, e der

einzelnen Scheitel, und es ist nur noch die horizontale Projektion desjenigen Scheitels anzugeben, dessen vertikale Projektion in b′ ist. Die durch den Punkt BB′ gehende Pyramidenkante liegt nämlich in einer Ebene, welche senkrecht auf X steht, weshalb man nicht unmittelbar die horizontale Projektion des auf dieser Kante liegenden Scheitels angeben kann. Da aber B die horizontale Spur dieser Kante sein muss, und ihre vertikale Spur K nach §. 94. erhalten werden kann, so ziehe man die Gerade Bs_1 willkührlich, verlängere sie bis zum Durchschnitte mit X, ziehe von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte nach K eine Gerade, verlängere letztere bis s'_2, und betrachte nun E_1, $'E_1$ als die Spuren einer Ebene, so wird diese letztere die Kante (S B, 'S 'B) enthalten. Nun ziehe man $s'_2 s_2$ senkrecht auf X, verbinde s_2 mit s_1 durch eine Gerade, so ist $s_1 s_2$ die horizontale Projektion der Communsektion von Ebene E_1 $'E_1$ und Ebene HSV (nach §. 110.), und der Durchschnittspunkt von $s_1 s_2$ mit SB, nämlich b ist (nach §. 114.) die horizontale Projektion des Durchgangspunktes der Kante (S B, 'S B′) in die Ebene HSV. Zieht man also die Geraden a b, b c, c d, d e und e a, so wird a b c d e die horizontale Projektion der Durchschnittsfigur von Ebene H S V mit der gegebenen Pyramide sein. —

Anmerk. Den Punkt b kann man auch auf eine andere und einfachere Weise bestimmen. Dreht man nämlich die Ebene HSV, bis sie parallel zur horizontalen Tafel wird, und nimmt (BB′, b′) als Drehungsaxe an, so wird die neue vertikale Projektion der Durchschnittsfigur die Gerade 'f g sein, ihre horizontale Projektion aber muss nach §. 178. ähnlich der Figur A B C D E sein. Nun ist 'f die vertikale Projektion eines Scheitels der Durchschnittsfigur, dessen horizontale Projektion (§. 72.) in der Geraden A S liegen muss und daher (§. 73.) in f sein wird, und mithin wird die von f aus mit A B parallel gezogene Gerade die horizontale Projektion einer Seite der Figur sein, nach welcher die mit der horizontalen Tafel parallel gelegte Ebene 'f g die Pyramide schneidet. Da nun die horizontale Projektion des Scheitels, dessen vertikale Projektion in b′ ist, sowohl in BS, als auch in fb liegen muss, so wird der Durchschnittspunkt dieser beiden die horizontale Projektion des Punktes sein, dessen vertikale Projektion in b′ ist.

§. 184.

Aufgabe 46. **Eine Pyramide ist durch eine Ebene abgeschnitten; man soll den zwischen dieser Ebene und einer ihrer Spuren enthaltenen Theil derselben entwickeln.**

Auflösung. Wir wollen hier zwei Fälle unterscheiden, und jeden derselben einzeln behandeln. Es sei nämlich

1. die Pyramide eine senkrechte mit regelmässiger Grundfläche.
2. Die Pyramide habe eine beliebig vielseitige Grundfläche.

Ad. 1. Hat eine Pyramide eine regelmässige Grundfläche, und geht die von ihrem Scheitel aus auf letztere gezogene Senkrechte (Axe) durch den Mittelpunkt dieser Grundfläche, so müssen die Kanten der Pyramide (§. 18.) gleich lang sein; folglich ist bei dieser Pyramide jede Seitenfläche ein gleichschenkliges Dreieck. Legt man nun die einzelnen Seitenflächen, indem man sie um ihre Kanten dreht, in eine Ebene, so wird die Figur, welche die Entwickelung der Pyramide ist, einen Ausschnitt eines regelmässigen Polygones bilden, dessen Mittelpunkt mit dem der Pyramide zusammenfällt, von welchem ferner eine Kante der Pyramide der Halbmesser des umschriebenen Kreises ist, und die einzelnen Seiten der Grundfläche die Sehnen des letzteren sind. Beschreibt man daher aus einem beliebigen Punkte einen Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich einer Kante der Pyramide ist, und trägt die einzelnen Seiten der Grundfläche als an einander stossende Sehnen in diesen Kreisbogen, so erhält man die entwickelte Grundfläche. Von den einzelnen Endpunkten der Sehnen aus die Halbmesser dieses Kreisbogens gezogen, geben die einzelnen Kanten, und durch je zwei auf einander folgende der letzteren eine Ebene gelegt, so erhält man auch die einzelnen Seitenflächen der Pyramide. Auf diese Weise erhält man also die Entwickelung desjenigen Theiles der Pyramide, welcher zwischen ihrem Centrum und der Grundfläche liegt. Nun bestimme man die Länge jedes Theiles einer Kante, welcher zwischen der Durchschnittsebene und der Grundfläche enthalten ist, trage diese einzelnen Kantentheile von den entsprechenden Scheiteln der entwickelten Grundfläche aus auf die Kanten der entwickelten Seitenflächen, verbinde die erhaltenen Endpunkte in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die entwickelte Durchschnittsfigur, und der zwischen der letzteren und der Grundfläche enthaltene Theil der Oberfläche ist die gesuchte Entwickelung. —

Ad. 2. Hat die Pyramide keine regelmässige Grundfläche, so wird man am kürzesten verfahren, wenn man alle einzelnen Seitenflächen, welche die Theile der Oberfläche sind, konstruirt. Man wird also vor Allem die Länge jeder einzelnen Kante bestimmen, mit je zwei auf einanderfolgenden Kanten und der zwischen denselben enthaltenen Seite der

Grundfläche (oder Direktrix) ein Dreieck konstruiren, so erhält man die Entwickelung des zwischen dem Centrum und der Grundfläche enthaltenen Theiles der Oberfläche. Bestimmt man nun die Länge der einzelnen Kantentheile, welche zwischen der Grundfläche und der Durchschnittsebene enthalten sind, und trägt dieselben von den entsprechenden Scheiteln der entwikelten Grundfläche aus auf die Kanten, verbindet die erhaltenen Endpunkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Grundfläche unter einander verbunden sind, so erhält man auch die Entwickelung der Durchschnittsfigur, welche die Gränzlinie des zu entwickelnden Theiles der Oberfläche ist.

§. 185.

Beispiel. (Fig. 125.) Es sei ABCDE ein regelmässiges Fünfeck, das in der horizontalen Tafel liegt, über dieses ist eine Pyramide beschrieben, von welcher die horizontale Projektion des Scheitels in S, dem Mittelpunkte des Fünfeckes liegt, und deren Höhe gleich MN ist. Da die horizontale Projektion des Scheitels dieser Pyramide in der Mitte ihrer Grundfläche ist, und dieser Punkt mit dem Fusse der Höhe einerlei ist, so werden alle einzelnen Kanten dieser Pyramide gleich lang sein. Da ferner die Grundfläche in der horizontalen Tafel liegt, so ist die Höhe gleich der vertikalen Ordinate des Scheitels der Pyramide, und es wird daher die vertikale Projektion 'S des letzteren erhalten, wenn man von seiner horizontalen Projektion S aus auf X eine Senkrechte S'B zieht, und 'B'S = MN macht. Zieht man nun A'A, B'B, C'C etc. etc. senkrecht auf X, so erhält man in 'A, 'B, 'C etc. etc. die vertikalen Projektionen der einzelnen Scheitel A, B, C etc. etc., ferner die Geraden 'A'S, 'B'S, 'C'S etc. etc. gezogen, geben die vertikalen, und durch Verbindung der Punkte A, B, C etc. etc. mit dem Punkte S durch Gerade, erhält man die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide, so dass also ABCDES die horizontale und 'A'C'S die vertikale Projektion der Pyramide ist, deren Direktrix ABCDE sowohl, als auch deren Höhe MN gegeben ist. Nun wurde in §. 184. gezeigt, dass man zur Entwickelung des zwischen der Ebene HSV und der horizontalen Tafel enthaltenen Theiles dieser angegebenen Pyramide vor Allem mit der Länge einer der Kanten von einem beliebigen Punkte aus einen Kreisbogen beschreiben muss, auf diesen die einzelnen Seiten der Grundfläche als an einander stossende Sehnen zu tragen hat, und die einzelnen Endpunkte dieser Sehnen durch Gerade mit dem angenommenen Mittelpunkte verbinden muss, wenn man den zwischen dem Scheitel und der horizontalen Tafel enthaltenen Theil der Pyramide erhalten will. Ziehen wir also SC ≠ X, und machen SL = SC, fällen von L auf X die Gerade LL' senkrecht, und ziehen 'SL', so wird diese Gerade (nach §. 91. 2.) die Länge einer Pyramidenkante sein. (Fig. 125. a.) Beschreibt man daher von S_1 aus mit der Geraden $S_1 A_1$ = 'SL' einen Kreisbogen, macht $A_1 B_1 = B_1 C_1 = D_1 C_1 = D_1 E_1 = E_1 A_1 = AB$, und zieht $S_1 A_1$, $S_1 B_1$ etc. etc., so wird $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 A_1 S_1$ die entwickelte Pyramide sein. (Fig. 125.) Nun ziehe man $a m_1$ senkrecht auf aA, mache $a m_1$ = $'a n_1$ und ziehe $A m_1$, so ist diese Gerade (§. 87. und §. 88.) die Länge von (Aa, 'A'a). Ebenso bestimme man $B m_2$, $C m_3$. $D m_4$ etc. etc., so erhält man die Längen der Kantentheile (Bb, 'B'b), (Cc, 'C'c) etc. etc. (Fig. 125. a.) Nun mache man $a_1 A_1$ gleich $A m_1$, $B_1 b_1 = B m_2$ etc. etc., ziehe $a_2 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1$, etc. etc., so wird $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 a_1$ der entwickelte Schnitt und mithin $a_1 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1\ a_1 e_1 d_1 c_1 b_1$ der entwickelte Theil der Pyramides sein, welcher zwischen der Ebene HSV und der horizontalen Tafel liegt.

§. 186.

Aufgabe 47. Es sind zwei Prismen angegeben, von welchen das eine vom anderen durchdrungen wird; man soll die Durchschnittslinie dieser beiden Prismen bestimmen.

Auflösung. Es ist aus §. 170. bekannt, dass wenn man ein Prisma durch eine Ebene schneidet, welche parallel ist mit der Erzeugenden des Prisma, zwei Erzeugende erhalten werden. Da nun die Durchdringungslinie zweier Prismen der Ort aller jener Punkte ist, nach welchen sich die einzelnen Erzeugenden beider Prismen durchschneiden, so werden wir die Aufgabe dadurch lösen, indem wir einzelne Erzeugende beider Prismen aufsuchen, von welchen wir wissen, dass sie sich schneiden, ihre Durchschnittspunkte bestimmen, und dieselben durch Gerade in gehöriger Ordnung verbinden. Wenn wir nun eine Hülfsebene annehmen, welche parallel mit der Erzeugenden des ersten sowohl, als auch parallel mit der Erzeugenden des zweiten Prisma ist, so werden beide Prismen von jener Ebene nach geraden Erzeugenden geschnitten, welche letztere sich also schneiden müssen; denn parallel können dieselben nicht sein, weil dann auch (§. 28.) alle Erzeugenden des ersten parallel den einzelnen Erzeugenden des zweiten Prisma, also auch beide unter sich parallel wären, was gegen die Voraussetzung ist. Die Durchschnittspunkte derjenigen Erzeugenden, nach welchen die Hülfsebene beide Prismen schneidet, gehören nun sowohl dem einen, als auch dem an-

dern Prisma an, und liegen mithin auf ihrer gemeinschaftlichen Durchdringungslinie. Um daher letztere zu finden, verfahren wir auf folgende Weise:

1. Nehmen wir einen beliebigen Punkt durch seine Projektionen (§. 65.) an.
2. Ziehen wir durch denselben (nach §. 76.) zwei Gerade durch ihre Projektionen, von welchen die eine parallel der Erzeugenden des ersten, die andere parallel zur Erzeugenden des zweiten Prisma ist.
3. Suchen wir die Spuren der Ebene (§. 101.), welche diese beide Geraden enthält.
4. Legen wir parallel zu dieser Ebene (§. 118.) einzelne Ebenen, welche jedes der beiden Prismen schneiden, und suchen (nach §. 170.) die Projektionen der Durchschnittslinien, so werden die Durchschnittspunkte ihrer horizontalen Projektionen der horizontalen Projektion der Durchdringungslinie, und die Durchschnittspunkte ihrer vertikalen Projektionen der vertikalen Projektion der Durchdringungslinie angehören, und wir erhalten also durch genugsame Wiederholung dieses Verfahrens die gehörige Anzahl von Durchschnittspunkten, durch welche sodann die Durchdringungslinie beider Prismen bestimmt werden kann, wenn man jene Punkte in gehöriger Ordnung durch Gerade verbindet.

Anmerk. 1. Da zur Aufsuchung der Durchschnittserzeugenden eines Prisma mit einer jener Hülfsebenen bloss die horizontalen Spuren der Erzeugenden aufgesucht werden müssen, nach welchen das Prisma von der Hülfsebene geschnitten wird, um diese Erzeugenden selbst bestimmen zu können; so werden wir zur Aufsuchung der einzelnen Punkte der Durchdringungslinie beider Prismen bloss die horizontalen Spuren der Hülfsebenen nothwendig haben; indem die Durchschnittspunkte der letzteren mit den horizontalen Spuren der Prismen schon die horizontalen Spuren der Durchschnittserzeugenden sind, so dass also letztere leicht angegeben werden können.

Anmerk. 2. Die Oberflächen beider Prismen können sich entweder nach zwei Linien durchdringen, oder bloss nach einer einzigen. Um diess zu untersuchen, darf man nur durch die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma Gerade parallel mit der horizontalen Spur der Hülfsebene legen, und sehen, ob von diesen auch die horizontale Spur des andern Prisma's getroffen wird. Ist diess der Fall, so durchdringen sich beide Prismen nach zwei Linien; schneiden aber die horizontalen Spuren der Hülfsebenen, welche durch die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma gezogen werden, die horizontale Spur des andern Prisma nicht mehr, so haben beide Prismen bloss eine Durchdringungslinie. Im ersten Falle wird die Durchdringung eine vollkommene, im zweiten Falle eine theilweise genannt.

§. 187.

Beispiel. (Fig. 126.) Es sei das regelmässige Sechseck ABCDEF die horizontale Spur des ersten Prisma, und (G_1, G'_1) seien die Projektionen seiner Generatrix, $A_1 B_1 C_1 D_1$ sei die horizontale Spur des zweiten Prisma, dessen Generatrix (G_2, G'_2) ist; man soll die Linie finden, welche die Oberflächen dieser beiden Prismen gemeinschaftlich haben.

Nimmt man auf der Generatrix (G_1, G'_1) einen Punkt durch seine Projektionen m und m′ an, zieht durch m′ die Gerade $G' \neq G'_2$ und durch m die Gerade $G \neq G_2$, so werden diese die Projektionen einer durch den Punkt (m, m′) gehenden und mit (G_2, G'_2) parallelen Geraden (§. 76.) sein. Nun bestimme man die horizontale Spur s_1 der Geraden $(G_1, 'G_1)$ (nach §. 93.), und sodann die horizontale Spur s_2 der Geraden (G, G′), ziehe $s_1 s_2$, so wird diese (§. 101.) die horizontale Spur der Ebene sein, welche diese beiden Geraden enthält, und die (§. 51.) parallel zur Geraden (G_2, G'_2) ist. Legt man daher mit $s_1 s_2$ parallele Gerade, so werden diese die horizontalen Spuren von Ebenen sein, welche parallel zur Generatrix des ersten Prisma sowohl, als auch parallel zur Generatrix des zweiten Prisma sind (§. 51.). Man ziehe daher $B_1 a_1$ parallel $s_1 s_2$, lege durch a_1 die Gerade $a_1 a_2 \neq G_1$ und durch b_1 die Gerade $b_1 b_2 \neq G_1$, projicire ferner a_1 und b_1 (nach §. 70.), so erhält man in a'_1 und b'_1 ihre vertikalen Projektionen, ziehe $'b_1 b'_2 \neq a'_1 a'_2 \neq G'_1$, so erhält man (§. 170.) die Projektionen derjenigen Erzeugenden, welche die Durchschnittslinien der Ebene $a_1 B_1$ mit dem ersten Prisma sind. Das zweite Prisma hat mit dieser Ebene bloss die Kante $(B b_2, B' b'_2)$ gemeinschaftlich, und da letztere mit den Geraden $(a_1 a_2, a'_1 a'_2)$ und $(b_1 b_2, b'_1 b'_2)$ in einer und dersebeln Ebene liegt, so werden diese Geraden von der Kante $(B b_2, B' b'_2)$ geschnitten. Man erhält also hierdurch die Projektionen zweier Punkte, nämlich a_2, a'_2 und b_2, b'_2, welche beiden Oberflächen, folglich auch ihrer Durchdringungslinie angehören. Dieses Verfahren wiederhole man genugsam, ziehe nämlich $A_1 c_1 \neq s_1 s_2$, $C_1 e_1 \neq s_1 s_2$ etc. etc., so erhält man die Punkte $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2$ etc. etc., welche beiden Oberflächen, also auch ihren Durchschnittslinien angehören. —

Anmerk. 1. Um zu untersuchen, welche Punkte auf dieser Durchschnittslinie sichtbar oder durch andere Linien verdeckt sind, darf man nur nachsehen, welchen Erzeugenden der Prismen die einzelnen Punkte angehö-

ren. Gehört jeder einzelne dieser Punkte zweien Erzeugenden an, welche auf beiden Prismen sichtbar sind, so ist der Punkt selbst sichtbar; ist er aber der Durchschnitt zweier Erzeugenden, von welchen nur eine verdeckt ist, so ist der Punkt selbst verdeckt. Auf diese Weise kann man also leicht entscheiden, welcher Theil der Durchdringungslinie sichtbar ist, und welcher Theil derselben verdeckt liegt.

Anmerk. 2. Im vorliegenden Beispiele sind B_1 und D_1 die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma, und legt man durch dieselben die Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ parallel $s_1 s_2$, so schneiden dieselben noch das zweite Prisma, folglich haben wir hier eine vollkommene Durchdringung, und mithin hat die Durchdringungslinie dieser beider Prismen zwei völlig von einander getrennte Theile. Durch diese äussersten Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ erhält man zugleich die äussersten Punkte der Durchdringungslinien, weil durch alle anderen ausserhalb der Punkte B_1 und D_1 mit $s_1 s_2$ parallel gezogenen Ebenen höchstens noch das erste Prisma (ABCDEFH$_1$, 'A 'B 'C 'D 'E etc. etc.) getroffen wird, und nicht auch das zweite, so dass also ausserhalb der Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ kein Punkt der Durchdringungslinie beider Prismen mehr liegen kann. —

Anmerk. 3. Da alle Erzeugenden des einen Prisma sowohl, als auch die des andern Prisma unter sich parallel sein müssen, und keine Erzeugende des einen Prisma mit einer solchen des zweiten Prisma parallel sein kann (weil sonst die Prismen selbst parallel wären), so müssen diejenigen Erzeugenden des einen Prisma, welche mit denen des andern in einer der Hülfsebenen liegen, sich schneiden, und können nicht parallel sein. Hat man daher alle Scheitel der Grundflächen beider Prismen, so kann man auch alle Scheitel ihrer Durchdringungslinie finden, und mithin ist letztere in unserem vorliegenden Beispiele ein geschlossenes Polygon. Würde eine der Grundflächen beider Prismen nicht geschlossen sein, so wäre die Durchdringungslinie beider Prismen auch nicht geschlossen.

§. 188.

Aufgabe 48. **Ein Prisma wird von einer Pyramide durchdrungen, man soll die Linie bestimmen, welche ihre beiden Oberflächen gemeinschaftlich haben.**

Auflösung. Auch hier ist wieder die Durchdringungslinie der Ort aller Punkte, welche die Erzeugenden der Pyramide mit denen des Prisma gemein haben. Unsere Aufgabe ist folglich auf die reduzirt: diejenigen Erzeugenden beider Oberflächen, welche sich schneiden, aufzusuchen. Wir wissen nun (aus §. 170.), dass wenn man parallel zur Erzeugenden des Prisma eine Ebene legt, die Oberfläche des letzteren nach einer oder zwei Lagen der Erzeugenden geschnitten wird; ferner ist uns bekannt (aus §. 179.), dass wenn man durch den Scheitel der gegebenen Pyramide eine Ebene legt, welche jene schneidet, dieser Durchschnitt nach zwei Lagen ihrer Erzeugenden geschieht. Legen wir daher durch den Scheitel der gegebenen Pyramide eine Ebene, welche parallel zur Erzeugenden des Prisma ist, und beide Oberflächen schneidet, so wird das Prisma sowohl, als auch die Pyramide von jener Ebene nach einer oder zwei Erzeugenden geschnitten. Diese Durchschnittslinien des Prisma liegen mit denen der Pyramide in der Hülfsebene, und folglich werden die ersteren von den letzteren geschnitten, und hierdurch erhält man Punkte, welche beiden Oberflächen angehören, also auch Punkte ihrer Durchdringungslinie sind. Nun lege man durch den Scheitel der Pyramide mehrere Ebenen, von welchen jede parallel zur Erzeugenden des Prisma ist, und zwar nehme man so viele solcher Hülfsebenen an, welche sowohl das Prisma, als auch die Pyramide schneiden, dass man eine gehörige Anzahl von Punkten erhält, welche ihren beiden Oberflächen angehören, um von letzteren die gemeinschaftliche Durchdringungslinie leicht angeben zu können.

Anmerk. 1. Auch hier hat man für ein gegebenes Beispiel sich die Regel zu merken, dass diejenigen Punkte der gesuchten Durchdringungslinie sichtbar werden, welche die Durchschnitte von nicht verdeckten Erzeugenden beider Oberflächen sind, ein jeder derjenigen Punkte jener Linien aber verdeckt bleibt, welcher dem Durchschnitte zweier Erzeugenden angehört, von welchen wenigstens eine verdeckt ist. Man muss deshalb diejenigen Erzeugenden, welche zur Bestimmung der Durchdringungslinie der beiden gegebenen Oberflächen nothwendig sind und verdeckt liegen von den nicht verdeckten wohl unterscheiden, um die sichtbaren und die verdeckten Punkte erkennen zu können. —

Anmerk. 2. Die Durchdringungslinie kann wieder geschlossen oder offen sein. Sind nämlich die Direktricen beider Oberflächen geschlossene Polygone, und ist keine Lage der Erzeugenden der Pyramide parallel zur Erzeugenden des Prisma, so ist das Polygon, dessen Umfang die Durchdringungslinie beider Flächen ist, geschlossen; findet aber einer der beiden letzteren Fälle nicht statt, so ist dasselbe offen. —

Anmerk. 3. Legt man durch die horizontale Spur der durch das Centrum der Pyramide parallel zur Erzeugenden des Prisma gezogenen Geraden die horizontalen Spuren der Hülfsebenen, welche die äussersten Punkte der horizontalen Spur einer der beiden Oberflächen enthält, und es schneiden diese beiden Geraden noch die horizontale Spur der anderen Fläche, so durchdringen sich beide Flächen nach zwei Linien, von welchen die eine die Eintrittslinie, die andere die Austrittslinie beider Flächen ist. Schneidet aber nur die eine der horizontalen Spuren von den durch die äussersten Punkte einer horizontalen Spur der Flächen gezogenen

Hülfsebenen die andere Spur der Fläche, die andere aber nicht, so haben die beiden Oberflächen bloss eine einzige Durchdringungslinie.

§. 189.

Beispiel. (Fig. 127.) Es sei ABCDEF die horizontale Spur einer Pyramide, S sei die horizontale und S' die vertikale Projektion ihres Scheitels, ferner sei $A_1 B_1 C_1 D_1$ die horizontale Spur eines Prisma, und G, G' seine die Projektionen der Erzeugenden des letzteren. Nach §. 70. wird die vertikale Projektion von ABCDEF in X sein müssen, und man erhält also (§. 63.) die vertikalen Projek- A, 'B, 'C etc. etc. der einzelnen Scheitel dieses Sechseckes, wenn man A A, B'B, C'C etc. etc. senkrecht auf X zieht. Ebenso wird die vertikale Projektion von $A_1 B_1 C_1 D_1$ in X liegen müssen, und zwar (§§. 63. und 70.) durch die auf X gezogenen Senkrechten A_1'A_1, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$, $D_1 D'_1$ bestimmt, und in A'_1, B'_1, C'_1 und D'_1 sein. Zieht man nun die Geraden SA und S'A', SB und S'B', SC und S'C' etc. etc., so erhält man die einzelnen Kanten der angegebenen Pyramide, und es stellt mithin (§. 180.) SABCDEF die horizontale und S'A'B'C'D'E'F' die vertikale Projektion dieser Pyramide dar. Zieht man ferner durch A_1, B_1, C_1 und D_1 Gerade parallel zu G' und durch 'A_1, 'B_1, 'C_1 und 'D_1 Gerade parallel mit 'G, so erhält man (§. 168.) in $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 H_1$ die horizontale und in 'A_1'B_1'$C_1 D'_1 F'_1 H'_1$ die vertikale Projektion des angegebenen Prisma. Um nun die Durchdringungslinie dieser beiden Oberflächen anzugeben, ziehe man (§. 188.) S's_1, parallel mit G' und Ss_1 parallel zu G, ziehe $s'_1 s_1$ senkrecht auf X, so wird (§. 93.) in s_1 die horizontale Spur der durch den Scheitel der Pyramide gehenden und mit der Erzeugenden des Prisma parallelen Geraden sein. Zieht man nun s_1c, so wird diese als horizontale Spur einer Ebene betrachtet werden können, die durch den Scheitel der Pyramide geht, und parallel zur Erzeugenden des Prisma ist. Nun schneidet diese Gerade die horizontale Spur des Prisma in k und l, folglich werden die durch k und l mit G parallel gezogenen Geraden kc und lc_1 die horizontalen und durch k' und l' parallel zu 'G gezogenen Geraden k'c' und l'c', die vertikalen Projektionen der zwei Erzeugenden sein (§. 170.), nach welchen die Hülfsebene, deren horizontale Spur s_1C ist, das Prisma schneidet. Von dieser Ebene wird aber die angegebene Pyramide nach der Kante (CS, C'S') geschnitten (§. 179.) folglich muss diese Kante die Geraden (kc, k'c') und (lc_1, l'c'_1) schneiden, und zwar wird die erstere im Punkte cc', letztere im Punkte $c_1 c'_1$ geschnitten, und es sind mithin c und c_1 die horizontalen, ferner c' und c'_1 die vertikalen Projektionen zweier Punkte, die sich auf beiden Flächen befinden. Der Punkt c_1, c'_1 wird sichtbar sein, weil auch die Geraden (lc_1, 'lc'_1) und (CS, C''S) sichtbar sind; der Punkt c_1c' aber wieder verdeckt liegen, weil er sich auf der Geraden (kc, k'c') befindet, die verdeckt ist. Nun ziehe man s_1F, so erhält man die horizontale Spur einer zweiten Hülfsebene, und diese schneidet das Prisma nach zwei Geraden, von welchen mf_1 und m'f'_1 die Projektionen der ersten und nf, n'f' die Projektionen der zweiten sind; die Pyramide aber hat mit jener Hülfsebene die Kante (Ff_1, 'Ff'_1) gemeinschaftlich, man erhält daher in f und f'_1 die horizontalen, ferner in 'f und 'f_1 die vertikalen Projektionen zweier Punkte, die beiden Oberflächen angehören, und von welchen (f, f') verdeckt, $f_1 f'_1$ sichtbar ist. Auf diese Weise das Verfahren fortgesetzt, und die Hülfsebenen sD, sE, sG, sA und sB benützt, so erhält man in abcdef die horizontale und in a'b'c'd'e'f' die vertikale Projektion der einen, ferner in $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ die horizontale und in $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1 e'_1 f'_1$ die vertikale Projektion der andern Linie, nach welchen sich die beiden angegebenen Flächen schneiden. Da die Hülfsebenen, die ihre horizontalen Spuren in s_1C und s_1F haben, noch beide Flächen zugleich schneiden, so haben wir auch zwei ganz getrennt von einander liegende Durchdringungslinien erhalten, weil sich beide Flächen vollkommen durchdringen. —

§. 190.

Aufgabe 49. Es sind zwei Pyramiden gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Durchdringungslinie angeben.

Auflösung. Wir wissen, dass die Durchdringungslinie der Oberflächen zweier Pyramiden der Ort aller jener Punkte ist, nach welchen einzelne Erzeugende einer Pyramide von einzelnen Erzeugenden der andern Pyramide getroffen werden. Da nun eine solche Erzeugende der einen Pyramide, welche eine Erzeugende der andern Pyramide treffen soll mit dieser in einer Ebene liegen muss, so werden wir einzelne und so viele Punkte der Durchdringungslinie, als wir zur Bestimmung ihrer Richtung nothwendig haben, angeben können, wenn wir beide Pyramiden durch Hülfsebenen schneiden, die mit den Pyramiden bloss Gerade gemeinschaftlich haben, diese Geraden angeben, und ihre Durshschnittspunkte projiciren. Nun ist uns ferner, und zwar aus §. 179. bekannt, dass wenn man durch den Scheitel einer Pyramide eine Ebene legt, welche die Oberfläche der Pyramide schneidet, zwei Lagen der geradlinigen Erzeugenden der letzteren als Durchschnitt

erhalten werden; ziehen wir daher vom Scheitel der einen Pyramide nach dem Scheitel der andern Pyramide eine Gerade, legen durch diese eine Ebene, welche jede der Pyramiden schneidet, und suchen (nach §. 179.) diese Durchschnittslinien, so erhalten wir aus den Durchschnitten derjenigen Lagen der Erzeugenden der einen Pyramide, welche mit denen der andern Pyramide in dieser Hülfsebene liegen, Punkte, die den Oberflächen beider Pyramiden gemeinschaftlich sind, und die mithin der gesuchten Durchdringungslinie angehören. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man so viele Punkte der Durchdringungslinie angeben, dass man dieselbe ziehen kann. —

Anmerk. 1. Sind die horizontalen Spuren beider Pyramiden schon gegeben, so kann man die Geraden, nach welchen eine der Pyramiden von einer der Hülfsebenen geschnitten wird, bestimmen, wenn man die Punkte, in welchen die horizontale Spur der Pyramide von der horizontalen Spur der Hülfsebene getroffen wird, projicirt, durch dieselben sodann die Geraden zieht, welche durch das Centrum der Pyramide gehen, und diese Geraden werden sodann diejenigen Lagen der Erzeugenden von der Pyramide sein, nach welchen letztere von der Hülfsebene geschnitten wird. Da aber zur Bestimmung dieser Durchschnittslinien die vertikale Spur des Hülfsebene überflüssig war, so wird man auch in dieser Aufgabe bloss die horizontalen Spuren der Hülfsebenen benützen, um die Durchdringungslinie beider Pyramiden zu erhalten. —

Anmerk. 2. In Bezug auf diejenigen Theile der Durchdringungslinie der beiden pyramidalischen Oberflächen, welche verdeckt sind haben wir uns wieder an die Regel zu halten, dass jene Punkte dieser Linie sichtbar sein werden, welche den Durschnitten von sichtbaren Lagen der Erzeugenden beider Pyramiden angehören, jeder Punkt aber verdeckt sein wird, welcher der Durchschnitt zweier Erzeugenden ist, von welchen auch nur eine verdeckt ist.

Anmerk. 3. Ist jede der Direktricen von beiden Pyramiden ein geschlossenes Polygon, so wird die Durchdringungslinie beider pyramidalischen Oberflächen ein geschlossenes Polygon sein, wenn keine der in einer der Hülfsebenen liegenden Erzeugenden der einen Pyramide parallel mit einer in derselben Hülfsebene liegenden Erzeugenden der andern Pyramide ist. —

Anmerk. 4. Ob die Durchdringung der beiden pyramidalischen Oberflächen eine vollkommene ist oder nicht, ersieht man wieder durch das schon mehrmals angegebene Merkmal: wenn nämlich diejenigen zwei Hülfsebenen, welche durch die äussersten Scheitel der horizontalen Spur einer der Pyramiden gezogen werden, auch die horizontale Spur der andern Pyramide treffen, oder dieselbe noch schneiden, so haben wir eine vollkommene Durchdringung, und wir erhalten sodann zwei von einander ganz getrennte Durchdringungslinien; treffen aber jene zwei Hülfsebenen die horizontale Spur der andern Pyramide nicht, so haben wir eine unvollkommene oder theilweise Durchdringung, und in diesem letztern Falle haben wir bloss eine einzige Durchdringungslinie. — Dass die beiden Projektionen der Durchdringungslinie immer zugleich erhalten werden, ist von selbst klar, indem die Durchschnittspunkte der horizontalen Projektionen der Erzeugenden, welche in den Hülfsebenen liegen die horizontalen, und die Durchschnittspunkte der vertikalen Projektionen dieser Erzeugenden die vertikalen Projektionen von Punkten der Durchdringungslinie geben. —

§. 191.

Aufgabe 48. **Auf der horizontalen Tafel steht ein rechteckiges Parallelepipedum, man soll die Ebene seiner Grundfläche, die in der horizontalen Tafel liegt, um ihre horizontale Spur drehen, bis sie einen angegebenen Winkel mit der horizontalen Tafel bildet, und die Projektionen des Parallelepipedum bestimmen.**

Auflösung. (Fig. 128.) Es sei E die horizontale Spur der Ebene der Grundfläche des Parallelepipedum, diese Grundfläche sei $a_1 b_1 c_1 d_1$ und die Länge einer der Kanten sei $a_1 h_1 = b_1 g_1 = c_1 f_1$ etc. etc., ferner sei α_1 der Winkel, den die Ebene der Grundfläche mit der horizontalen Tafel bildet, so kann man, wenn es nothwendig wird, die vertikale Spur 'E dieser Ebene (nach §. 126.) bestimmen, indem man von dem beliebigen Punkte A aus auf X die Gerade A B senkrecht zieht, dann $< B A B_1$ gleich dem gegebenen macht, $B B_1$ senkrecht auf A B und B B' senkrecht auf X zieht, und $B B' = B B_1$ macht, so wird die Gerade B' S die vertikale Spur dieser Ebene sein. Man denke sich nun die Ebene der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ um E so weit gedreht, bis sie mit der horizontalen Tafel den angegebenen Winkel bildet, so kann man die Projektionen dieser Figur, welche ihr angehören, wenn sie in ihrer neuen Lage sich befindet, nach §. 132. bestimmen, indem man $< N M d_2 = \alpha_1$ macht, ferner $a_1 m$, $b_1 n$, $c_1 p$ und $d_1 q$ senkrecht auf E zieht, $M a_2 = a_1 m$, $M b_2 = b_1 n$, $M c_2 = c_1 p$ und $M d_2 = d_1 q$ macht, und $a_2 a'_2$, $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$ senkrecht auf X fällt, so werden die Katheten $M a'_2$, $M b'_2$, $M c'_2$ und $M d'_2$ die Entfernungen der horizontalen Projektionen der Punkte a_1, b_1, c_1 und d_1 von E, $a_2 a'_2$, $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$ und $d_2 d'_2$ aber werden die vertikalen Ordinaten dieser Punkte sein. Macht man daher $m a = M a'_2$, $n b = M b'_2$, $p c = M c'_2$ und $q d = M d'_2$, zieht sodann die Geraden a b, b c, c d und d a, so erhält man die horizontalen Projektionen der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$. Zieht

man nun aa', bb', cc', und dd' senkrecht auf X, und zieht die mit X parallelen Geraden a_2a', b_2b', c_2c' und d_2d', verbindet ferner a' mit b', b' mit c', c' mit d' und d' mit a' durch Gerade, so wird $a'b'c'd$ die vertikale Projektion der gegebenen Grundfläche des auf ihrer Ebene senkrechten Parallelepipedum sein. Um nun auch noch die übrigen Kanten und Seitenlinien von diesem Parallelepipedum anzugeben, müssen wir wenigstens die Projektionen einer dieser Kanten angeben. Wir wissen nun vor Allem, dass die Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c'), und (d, d') die Endpunkte der Kanten sind, so dass wir also von einer jeden bloss noch die Projektionen eines Punktes angeben dürfen, um dieselben projiciren zu können. Nun wissen wir ferner, dass jede Kante des Parallelepipedum senkrecht auf der Ebene seiner Grundfläche steht, daher sind auch die horizontalen Projektionen der Kanten (§. 84.) senkrecht auf E, und ihre vertikalen Projektionen senkrecht auf der vertikalen Spur der Ebene der Grundfläche. Es liegen mithin die horizontalen Projektionen der Seitenkanten in den Geraden a_1a, b_1b, c_1c, d_1d, ihre vertikalen Projektionen aber liegen in den Geraden, die man von den Punkten a', b', c' und d' senkrecht auf 'E zieht. Da nun jede dieser Kanten senkrecht auf Ebene ESE' (nämlich auf der Ebene der Grundfläche $a_1b_1c_1d_1$) steht, so bildet dieselbe mit der horizontalen Tafel gleich Winkel und zwar ist jeder dieser Winkel Complementswinkel zu demjenigen, den Ebene ESE' mit der horizontalen Tafel bildet; folglich ist $< BB_1A$ gleich dem Winkel, den eine dieser Kanten mit der horizontalen Tafel bildet. Legen wir daher in k_1 an X den Winkel $l_1k_1l = < BB_1A$, machen sodann $k_1l_1 = a_1h_1$, und ziehen l_1l senkrecht auf X, so wird (nach §. 88.) k_1l gleich der horizontalen Projektion einer dieser Kanten sein, denn diese Kanten haben, weil sie parallel und gleich sind (nach §. 78.) auch gleiche horizontale und gleiche vertikale Projektionen. Trägt man daher k_1l von a aus auf am, und macht $ah = kl$, macht ferner $bg = cf = de = k_1l$, so erhält man die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten des Parallelepipedum, und zieht man die Geraden hg, gf, fe und eh, so wird abcdefgh die horizontale Projektion des Parallelepipedum sein. Nun ziehe man von den Punkten e, f, g, h aus Senkrechte auf X, und lasse diese einzeln von den auf 'E gezogenen Senkrechten $d'e'$, $c'f'$, $b'g'$ und $a'h'$ durchschneiden, ziehe sodann die Geraden $k'f'$, $f'g'$, $g'h'$ und $e'h'$, so wird $a'b'c'd'e'f'g'h'$ die vertikale Projektion des gegebenen Parallelepipedum sein.

Anmerk. Es wurde vorhin erwähnt, dass jede auf der Ebene der Grundfläche $a_1b_1c_1d_1$ (Fig. 128.) senkrechte Kante des Parallelepipedum mit der horizontalen Tafel einen Winkel bildet, welcher den Winkel der Ebene ESE' und der horizontalen Tafel, nämlich den $< \alpha_1$ zu 90° ergänzt. Obgleich diess sehr leicht einzusehen ist, so wollen wir diesen Satz doch näher betrachten, und ihn beweisen. Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkte einer dieser Kanten auf die horizontale Tafel eine Senkrechte, so bildet diese Senkrechte mit jener Kante einen Winkel, welcher Supplementswinkel zum $< \alpha_1$ ist (nach §. 50.), und diese Senkrechte bildet mit der Verlängerung von jener Kante einen Winkel, welcher (nach §. 136.) der Complementswinkel desjenigen Winkels ist, den die Kante mit der horizontalen Tafel bildet. Nennen wir daher diesen letzteren β, so wissen wir, dass $90-\beta + 180-\alpha_1 = 180$, daher ist $\beta = 90-\alpha_1$, d. h. der Winkel, welchen eine Kante des gegebenen Parallelepipedum mit der horizontalen Tafel bildet, ist Complementswinkel desjenigen, den die Ebene von $a_1b_1c_1d_1$ mit der horizontalen Tafel bildet.

§. 192.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir die regelmässigen Körper erwähnen, die gewöhnlich in den Lehrbüchern der Geometrie vorkommen. Regelmässig wird ein Polyeder genannt, wenn alle einzelnen Figuren, welche den Körper begränzen regelmässig und unter sich kongruent sind. Nun sollen die einzelnen regelmässigen Polyeder, welche lauter ausspringende Winkel haben, aufgezählt werden.

1. Regelmässige Polyeder aus regelmässigen Dreiecken.

a. Legt man drei regelmässige Dreiecke so an einander, dass sie einen Scheitel, und je zwei auf einander folgende eine Seite gemeinschaftlich haben, so wird ein körperliches Eck gebildet, und die Grundlinien dieser drei regelmässigen Dreiecke bilden (weil die Dreiecke kongruent sind) ein diesem letzteren kongruentes regelmässiges Dreieck, so dass also der ganze körperliche Raum von vier regelmässigen und unter sich gleichen Dreiecken begränzt wird. Man nennt diesen Körper ein regelmässiges Tetraeder oder ein Tetraeder.

b. Legt man vier regelmässige und unter sich kongruente Dreiecke so an einander, dass sie einen Körperwinkel bilden (was nach §. 56. geschehen kann), so werden diejenigen Seiten derselben, welche nach der offenen Seite zugekehrt sind, ein regelmässiges Viereck bilden, welches die Grundfläche einer Pyramide mit regelmässigen Dreiecken als Seitenflächen ist. Dass die Seiten dieser Dreiecke ein Quadrat bilden, ist leicht einzusehen. Es ist

nämlich dieses Viereck vor Allem ein Rhombus, also auch ein ebenes Viereck. Da nun alle Kanten dieser Pyramide einander gleich sind, so werden auch (§. 19.) die Scheitel jenes Viereckes in einem Kreisumfange liegen, dessen Mittelpunkt der Fuss der vom Scheitel des zuerst gebildeten körperlichen Eckes auf die Ebene des Viereckes gezogenen Senkrechten ist; daher ist auch dieses Viereck als ein in einem Kreise eingeschriebenes, das gleiche Seiten hat, ein regelmässiges. Errichtet man über dieses Quadrat wieder eine Pyramide, deren Seitenflächen regelmässige und mit den vorigen kongruente Dreiecke sind, so bilden diese beiden Pyramiden einen aus lauter regelmässigen und unter sich kongruenten Dreiecken begränzten Körper, von welchem jeder Körperwinkel aus vier Winkeln der regelmässigen Dreiecke gebildet wird. Dieser Körper ist nun nach der am Eingange dieses §. gegebenen Erklärung regelmässig, und wird ein **Oktaeder** genannt.

c. Aus §. 56. ist bekannt, dass man fünf regelmässige Dreiecke in einem Punkte so zusammenstossen lassen kann, dass sie einen körperlichen Winkel bilden; legt man daher fünf regelmässige und unter sich kongruente Dreiecke so aneinander, dass sie einen Scheitel und je zwei auf einander folgende eine Seite gemeinschaftlich haben, so wird hierdurch ein körperliches Eck aus fünf Linienwinkeln gebildet, von welchem jeder 60° enthält. Betrachtet man nun die unteren Scheitel dieser Dreiecke, so stossen in jedem derselben zwei von diesen Dreiecken zusammen, und es können also noch drei angelegt werden, damit man ein körperliches Eck erhält, wie das gegebene. Da nun fünf solche Scheitel vorhanden sind, von welchen jeder der Scheitel eines körperlichen Eckes von fünf Linienwinkeln wird, wenn man noch drei regelmässige Dreiecke anlegt, so werden ausser den angegebenen fünf regelmässigen Dreiecken noch fünfzehn nothwendig sein, um den ganzen körperlichen Raum zu schliessen. Es entsteht also ein Körper, der von zwanzig regelmässigen Dreiecken begränzt wird, folglich ist dieser Körper regelmässig; man nennt denselben **Ikosaeder**.

2. Regelmässige Polyeder, die von Quadraten begränzt werden, kann man bloss eines bilden, und zwar das, von welchem in jedem Körperwinkel drei Quadrate zusammenstossen, wie diess in §. 56. erwähnt wurde. Errichtet man nämlich über ein Quadrat ein rechteckiges Parallelepipedum, dessen Höhe gleich der Seite des Quadrates ist, so erhält man den einzigen von regelmässigen Vierecken begränzten Körper, der also regelmässig ist. Man nennt denselben, wie schon in §. 163. erwähnt wurde: **Hexaeder** oder **Cubus**.

3. Von regelmässigen Fünfecken kann man (§. 56.) noch einen regelmässigen Körper begränzen. Lässt man nämlich drei regelmässige Fünfecke, die kongruent sind so aneinander stossen, dass sie einen Scheitel und je aufeinander folgende derselben eine Seite gemeinschaftlich haben, so erhält man noch ein körperliches Eck, weil jeder Winkel des regelmässigen Fünfeckes 108 Grad enthält, also drei solche nur erst 324° ausmachen. Begränzt man nun den körperlichen Raum dadurch, dass man an die untern Seiten jeder dieser drei regelmässigen Fünfecke solche anlegt, die kongruent sind, und von welchen immer drei einen körperlichen Winkel bilden, so erhält man ein regelmässiges Polyeder welches **Pentagondodekaeder** genannt wird.

Sechstes Kapitel.

Principien der isometrischen Projektionslehre.

§. 193.

Um die Principien der isometrischen Projektionslehre zu entwickeln, wollen wir vor Allem einen Würfel, der seine Grundfläche in der horizontalen Tafel hat, so drehen, dass ein Scheitel desselben in der horizontalen Tafel bleibt, seine einzelnen Kanten aber in Ebenen bleiben, die parallel zur vertikalen und senkrecht auf der horizontalen Tafel sind. Nimmt man nun die Grundfläche des Würfels in der horizontalen Tafel so an, dass die durch zwei Kanten gelegte Diagonalebene parallel zur vertikalen Tafel ist, so wird die äussere Begränzung seiner horizontalen Projektion ein Sechseck, und wenn man den Würfel so weit dreht, bis die körperliche Diagonale desselben, welche durch den in der horizontalen Tafel bleibenden Punkt geht, senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so steht die horizontale Projektion des Würfels in dieser neuen Lage in einem bestimmten Zusammenhange mit dem Würfel selbst, der hier dargethan werden soll.

(Fig. 129.) Es sei ABCDEFG ein Würfel, von welchem der Scheitel B in der horizontalen

Tafel liegt und AB eine körperliche Diagonale desselben, die senkrecht auf dieser Tafel steht, so projicire man die einzelnen Scheitel desselben horizontal, indem man die Geraden Cc, Dd, Ee, Ff, Gg und Hh senkrecht auf die horizontale Tafel zieht, und die Projektionen dieser Punkte C, D, E etc. etc. durch c, d, e etc. etc. bezeichnet. Verbindet man nun diese letzteren Punkte durch Gerade, unter sich und mit dem Punkte B, so erhält man die horizontale Projektion efghcd der unteren drei in dem Punkte B zusammenstossenden Seitenflächen des Würfels. Zieht man die Diagonalen AC, AE und AG, so hat man AC = AE = AG als Diagonalen gleicher Quadrate, CC = BE = BG als Seiten dieser letzteren und AB für die drei Dreiecke, deren Seiten die vorher genannten Linien sind, gemeinschaftlich, folglich wird

$$\triangle ABC \cong \triangle ABE \cong \triangle ABG,$$

und mithin auch

1. $\angle ABC = \angle ABE = \angle ABG$, d. h. die Winkel, welche die körperliche Diagonale AB mit den drei Kanten BC, BE und BG bildet, sind unter sich gleich. Legt man nun durch AB und BC eine Ebene, so wird diese (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel sein, und mithin (§. 71.) die horizontal projicirende Ebene von BC sein, so dass also die horizontale Projektion von BC, nämlich Bc in der durch AB und BC gelegten Ebene sich befindet. Da nun die Geraden AB, BC und Bc in dieser letzteren Ebene liegen, und nach der Voraussetzung AB senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so muss $\angle ABC + \angle CBc = 90°$ sein. Legt man nun ebenso durch AB und BE eine Ebene, so wird diese die horizontal projicirende Ebene von BE sein, also Be enthalten und daher muss $\angle ABE + \angle BEe = 90°$ sein. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, dass $\angle ABG + \angle BGg = 90°$ sein muss, daher ist auch $\angle ABC + \angle CBc = \angle ABE + \angle EBe = \angle ABG + \angle GBg$, und da $\angle ABC = \angle ABE = \angle ABG$ ist, so muss auch
2. $\angle CBc = \angle EBe = \angle GBg$ sein.

 Nun ist ausserdem noch BC = BE = BG, daher ist $\triangle BCc \cong \triangle BEe \cong \triangle BGg$, woraus also folgt, dass
3. Bc = Be = Bg

 sein muss, d. h. die horizontalen Projektionen der drei durch den Punkt B gehenden Würfelkanten müssen einander gleich sein. Nun wissen wir, dass CH ≠ BG, BC ≠ DE, und BC ≠ HG, ferner BE ≠ CD ist, folglich müssen auch (§. 76.) die horizontalen Projektionen der Geraden CH, HG, DE und CD einzeln parallel sein mit den horizontalen Projektionen der Geraden BG, BC und BE, oder es muss

 ch ≠ Bg, hg ≠ Bc ≠ de, cd ≠ Be sein, und aus gleichem Grunde muss ef ≠ Bg und fg ≠ Be sein. Da nun parallele Gerade, die gleich sind, auch (§. 78.) unter sich gleiche Projektionen haben, so ist auch

 fg = Be, ef = Bg, hg = Bc, hc = Bg, cd = Be und dc = Bc, und da Be = Bg = Bo war, so hat man endlich

 de = ef = fg = gh = hc = cd = Be etc. etc.

 daher sind
4. d i e h o r i z o n t a l e n P r o j e k t i o n e n d e r i n d e m P u n k t e B z u s a m m e n s t o s s e n d e n d r e i S e i t e n f l ä c h e n d e s W ü r f e l s u n t e r s i c h g l e i c h e R h o m b e n.

 Nun ist Bg = Bc = Be (nach dem, was schon oben bewiesen wurde), und da $\angle GgB = \angle BcC = \angle EeB = R$ ist, so hat man $\triangle BGg \cong \triangle BCc \cong \triangle BEe$, und daher Gg = Cc = Ee.

 Da nun Cc = und ≠ Gg ist, so hat man CG = und ≠ cg, und da ferner Cc ≠ und = Ee ist, so wird BE = und ≠ ce, und endlich ist EG = und ≠ eg. Man hat daher $\triangle eBg \cong \triangle eBc \cong \triangle eBg$, folglich
5. $\angle eBg = \angle cBg = \angle cBe = \frac{360°}{3} = 120°$.

 Nun fallen die horizontalen Projektionen der oberen Kanten theils mit den horizontalen Projektionen der unteren, theils mit den Verlängerungen dieser Kanten zusammen, und daher fallen auch die horizontalen Projektionen der oberen drei Seitenflächen mit denen der unteren drei zusammen, und es stellt mithin die Figur Bcdefghc die horizontale Projektion desjenigen Würfels vor, dessen einer Scheitel B in der horizontalen Tafel liegt, und von welchem die durch B gehende körperliche Diagonale senkrecht auf dieser Projektionstafel steht. Nimmt man nun die in (3), (4) und (5) bewiesenen Sätze zusammen, und erwägt noch, dass $\triangle efg \cong \triangle ghc \cong \triangle edc$, also
6. ed = dc = ch = hg = gf = fe = eB etc. etc. ist, so kann man für die horizontale Projektion eines Würfels, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, folgende Sätze aussprechen:

1. D i e h o r i z o n t a l e P r o j e k t i o n d i e s e s W ü r f e l s h a t a l s ä u s s e r e B e g r ä n z u n

ein regelmässiges Sechseck, dessen Mittelpunkt der auf der horizontalen Tafel sich befindende Scheitel des Würfels ist.

2. Die horizontalen Projektionen der drei durch den Endpunkt der körperlichen Diagonale gehenden Kanten sind einander gleich und zwar gleich der horizontalen Projektion einer jeden der übrigen Kanten, und bilden unter einander Winkel von 120°. —

3. Die horizontalen Projektionen der einzelnen Seitenflächen sind Rhomben, von welchen jedes einen Winkel von 120°, und einen von 60° hat.

§. 194.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass wenn die horizontale Projektion einer Kante eines Würfels, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, bekannt wäre, die horizontale Projektion des Würfels leicht konstruirt werden könnte, wenn man in der horizontalen Projektion jener Diagonale drei Gerade so anlegen würde, dass immer zwei auf einander folgende derselben, Winkel von 120° bilden, jede derselben so gross als die horizontale Projektion einer Würfelkante machen würde, und nun über jede einen Rhombus konstruirt, von welchem jeder von zwei gegenüberstehenden Winkel 120° und jeder der beiden andern 60° beträgt. Man würde dadurch die horizontalen Projektionen der einze Seitenflächen des Würfels und mithin seine horizontale Projektion erhalten. Nun wird aber die im vorstehenden Paragraphe gemachte Untersuchung nicht darauf angewendet, die horizontale Projektion dieses Würfels zu bestimmen, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, sondern man konstruirt die horizontale Projektion eines neuen Würfels, der gegen die horizontale Tafel eben so liegt, wie der vorige, und von welchem die horizontale Projektion einer jeden Kante gleich der Seite des gegebenen Würfels ist, und nennt diese horizontale Projektion des neuen Würfels die isometrische Projektion des gegebenen. Die drei durch den in der horizontalen Tafel angenommenen Scheitel des Würfels gehenden Kanten nennt man die isometrischen Hauptaxen oder Axen, während alle mit diesen Axen parallel gezogenen Geraden isometrische Linien genannt werden. Die durch je zwei der Axen gelegten Ebenen sind die isometrischen Hauptebenen, eine Ebene aber, die durch zwei isometrische Linien gelegt wird, heisst isometrische Ebene. —

Kennt man also die isometrischen Axen, so kann man daraus die isometrische Projektion des Würfels angeben, und aus den isometrischen Linien eines Punktes kann letzterer angegeben werden. —

Anmerk. Das, was hier von Würfeln nachgewiesen wurde, kann leicht auf ein rechtwinkliges Parallelepipedum angewendet werden, wenn man sich in letzterem einen Würfel denkt, dessen Kanten in einzelnen Kanten des ersteren liegen, diesen um einen Scheitel so dreht, dass die durch diesen Scheitel gehende körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird die horizontale Projektion des Parallelepipedum eine leicht zu konstruirende Figur sein. Wenn man die horizontale Projektion eines neuen Parallelepipedum konstruirt, welches so beschaffen ist, dass die horizontale Projektion der einzelnen Kanten desselben gleich den Kanten des gegebenen Parallelepipedum werden, so wird die horizontale Projektion dieses neuen Parallelepipedum die isometrische Projektion des gegebenen genannt.

§. 195.

Aufgabe 51. Es ist eine Kante eines Würfels gegeben, man soll seine isometrische Projektion bestimmen.

Auflösung. (Fig. 130.) Es sei a b c d die horizontale, a'c'e'f die vertikale Projektion eines Würfels, dessen isometrische Projektion man bestimmen soll. Man nehme (Fig. 130. a.) einen beliebigen Punkt C an, welcher der Fuss der durch den Punkt (c, c') gehenden körperlichen Diagonaten (in Fig. 130.) sein soll, beschreibe aus C mit einem Halbmesser, der gleich a b ist, einen Kreis, und trage CD = ab auf die Peripherie dieses Kreises, so wird $\angle$ BCE = $\angle$ DCE etc. etc. = 60° sein. Zieht man daher BC, CG und CE, so wird $\angle$ BCG = $\angle$ BCD = $\angle$ GCD = 120° sein, und die drei Geraden BC, CG und CD sind die isometrischen Axen. Construirt man nun die Rhomben BCGAB, CDE und ECFD, so werden diese die isometrischen Projektionen der unteren drei Seitenflächen des Würfels sein. Da nun CD, CA und CF die isometrische Projektion der durch den Anfangspunkt der körperlichen Diagonale gehenden Würfelkanten sind, so werden die Rhomben ACEB, CDEF und FCAG die oberen drei Seitenflächen des Würfels sein, und mithin ist ABDEFGC die verlangte isometrische Projektion des in Fig. 130. angegebenen Würfels.

Anmerk. Es ist in Fig. 130. der Würfel (a b c d, 'a'c'e'g'k) so gedreht worden, dass die durch die Ge-

raden (a, m a') und (c, n c') gelegte Ebene parallel geblieben ist mit der vertikalen Tafel, und der Punkt, dessen horizontale Projektion c und dessen vertikale Projektion in c' ist, in der horizontalen Tafel blieb. —

§. 196.

Aufgabe 52. Man soll die isometrische Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedum angeben, dessen Grundfläche ein Quadrat ist.

Auflösung. (Fig. 130.) Es sei abcd die Grundfläche, also auch die horizontale Projektion des Parallelepipedum, 'a 'b 'c 'k 'l seine vertikale Projektion, so schneide man in einer solchen Entfernung von der Grundfläche durch eine Ebene das Parallelepipedum ab, dass der zwischen dieser Ebene und der horizontalen Tafel liegende Theil desselben ein Würfel wird. Denkt man sich nun diesen Würfel so gedreht, dass der Scheitel c fix liegen bleibt, die durch c gehende körperliche Diagonale des Würfels aber senkrecht auf der horizontalen Tafel zu stehen kömmt, und projicirt in dieser Stellung sowohl den Würfel, als auch das Parallelepipedum, so muss die horizontale Projektion jeder Kante des Würfels mit der horizontalen Projektion derjenigen Kante des Parallelepipedum, von welcher sie ein Theil ist, in demselben Verhältnisse stehen, in welchem diese Kanten selbst unter einander stehen. (Fig. 130. b.) Denn ist C A die Länge einer Kante des Würfels, C a ihre horizontale Projektion, C B die Länge einer Kante des Parallelepipedum, dessen horizontale Projektion C b ist, so wissen wir, dass C B und C A auf der Geraden C B liegen. Projiciren wir daher C B und C A horizontal, so liegen diese Projektionen C a und C b mit C A und C B in einem rechtwinkligen Dreiecke C B b, in welchem die horizontal-projicirenden Linien B b und A a der Punkte B und A parallel sein müssen, folglich wird

$$EA : CB = Ca : Cb \text{ sein.}$$

Nehmen wir daher ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit quadratischer Grundfläche an, von welchem die horizontale Projektion einer Kante gleich C A ist, so wird die horizontale Projektion einer Kante des Würfels von derselben Grundfläche gleich C B sein, wenn C B die Seite der Grundfläche war, und hierauf beruht das Verfahren die isometrische Projektion eines senkrechten Parallelepipedum mit quadratischer Grundfläche zu bestimmen. Man suche nämlich (Fig. 130. a.) die isometrische Projektion des Würfels mit derselben Grundfläche, verlängere die Kanten E B, C A, F G, und mache jede derselben gleich der Höhe des Parallelepipedum, ziehe M K, K H, H N und N M, so wird C E D F H K M E die isometrische Projektion des Parallelepipedum sein, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, von welchem eine Seite gleich C D, und dessen Höhe gleich C K ist. Die isometrischen Projektionen der einzelnen Seitenflächen dieses Parallelepipedum sind leicht aus Fig. 130. a. zu ersehen. —

§. 197.

Aufgabe 53. Es ist ein senkrechtes Parallelepipedum angegeben, dessen Grundfläche ein Rechteck ist; man soll die isometrische Projektion von diesem Parallelepipedum angeben.

Auflösung. Denkt man sich in diesem Parallelepipedum einen Würfel, von welchem drei seiner Kanten in dreien Kanten des ersteren liegen, von diesem sodann (nach §. 195,) die isometrische Projektion bestimmt, auf seine isometrische Axen sowohl, als auch auf seine isometrische Linien die entsprechenden Kanten des Parallelepipedum getragen, und die Endpunkte dieser aufgetragenen Linien in gehöriger Ordnung durch Gerade verbunden, so wird man die isometrische Projektion des gegebenen Parallelepipedum erhalten, oder die horizontale Projektion desjenigen, von welchem die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten gleich den Kanten des gegebenen sind. — (Fig. 133.) Es sei nun A B C D ein in der horizontalen Tafel liegendes Rechteck, welches die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedum sein soll, von welchem 'A B' F' E' die vertikale Projektion ist; man soll die isometrische Projektion von diesem Parallelepipedum angeben. Beschreibt man aus dem beliebig angenommenen Punkte C_1 mit einem Halbmesser $C_1 B_1$, welcher gleich C B ist, einen Kreis, macht $B_1 b = b a = B_1 C_1$ und zieht $C_1 a$, so erhält man eine durch C_1 gehende Seitenfläche des Würfels, von welchem die durch C_1 gehenden Kanten auf drei Kanten des gegebenen Parallelepipedum liegen. Man mache daher $C_1 D_1 = BA$, konstruire das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$, so erhält man die isometrische Projektion der Grundfläche A B C D. Zieht man nun $C_1 c$ so, dass $\angle a C_1 c = 120°$ wird, so ist $c C_1$ die dritte isometrische Hauptaxe des durch C_1 gehenden Würfels, von welchem jede Kante gleich $C_1 B_1$ ist. Macht man daher $C_1 G_1 = B'F'$ gleich der Höhe des angegebenen Parallelepipedum, und konstruirt die Parallelogramme $D_1 C_1 G_1 H_1$ und $B_1 C_1 G_1 F_1$, so erhält man die isometrischen Projektionen zweier Seitenflächen des Parallelepipedum. Zieht man nun $A_1 E_1 \neq$ und $= D_1 H_1 \neq$ und $= C_1 G_1$, und konstruirt die Seitenflächen $A_1 C_1 H_1 D_1$, $A_1 B_1 F_1 E_1$, so wird $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 H_1 G_1 F_1$ die

isometrische Projektion des angegebenen Parallelepipedum sein. —

Anmerk. 1. Aus der in diesem Paragraphe gemachten Construktion lässt sich leicht ersehen, wie man die isometrische Projektion eines Rechteckes bestimmen kann. (Fig. 131.) Ist nämlihh A B C D ein gegebenes Rechteck, so beschreibe man über A B das Quadrat A B b a, ziehe aus A_1 mit dem Halbmesser $A_1 B_1 = AB$ einen Kreisbogen, ziehe $A_1 b_1 = b_1 a_1 = A_1 B_1$, und verbinde A_1 mit a_1 durch die Gerade $A_1 a_1$, so wird $A_1 B_1 b_1 a_1$ die isometrische Projektion des Quadrates A B b a sein. Verlängert man nun $A_1 a_1$ und macht $A_1 D_1 = AD$, verlängert ferner $B_1 b_1$ und macht $B_1 C_1 = BC$, zieht sodann $C_1 D_1$, so wird $A_1 B_1 C_1 D_1$ die isometrische Projektion des Rechteckes A B C D sein.

Anmerk. 2. (Fig. 132.) Soll die isometrische Projektion des Parallelogrammes A B C D bestimmt werden, so umgebe man dasselbe durch das Rechteck B a D b, dessen Seiten die Scheitel des gegebenen Parallelogrammes enthalten. Construirt man nun nach Anmerk. 1. die isometrische Projektion $B_1 a_1 D_1 b_1$ des Rechteckes B a D b, macht ferner $B_1 A_1 = BA$, $D_1 C_1 = DC$, zieht sodann $B_1 C_1$ und $A_1 D_1$, so wird $A_1 B_1 C_1 D_1$ die isometrische Pro.ektion des Parallelogrammes A B C D sein.

Anmerk. 3. Es könnte hier die Frage entstehen, wie man von der isometrischen Projektion eines Rechteckes oder eines Parallelogrammes sprechen kann; allein diese Frage lässt sich leicht beantworten. Man hat sich nämlich nur dieses Rechteck oder Parallelogramm von einem Quadrate so umgeben zu denken, dass die Seiten dieses Quadrates die Scheitel jenes Parallelogrammes enthalten, über dieses Quadrat muss man sich sodann einen Würfel beschrieben denken, und diesen isometrisch projiciren, so werden hierdurch auch seine einzelnen Seitenflächen isometrisch projicirt, und folglich auch jeder Punkt, der auf einer Seite der letzteren liegt. Bestimmt man daher die isometrische Projektion des angenommenen Quadrates, und gibt auf seinen Seiten jene Punkte an, welche den Scheiteln des gegebenen Parallelogrammes entsprechen, so wird durch Verbindung dieser Punkte vermittelst Gerade ein Parallelogramm erhalten, das die isometrische Projektion des gegebenen genannt wird. Ebenso kann man auch von der isometrischen Projektion irgend einer ebenen Figur sprechen. —

§. 198.

Aufgabe 54. Ein senkrechtes Parallelepipedum ist gegeben, dessen Grundfläche ein beliebiges Parallelogramm ist, man soll seine isometrische Projektion angeben.

Auflösung. Construirt man die isometrische Projektion seiner Crundfläche (nach Anmerk. 2. des vor. §.), beschreibt über die erste Seite dieser isometrischen Projektion ein Parallelogramm, dessen zweite Seite gleich der Höhe des gegebenen Parallelepipedum ist, und beschreibt so über jede der Seiten der isometrischen Projektion der Grundfläche ein Parallelogram, so erhält man die Seitenflächen sowohl, als auch die isometrische Projektion des angegebenen Parallelepipedum.

§. 199.

Aufgabe 55. Die isometrische Projektion eines senkrechten Prisma von beliebiger Grundfläche anzugeben.

Auflösung. Man denke sich um dasselbe ein rechteckiges Parallelepipedum beschrieben, dessen Seitenflächen einzelne Kanten des gegebenen, von welchem ferner die Seiten jener Grundfläche einzelne Scheitel der Grundfläche des gegebenen Prisma enthalten, und in welchem die Seiten der Grundfläche von den Seiten der Grundfläche des gegebenen getroffen werden. Sodann konsruire man die isometrische Projektion dieses rechtwinkligen Parallelepipedum, bestimme durch die Seiten der isometrischen Projektion seiner Grundfläche die Punkte, die der Grundfläche des gegebenen Prisma angehören, und verbinde diese in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die isometrische Projektion der Grundfläche dieses Prisma. Durch die einzelnen Scheitel dieser Grundfläche parallele Gerade mit der dritten isometrischen Hauptaxe gezogen, jede dieser Parallelen gleich der Höhe des Prisma gemacht, und die Endpunkte dieser isometrischen Linien durch Gerade verbunden, so erhält man die verlangte isometrische Projektion des Prisma. —

Anmerk. 1. Um alle Weitläufigkeiten möglichst zu vermeiden wollen wir folgende Betrachtungen machen. Wir wissen nämlich, dass

1. die äussere Begränzung der isometrischen Projektion eines Würfels (Fig. 130. a.) ein regelmässiges Sechseck ist, dessen Seite gleich der Seite des Würfels ist.
2. Die isometrische Projektion seiner Grundfläche ein Rhombus sein muss, von welchem zwei Seiten einen Winkel von 120° und die andern zwei einen Winkel von 60° bilden.
3. die isometrischen Projektionen der übrigen Kanten mit den Seiten dieses Rhombus theils Winkel von 120°, theils Winkel von 60° bilden.

Soll daher die isometrische Projektion irgend eines Punktes der Grundfläche, z. B. die des Punktes D (Fig. 130.) angegeben werden, so werden wir seinen wirklichen Abstand D F von der Geraden C J auf C E (Fig. 130. a) tragen, so dass CE (Fig. 130. a.) = FD (Fig. 130.) wird, sodann seinen Abstand D E (Fig. 130.) auf C F (Fig. 130. a.) so tragen, dass CF (Fig. 130. a.) = DE (Fig. 130.) wird, sodann (Fig. 130. a.) FD $\neq$ CE, und ED $\neq$ CE ziehen, so wird in D die isometrische Projektion des in Fig. 130. angegebenen Punktes D sein. Bezeichnen wir nun der Kürze halber die Axe CE durch X, ferner die isometrische Axe CF durch Y, so wird man die

isometrische Projektion eines in der Ebene YZ angegebenen Punktes bestimmen können, wenn man die Axe X an die Axe Z unter dem Winkel 120° anlegt, auf X vom Anfangspunkte (dem Durchschnittspunkte beider Axen) aus die Entfernung des gegebenen Punktes von Y, und auf Y vom Anfangspunkte aus die Entfernung dieses Punktes von X trägt, von den Endpunkten dieser aufgetragenen Entfernungen aus isometrische Linien zieht, so wird der Durchschnitt der letzteren die isometrische Projektion des in der Ebene XY angenommenen Punktes sein. Wir können füglich die Geraden DE und DK die isometrischen Coordinaten des Punktes D nennen, und werden also aus den isometrischen Coordinaten, welche gleich den rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes sind, die isometrische Projektion eines in einer Ebene angegebenen Punktes leicht bestimmen können.

Anmerk. 2. Betrachtet man die isometrische Projektion eines auf der Oberfläche des Würfels angegebenen Punktes, z. B. die des Punktes B (Fig. 130.), die in B (Fig. 130. a.) ist, so ist E (Fig. 130. a.) die isometrische Projektion der horizontalen Projektion des Punktes B, und BE ist gleich der vertikalen Ordinate dieses Punktes, welche parallel mit der dritten isometrischen Axe CA geht. Bezeichnen wir daher die isometrische Axe CA durch Z, so können wir sagen: die isometrische Projektion irgend eines im Raume angegebenen Punktes wird erhalten, wenn man (Anmerk. 1. dieses §.) die isometrische Projektion der horizontalen Projektion dieses Punktes bestimmt, sodann durch diese eine Gerade parallel zur isometrischen Axe Z zieht, und diese isometrische Linie gleich der vertikalen Ordinate des Punktes macht.

Anmerk. 3. Soll daher die isometrische Projektion irgend einer ebenen Figur angegeben werden, so ziehe man durch den Scheitel derselben, um welchen das Polygon gedreht wird, ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und ziehe von den übrigen Scheiteln der Figur aus Senkrechte auf die Coordinatenaxen, wodurch man die rechtwinkligen Coordinaten dieser einzelnen Punkte erhält. Nun ziehe man durch einen beliebigen Punkt zwei Gerade, welche unter einem Winkel von 120° gegen einander geneigt sind, so werden diese die isometrischen Axen X und Y sein. Auf die Axe der X trage man vom Anfangspunkte aus die rechtwinkligen Abstände der einzelnen Scheitel der gegebenen Figur von der Axe Y, und auf die Axe Y trage man vom Anfangspunkte aus die Abstände der einzelnen Scheitel der Figur von der Axe X, ziehe sodann durch die auf den Axen X und Y erhaltenen Punkte isometrische Linien, so wird im Durchschnitte der isometrischen Linien eines und desselben Punktes auch die isometrische Projektion des letzteren erhalten werden. Die isometrischen Projektionen dieser einzelnen Punkte durch Gerade verbunden, so erhält man die isometrische Projektion der angegebenen ebenen Figur. —

Anmerk. 4. Um endlich die isometrische Projektionen irgend eines Polyeders zu bestimmen, so bestimme man die isometrische Projektion seiner Grundfläche, oder einer seiner Seitenflächen. Nun ziehe man auf die Grundfläche von allen übrigen Scheiteln aus Senkrechte, und bestimmen zuerst (nach Anmerk. 1. dieses §.) die isometrischen Projektionen der Fusspunkte dieser Senkrechten, sodann gebe man (nach Anmerk. 2.) die isometrische Projektion eines jeden einzelnen Scheitels an, verbinde die erhaltenen isometrischen Projektionen der einzelnen Scheitel des Polyeders in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die isometrische Projektion des Polyeders. —

Anmerk. 5. Stehen drei Kanten eines Polyeders senkrecht auf einander, so nehme man dieselben als isometrische Axen an. —

§. 200.

Wir wollen nun nach den in den Anmerkungen des letzten Paragraphs gegebenen Regeln noch einige Beispiele machen. —

Beispiel 1. (Fig. 134.) Es sei ABCDEF ein regelmässiges Sechseck, das in der horizontalen Tafel liegt, und die Grundfläche eines senkrechten Prisma sein soll, A D′K′ G′ sei die vertikale Projektion dieses Prisma, man soll die isometrische Projektion desselben bestimmen.

Soll um den Punkt B die Drehung erfolgen, so ziehe man durch B die Gerade X′X″ senkrecht auf AF, und BY senkrecht auf X′X″, verlängere die Geraden FA und DC bis a und b, ziehe ferner AC und DF, so werden diese Geraden senkrecht auf Y stehen, und es werden also diese Hülfslinien die Abstände der einzelnen Scheitel des Sechseckes von den Geraden X und Y angeben. Nun ziehe man $X_1 X'_1$ beliebig, und nehme in dieser Geraden beliebig den Punkt B_1 an, der die isometrische Projektion des Drehungspunktes B sein soll. Ferner lege man in B an X einen Winkel von 120° an, so erhält man Y, und es sind die Geraden X_1 und Y_1 zwei isometrische Axen, die in der Ebene ABCDEF liegen. Macht man nun $B_1 a_1 = Ba$, $B_1 c_1 = Bc$, zieht $a_1 A_1 \neq Y_1$ und $c_1 A_1 \neq X_1$, so erhält man in A_1, dem Durchschnitte dieser beiden Parallelen die isometrische Projektion des Punktes A. Nun mache man $B_1 b_1 = Bb$, ziehe $b_1 C_1 \neq B_1 c_1$, dann verlängere man $A_1 c_1$, so wird im Durchschnitte von $b_1 C_1$ mit $A_1 C_1$, nämlich in C_1 die isometrische Projektion des Punktes C erhalten. Verlängert man nun $a_1 A_1$, und macht $a_1 F_1 = aF$, so wird in F_1 die isometrische Projektion von F sein; verlängert man ferner $b_1 C_1$, und macht $b_1 D_1 = bD$, so wird in D_1 die isometrische Projektion des Punktes D_1 erhalten. Nun liegt E in Y, folglich wird auch die isometrische

Projektion von E in Y_1 liegen müssen; macht man daher $B_1E_1 = BE$, so wird E_1 die isometrische Projektion von E sein. Zieht man nun die Geraden B_1A_1, B_1C_1, D_1E_1 und E_1F_1, so wird die isometrische Projektion $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ des regelmässigen Sechseckes ABCDEF erhalten. Nun ziehe man BZ so, dass $\angle Z_1B_1X_1 = \angle Z_1B_1Y_1 = 120^\circ$ wird, so wird B_1Z_1 die dritte isometrische Hauptaxes ein. Mit B_1Z_1 von den Punkten A_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 Parallele gezogen, und jede derselben gleich D'K' gemacht, ferner die Endpunkte dieser isometrischen Linien durch Gerade verbunden, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1K_1$ die isometrische Projektion des gegebenen sechsseitigen Prisma sein. —

Anmerk. Aus den in diesem §. gemachten Construktionen ersieht man sogleich, dass wenn eine Seite einer ebenen Figur parallel mit einer der Axen ist, oder sich in einer derselben befindet, dasselbe auch für ihre isometrische Projektion statt findet. —

Beispiel 2. (Fig. 135.) Es sei ABCDE ein in der horizontalen Tafel liegendes Fünfeck, welches die horizontale Spur einer senkrechten Pyramide sein soll, der Punkt S dieses Fünfeckes sei die horizontale Projektion des Scheitels dieser Pyramide, und 'S sei die vertikale Projektion dieses Scheitels, so projicire man (§. 177.) das Fünfeck ABCDE vertikal, und es wird seine vertikale Projektion in der Axe X sein müssen, also (§. 70.) 'A'D sein. Zieht man nun die Geraden 'SD', 'SC', S'A', so erhält man die vertikale Projektion 'AD'S' und die Geraden SA, SB, SC, SC und SE gezogen, so wird S'ABCD'E die horizontale Projektion der Pyramide sein. Diese Pyramide sei nun durch die Ebene HNV, welche senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, abgeschnitten, so wird a'e'd' die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur sein, deren horizontale Projektion (nach §. 183.) erhalten werden kann, und in abcde ist. Nun soll man die isometrische Projektion dieser Pyramide sowohl, als auch die des abgeschnittenen Theiles derselben konstruiren.

Ist A der Drehungspunkt, so nehme man die Gerade AC als Abscissenaxe und AB als Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, lasse durch A senkrecht auf die Ebene BAE die dritte Axe gehen, und konstruire nun vor Allem die isometrische Projektion der Figur ABCDE, die in der Ebene BAE selbst liegt. Zu diesem Zwecke nehme man den Punkt A_1 beliebig an, ziehe $\angle X_1A_1Y_1 = 120^\circ$, und betrachte A_1X_1, A_1Y_1 als das isometrische Coordinatensystem, ziehe nun pn durch C parallel zu AE, und verlängere AB und ED, bis n und p. Ferner ziehe man df, ck etc. etc. senkrecht auf AXD und dc, bq, ac etc. etc. senkrecht auf AY. Macht man nun $A_1E = AE$ und $A_1B_1 = AB$, so wird in B_1 die isometrische Projektion von B und in E_1 die isometrische Projektion E sein. Nun trage man Ak von A_1 aus auf A_1X_1, ziehe k_1C_1 parallel mit A_1Y_1, und mache $k_1C_1 = kC$, so wird in C_1 die isometrische Projektion des Punktes C sein. Zieht man nun EA_1 parallel mit A_1Y_1, und macht $E_1D_1 = ED$, so ist in D_1 die isometrische Projektion des Punktes D. Nun ziehe man die Geraden C_1B_1, C_1D_1, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1$ die isometrische Projektions des Fünfeckes ABCDE sein. Macht man nun $k_1S_1 = kS$, so ist in S_1 die isometrische Projektion der horizontalen Projektion des Scheitels der Pyramide, zieht man daher die Geraden S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, S_1D_1 und S_1E_1, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1S_1$ die isometrischen Projektionen der horizontalen Projektion der Pyramide sein. Nun weis man, dass in den Geraden S_1A_1, S_1B_1, SC_1, SD und SE die isometrische Projektion der Punkte a, b, c, d, e liegen müssen; macht man daher $A_1G_1 = AG$, zieht g_1a_1 parallel A_1Y_1, so wird im Durchschnitte dieser Parallelen mit S_1A_1 die isometrische Projektion des Punktes a liegen müssen, und daher in a_1 sein. Auf gleiche Weise wird man verfahren, um die isometrischen Projektionen b_1, c_1, d_1, e_1 der Punkte b, c, d, e zu erhalten, und zieht man daher die Geraden a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, d_1e_1 und e_1a_1, so wird $a_1b_1c_1d_1e_1$ die isometrische Projektion der horizontalen Projektion abcde der Durchschnittsfigur sein, nach welcher die Ebene HSV die Pyramide (S'A'D', SABCDE) schneidet. Zieht man nun A_1Z_1 so, dass $\angle Z_1A_1X_1 = Z_1A_1Y_1 = 120^\circ$ wird, legt durch S_1 die Geraden $S_1S'_1$ parallel A_2Z_1 und macht $S_1S'_1 = $ 'CS' (gleich der Höhe der Pyramide), so erhält man in S'_1 die isometrische Projekiion des Scheitels, und die Geraden S'_1A_1, S'_1B_1, S'_1C_1, S'_1D_1 und S'_1E_1 gezogen, so wird $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ die isometrische Projektion der Pyramide sein. Zieht man nun durch die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 und e_1 die Geraden $a_1a'_1$-$b_1b'_1$ etc. etc. parallel mit A_1Z_1, so wird im Durchschnitte der Geraden $a_1'a'_1$ mit S'_1A_1, nämlich in a'_1 die isometrische Projektion eines Scheitels jener Durchschnittsfigur, ebenso wird in b'_1 dem Durchschnitte von $b_1b'_1$ mit S'_1B_1 die isometrische Projektion eines zweiten Scheitels derselben sein, und auf gleiche Weise erhält man in c'_1, d'_1 und e'_1 die isometrische Projektion der übrigen Scheitel der Durchschnittsfigur. Zieht man daher die Geraden $a'_1b'_1$, $b'_1c'_1$, $c'_1d'_1$, $d'_1e'_1$ und $e'_1a'_1$, so wird $a'_1b'_1c'_1d'_1e'_1$ die isometrische Projektion der Figur sein, nach welcher die angegebene Pyramide

von der Ebene HSV geschnitten wird, und mithin ist $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 e'_1 a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ die isometrische Projektion der schief abgeschnittenen Pyramide. —

§. 110.

Aufgabe 56. Es ist die isometrische Projektion einer Geraden bekannt, so wie das isometrische Coordinatensystem, für welches jene isometrische Projektion bestimmt wurde; man soll die wahre Länge dieser Geraden angeben.

Auflösung. Diese Gerade, deren Länge bestimmt werden soll, kann entweder in der Coordinatenebene (XY) oder im Raume liegen, und wir wollen daher beide Fälle behandeln.

1. (Fig. 136.) Es sei in der Ebene $X_1 A_1 Y_1$ die isometrische Projektion ab einer Geraden angegeben, man soll deren wahre Länge angeben. Es ist aus den vorhergehenden Construktionen bekannt, dass wenn eine Gerade parallel zu einer der Coordinatenaxen ist, die isometrische Projektion derselben parallel mit der entsprechenden isometrischen Axe und gleich der vorigen Länge ist, wenn also parallel mit einer der isometrischen Axen die isometrische Projektion einer Geraden sein wird, so wird diese letztere schon gleich der wahren Länge der Geraden sein. Zieht man daher ag und bf parallel mit $A_1 Y_1$, sodann ak und bl parallel zu $A_1 X_1$, so werden die ersteren zwei Geraden gleich den rechtwinkligen Abständen der Endpunkte der Geraden von der Abscissenaxe und die letzteren werden die rechtwinkligen Abstände derselben Punkte von der Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein. Macht man daher $m_1 l_1 = g_1 f_1 = a_1 f_1 - a_1 g_1 = bf - ag$, ferner $k_1 l_1 = k_1 f_1 - l_1 f_1 = ak - bl$, und macht ferner $< m_1 l_1 k_1 = < g_1 f_1 k_1 = 90°$, zieht sodann $m_1 k_1$, so wird $m_1 k_1$ die Länge der Geraden sein, deren isometrische Projektion ab ist.
2. (Fig. 136.) Die isometrische Projektion ab', einer im Raume angegebenen Geraden ist bekannt, von welcher ab die isometrische Projektion ihrer horizontalen Projektion ist; man soll die wahre Länge dieser Geraden bestimmen. Vor Allem bestimme man (nach 1. dieses §.) die wahre Länge $m_1 k_1$ der Geraden, deren isometrische Projektion ab ist, so weis man (aus §§. 88. und 89.), dass die Länge der gesuchten Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete $m_1 k_1$ und dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten der Endpunkte a' und b' ist. Nun ist aber (nach Anmerk. 2. §. 199.) a'a die vertikale Ordinate des Punktes a', a und b'b die des Punktes b', b; zieht man daher $k_1 p_1$ senkrecht auf $m_1 k_1$, macht sodann $k_1 p_1 = a'a - b'b$, und zieht $m_1 n_1$, so ist diese letztere die Länge der durch ihre isometrische Projektion a'b' angegebenen Geraden.

Zweites Buch.

Erste Abtheilung.

Krumme Linien.

Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Construktion und Tangirung einiger ebener Curven.

§. 202.

Eine krumme Linie oder Curve entsteht dadurch, dass sich ein Punkt nach irgend einem Gesetze fortbewegt. Legt man durch irgend drei Stellungen des die Curve erzeugenden Punktes eine Ebene, und es fällt die Curve ganz und gar in diese Ebene, so wird dieselbe eine ebene Curve genannt.

§. 203.

Die einfachste unter den ebenen Curven ist die Kreislinie. Sie ensteht dadurch, dass der sich bewegende und diese Linie erzeugende Punkt währerd seiner ganzen Bewegung von einem fixen Punkte dieselbe Entfernung beibehält. Man nennt diesen fixen Punkt den Mittelpunkt oder das Centrum der Kreislinie; die Entfernung irgend einer Stellung des erzeugenden Punktes von dem Mittelpunkte der Kreislinie wird Halbmesser oder Radius, ein Theil der Linie selbst Bogen und die Figur, die von der Kreislinie eingeschlossen wird, Kreis genannt. Eine durch das Centrum gehende Gerade. welche zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Durchmesser genannt, und es sind also auch alle Durchmesser unter sich gleich. Iede Gerade, welche irgend zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Sehne des Kreises, ein von einer Sehne und einem Bogen begränzter Theil des Kreises wird Segment oder Abschnitt und ein von zwei Halbmessern und einem Bogen begränzter Theil wird Ausschnitt oder Sektor genannt. —

Anmerk. Ueber die Construktion der Kreislinie für den gegebenen Halbmesser bleibt nichts zu erwähnen übrig; allein es wird nicht überflüssig sein zu zeigen, wie man irgend einen Punkt derselben nach angegebenen Bedingungen bestimmen kann. Zieht man nämlich zwei Durchmesser senkrecht auf einander, bezeichnet die Entfernung einer beliebigen Stellung des erzeugenden Punktes vom ersten Durchmesser mit x, seine Entfernung vom andern Durchmesser mit y, und die Länge des Halbmessers mit r, so ist nach einem Satze der Geometrie:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

und diese Gleichung reicht hin, um für einen gegebenen Halbmesser und aus der Entfernung eines Punktes von einem Durchmesser, seine Entfernung vom andern Durchmesser sowohl, als auch den Punkt selbst angeben zu können; so wie man aus den Entfernungen eines Punktes von jenen beiden Durchmessern — seinen Coordinaten — den Halbmesser der Kreislinie bestimmen kann.

§. 204.

Bevor wir auf einzelne Aufgaben über die Kreislinie übergehen, wollen wir noch einige Erklärungen vorausschicken. Denkt man sich nämlich die einzelnen auf einander folgenden Lagen des erzeugenden Punktes einer Curve auf letzterer angegeben, so nennt man einen Theil der letzteren, welcher zwischen zwei solchen Punkten sich befindet, Element der Curve, die Endpunkte eines solchen Elementes consecutive Punkte. Dass man ein solches Element, ohne einen wirklichen Fehler zu machen, als Gerade betrachten kann, bedarf kaum einer Erwähnung. Die Verlängerung eines solchen Elementes wird Tangente der Curve und einer dieser das Element begränzenden Punkte Berührungspunkt dieser Tangente, ferner wird die vom Berührungsdunkte auf die Tangente senkrecht gezogene Gerade Normale und die Länge eines solchen Theiles einer beliebigen Normale, welcher zwischen ihrem Berührungspunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit der durch den consecutiven Punkt gezogenen Normale enthalten ist, Krümmungshalbmesser der Curve genannt. Für den Kreis sind alle Krümmungshalbmesser von gleicher Länge, und zwar gleich dem Halbmesser desselben, was bei einer jeden andern Curve nicht der Fall ist. Die Curve, welche der Ort aller Durchschnittspunkte der Krümmungshalbmesser einer gegebenen Curve ist, wird Evolute der gegebenen Curve und letztere die Evolvente jener Curve genannt. —

Anmerk. Für ein gegebenes rechtwinkliges Coordinatensystem sei z = f (x) die Gleichung einer ebenen Gurve, von welcher x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, so ist

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

1. $y - y_1 = \left[\frac{d\,f\,(x)}{dx}\right](x - x_1)$ die Gleichung der Tangente,

2. $y - y_1 = -\left[\frac{1}{\left(\frac{d\,f\,(x)}{dx}\right)}\right](x - x_1)$ die Gleichung der Normale,

3. $R = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{d\,f\,(x)}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left(\frac{d^2\,f\,(x)}{dx^2}\right)}$ die Länge des Krümmungshalbmessers für einen gegebenen Berührungspunkt, dessen Coordinaten x_1 und y_1 sind.

§. 205.

Aufgabe 1. Es soll für einen auf der Kreislinie gegebenen Berührungspunkt eine Tangente an diese Linie gezogen werden.

Auflösung. (Fig. 137.) Zieht man durch diesen Berührungspunkt, welcher A_1 sein soll, einen Halbmesser CA_1 des gegebenen Kreises, und fällt von A_1 aus auf diesen Halbmesser eine Gerade A_1T_1 senkrecht, so ist letztere die gesuchte Tangente nach dem Lehrsatze der Geometrie: „Jede vom Endpunkte eines Halbmessers einer Kreislinie auf diese senkrecht gezogene Gerade ist eine Tangente dieser Kreislinie“; folglich ist A_1T_1 die durch den gegebenen Berührungspunkt A_1 gehende Tangente der Kreislinie.

§. 206.

Aufgabe 2. Parallel mit einer gegebenen Geraden an die gegebene Kreislinie eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 137.) Zieht man vom Mittelpunkte C des gegebenen Kreises aus auf die gegebene Gerade EF die Gerade CB senkrecht, so trifft diese die Kreislinie im Punkte A_2, und dieser wird der Berührungspunkt derjenigen Tangente dieser Kreislinie sein, welche parallel ist mit EF. Zieht man daher A_2T_2 senkrecht auf CB, so erhält man nach dem im vorigen §. angeführten Lehrsatze eine Tangente der gegebenen Kreislinie, und da die Gerade EF und A_2T_2 auf einer derselben Geraden CB senkrecht stehen, so ist $A_2T_2 \neq EF$, und mithin A_2T_2 die gesuchte Tangente. —

§. 207.

Aufgabe 3. Durch einen ausserhalb der Kreislinie angegebenen Punkt an diese Linie eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 138.) Ist M_1 der ausserhalb der Kreislinie A_1A_2 angegebene Punkt, durch welchen die Tangente an diese Linie gezogen werden soll, so sieht man vor Allem, dass zwei Gerade die Bedingung erfüllen, durch M_1 zu gehen und die Kreislinie zu tangiren. Zieht man nun vom gegebenen Punkte M_1 aus nach dem Mittelpunkte C die Gerade M_1C, und halbirt letztere, welches durch den Punkt c geschieht, beschreibt ferner von c aus mit cM_1 oder cC eine Kreislinie, so wird von letzterer die gegebene Kreislinie in zwei Punkten geschnitten, nämlich in A_1 und A_2, welche die Berührungspunkte der von A_1 aus an die Kreislinie gezogenen Tangenten sind. Zieht man daher die Geraden M_1A_1 und M_1A_2, so werden diese die gesuchten Tangenten sein.

§. 208.

Bewegt sich ein Punkt nach dem Gesetze, dass die Summe seiner Entfernungen von zwei fixen Punkten unveränderlich und dieselbe bleibt, so entsteht eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird. Diese zwei fixen Punkte werden die Brennpunkte und die Entfernung des erzeugenden Punktes von einem der Brennpunkte Radius Vektor der Ellipse genannt. Zieht man durch diejenigen zwei Lagen des erzeugenden Punktes eine Gerade, welche durch die Brennpunkte geht, so erhält man die grosse Axe der Ellipse, die Verbindungslinie jener zwei Punkte der Ellipse aber, welche auf der grossen Axe senkrecht steht, und letztere halbirt, wird kleine Axe der Ellipse, und der Durchschnittspunkt beider Axen der Mittelpunkt dieser Linie genannt. Verbindet man irgend zwei Stellungen des erzeugenden Punktes durch eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, so erhält man einen Durchmesser oder Diameter, zieht man aber durch einen der Brennpunkte eine Gerade auf die grosse Axe senkrecht, welche zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, so erhält man einen Parameter der Ellipse. Derjenige Theil der grossen Axe, welcher zwischen dem Mittelpunkte und einem der Brennpunkte liegt, wird Excentricität genannt. Die Verbindungslinie zweier beliebiger Lagen des erzeugenden Punktes wird Sehne genannt.

§. 209.

Aufgabe 4. Aus der grossen Axe und den Brennpunkten einer Ellipse letztere zu konstruiren.

Auflösung. (Fig. 139.) Es sei F_1 der eine, F_2 der andere Brennpunkt und B_1B_2 die grosse Axe der Ellipse, so weis man, dass die Summe

Bayerische Staatsbibliothek

der Entfernungen jedes Punktes der Ellipse von F_1 und F_2 unveränderlich sein muss; ferner ist $B_1 B_2$ gleich der Summe dieser Entfernungen; nimmt man daher eine beliebige Gerade $B_1 m_1$ an, zieht von F_1 aus mit $B_1 m_1$ einen Kreisbogen, zieht sodann von F_2 aus mit $B_2 m_2$ einen Kreisbogen, so durchschneidet letzterer den ersteren in einem Punkte a'_1, welcher eine Lage des erzeugenden Punktes ist, denn es ist $a'_1 F_2 + a'_1 F_1 = B_1 B_2$. Wenn man also überhaupt einen beliebigen Theil der Axe $B_1 B_2$ von einem Endpunkte, z. B. von B_1 aus so annimmt, dass der übrige Theil dieser Axe grösser, als $B_2 F_2$ ist, sodann mit dem einen dieser Theile von einem der Brennpunkte F_1 aus einen Kreisbogen beschreibt, und vom andern Brennpunkte F_2 aus mit dem andern jener zwei Theile der grossen Axe einen Kreisbogen beschreibt, so erhält man im Durchschnittspunkte dieser beiden Kreisbögen einen Punkt, welcher eine Lage des erzeugenden Punktes der Ellipse ist. Dieses Verfahren hat man genugsam und zwar so oft zu wiederholen, bis man eine Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes erhält, aus deren stätigen Verbindung die Ellipse bestimmt und gezogen werden kann. — Vermittelst zweier solcher Theile der grossen Axe, z. B. $B_1 m_1$ und $m_1 B_2$ kann man jedesmal vier Lagen des erzeugenden Punktes erhalten; man wird nämlich sogleich die Punkte a_1 und a_2 erhalten, wenn man mit $B_1 m_1$ aus F_2 einen Kreisbogen beschreibt, und diesen durch einen anderen, der von F_1 aus mit $B_2 m_1$ beschrieben ist, durchschneidet. Beschreibt man aus F_1 und F_2 Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der halben grossen Axe sind, und durchschneidet dieselben durch zwei aus F_2 und F_1 beschriebene Kreisbögen, deren Halbmesser auch einzeln gleich der halben grossen Axe der Ellipse sind, so erhält man die beiden Punkte A_1 und A_2, durch welche die kleine Axe der Ellipse, gehen muss. Die auf die hier beschriebene Weise konstruirte Ellipse ist $A_1 B_1 A_2 B_2$, in welcher $A_1 A_2$ die kleine Axe, $C F_2$ oder $C F_1$ die Excentricität, $D_1 D_2$ ein Durchmesser, $F_1 a_1$ ein Radius Vektor und $m_1 m_2$ ein Parameter ist. —

Anmerk. 1. Da die Punkte A_1 und A_2 erhalten wurden, indem man aus F_1 und F_2 Kreisbögen mit der Länge der halben grossen Axe beschrieben hat, so wird einer der Brennpunkte F_1 oder F_2 aus den Längen der beiden Axen erhalten, wenn man von dem Mittelpunkte der grossen Axe aus auf diese eine Senkrechte zieht, und auf letztere vom Mittelpunkte aus auf beiden Seiten die halbe kleine Axe trägt, sodann von den Endpunkten der letzteren aus mit einem Halbmesser, welcher gleich der halben grossen Axe ist, einen Kreisbogen beschreibt, so wird vom letzteren die grosse Axe in zwei Punkten getroffen, welche die gesuchten Brennpunkte der Ellipse sind.

Anmerk. 2. In Fig. 149. ist eine zweite Construktion einer Ellipse gezeigt. Ist nämlich jede der beiden Axen gegeben, so nehme man $B_1 B_2$ gleich der grossen Axe, halbire dieselbe, wodurch man den Punkt C erhält, ziehe von C aus auf $B_1 B_2$ die Gerade $C A_1$ senkrecht, und mache $C A_1 = C A_2$ gleich der halben kleinen Axe. Beschreibt man nun aus C mit $C A_1$ eine Kreislinie und aus demselben Mittelpunkte — der schon Mittelpunkt der Ellipse ist —, mit einem Halbmesser, welcher gleich $C B_1$ ist eine Kreislinie, theilt sodann die letztere in gleiche Theile, z. B. in 24 gleiche Theile, und zieht vom Mittelpunkte C aus nach den einzelnen Theilungspunkten a, b, c, d etc. etc. Gerade, so werden diese auch die erste Kreislinie in ebenso viele gleiche Theile theilen. Zieht man nun von den einzelnen Theilungspunkten m, n, p etc. etc. der kleineren Kreislinie Parallele zur grossen Axe $B_1 B_2$, sodann von den einzelnen Theilpunkten a, b, c etc. etc. der grösseren Kreislinie parallele Gerade zur kleinen Axe, so werden diese letzteren von den durch die entsprechenden Theilpunkten gezogenen ersteren Parallelen in Punkten getroffen, welche der Ellipse angehören, von welcher $B_1 B_2$ und $A_1 A_2$ die Axen sind. So wird die durch m mit $B_1 B_2$ gezogenen Parallele $m a_1$ von der durch a mit $A_1 A_2$ gezogenen Parallelen in a_1, die Parallele $n b_1$ von $b b_1$ in b_1 getroffen, und man erhält also die Punkte a_1, b_1 etc. etc., welche der Ellipse angehören.

Anmerk. 3. Bezeichnet a die halbe grosse Axe, b die halbe kleine Axe einer Ellipse, ist ferner x die Abscisse eines beliebigen und y die Ordinate desselben Punktes der Ellipse, so hat man als Gleichung der Ellipse für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das im Mittelpunkte der Ellipse seinen Anfang hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wodurch man für eine beliebige Abscisse die Ordinate des entsprechenden Punktes, und mithin diesen Punkt selbst leicht bestimmen kann.

§. 210.

Aufgabe 5. Es ist ein Punkt auf der Ellipse angegeben; man soll durch diesen an diese Linie eine Tangente ziehen.

Auflösung. (Fig. 140.) Es sei D ein auf der Ellipse angegebener Punkt, durch welchen eine Tangente an die Ellipse gezogen werden soll, so ziehe man von diesem Punkte aus nach den beiden Brennpunkten die Geraden $D F_1$ und $D F_2$, verlängere $D F_2$ nach d, und halbire den Winkel $d D F_1$, so wird die Halbirungslinie, nämlich $D M$ die für den Punkt D an die Ellipse zu ziehende Tangente sein.

Anmerk. Die im vorhergehenden benützte Construktion geht aus dem Satze hervor, dass die für einen beliebigen Punkt der Ellipse gezogene Normale den Winkel beider Radien Vektoren dieses Punktes halbirt; zieht man daher D G senkrecht auf

DM, so erhält man die Normale DG, welche den Winkel F_1DF_2 halbirt. Es ist mithin auch $\sphericalangle dDM = \sphericalangle MDF_1$, d. h. es muss auch die Tangente des Punktes D den $\sphericalangle dDF_1$ halbiren. —

§. 211.

Aufgabe 6. Von einem ausserhalb einer Ellipse angegebenen Punkte aus an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 141.) Ist T_2 der ausserhalb der Ellipse $A_1B_1A_2B_2$ angegebene Punkt, durch welchen an die Ellipse eine Tangente gezogen werden soll, so beschreibe man von T_2 aus mit einem Halbmesser, der gleich der Entfernung des Punktes T_2 von F_2 ist, einen Kreisbogen EF_2G, beschreibe sodann aus F_1 mit einem Halbmesser, der gleich der grossen Axe ist, einen Kreisbogen EG, ziehe von den Durchschnittspunkten dieser beiden Kreisbögen aus nach dem Brennpunkte F_1 gerade Linien, so werden die Punkte, in welchen diese Geraden die Ellipse schneiden, nämlich die Punkte D und H die Berührungspunkte der zwei Tangenten sein, die man von T_2 aus an die Ellipse ziehen kann. Zieht man daher die Geraden T_2H und T_2D, so werden diese die gesuchten Tangenten sein. —

§. 212.

Aufgabe 7. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 142.) Ist AB eine Gerade, mit welcher eine Tangente parallel an die gegebene Ellipse gezogen werden soll, so ziehe man zwei Sehnen der Ellipse, welche parallel zur Geraden AB sind, man ziehe also $C_1D_1 \neq C_2D_2 \neq AB$, halbire dieselben, und verbinde ihre Halbirungspunkte durch die Gerade N_1N_2, so trifft letztere die Ellipse in zwei Punkten M_1 und M_2, welche die Berührungspunkte von den zwei Tangenten sind, die parallel zur Geraden AB an die Ellipse gezogen werden können. Zieht man daher $M_1E \neq M_2G \neq AB$, so erhält man die zwei Tangenten der Ellipse, die parallel zu AB sind. —

Anmerk. Halbirt man zwei Sehnen der Ellipse, so muss die Gerade, welche die Halbirungspunkte verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, und da also diese Gerade ein Durchmesser der Ellipse ist, so wird man durch Halbirung derselben den Mittelpunkt der Ellipse erhalten. Zieht man nun vom Mittelpunkte aus mit einem halben Durchmesser einen Kreisbogen, so erhält man im Durchschnitte dieses Kreisbogens mit der Ellipse zwei Punkte, deren Verbindungslinie eine auf der grossen Axe senkrechte Sehne ist, und die von der grossen Axe halbirt wird. Halbirt man daher diese Sehne, und zieht von ihrem Halbirungspunkte nach dem Mittelpunkte der Ellipse eine Gerade, verlängert letztere, bis die Ellipse zweimal getroffen wird, so erhält man die grosse Axe der Ellipse. Durch den Mittelpunkt der letzteren auf die grosse Axe eine Senkrechte gezogen, gibt die kleine Axe, wodurch sodann auch die Brennpunkte der Ellipse bestimmt werden können. Hieraus ersieht man also, wie man in einer Ellipse die Axen und Brennpunkte bestimmen kann, wenn bloss die Curve gegeben ist. —

§. 213.

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so fort, dass derselbe während seiner ganzen Bewegung von einer gegebenen Geraden und von einem ausserhalb der letzteren gegebenen Punkte gleiche Entfernung behält, so entsteht eine krumme nicht in sich zurückkehrende Linie, welche man Parabel nennt. Die Gerade, von welcher jede Lage des erzeugenden Punktes dieselbe Entfernung hat, als von einem gegebenen fixen Punkte, wird Leitlinie oder Direktrix, dieser Punkt aber der Brennpunkt der Parabel genannt. Zieht man vom Brennpunkte aus auf die Direktrix eine Senkrechte, so erhält man die Axe der Parabel; die Gerade, welche zwei beliebige Lagen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Sehne genannt, geht diese Sehne durch den Brennpunkt und steht senkrecht auf der Axe der Parabel, so heisst dieselbe Parameter. Der Punkt, in welchem die Axe die Parabel trifft, wird Scheitel der Parabel genannt. Die Entfernung einer Lage des erzeugenden Punktes vom Brennpunkte wird Radius Vektor genannt.

§. 214.

Aufgabe 8. Es ist eine Gerade als Direktrix und ein Punkt als Brennpunkt einer Parabel gegeben; man soll die Parabel konstruiren.

Auflösung. (Fig. 143.) Nach der Erklärung von Parabel hat man alle Lagen eines Punktes aufzusuchen, die derselbe einnimmt, indem er von einem gegebenen Punkte und einer Geraden gleiche Entfernungen behält. Ist nun F der Brennpunkt und L_1L_2 die Direktrix der Parabel, und man zieht die Axe CFD der Parabel, und halbirt CF, so wird der Halbirungspunkt A_1, weil derselbe von F und L_1L_2 gleiche Abstände hat, der Parabel angehören, und zwar ist dieser Punkt ihr Scheitel, so dass zwischen A und C kein Punkt derselben sich mehr befinden wird. Um nun eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes zu erhalten, ziehe man aus einem ganz beliebigen Punkte der Axe eine Parallele mit L_1L_2, z. B. a_1a_2, beschreibe mit ihrer Entfernung von L_1L_2, nämlich mit aC vom Brennpunkte F aus einen Kreisbogen, von welchem diese Gerade a_1a_2 zweimal geschnitten

wird, so werden diese Durchschnittspunkte zwei Lagen des erzeugenden Punktes sein, weil sie von der Direktrix $L_1 L_2$ ebenso weit entfernt sind, als vom Punkte F. Durch genugsame Wiederholung dieses Verfahrens kann man eine beliebige Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes erhalten, so dass man durch stätige Verbindung dieser auf einander folgenden Lagen die Parabel, so weit man auch will, bestimmen kann. Man wird also die Parallelen $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ etc. etc. mit $L_1 L_2$ ziehen, vom Brennpunkte aus eine jede derselben in zwei Punkten durch einen Kreisbogen abschneiden, dessen Halbmesser gleich der Entfernung dieser Parallelen von der Direktrix ist. Man erhält auf diese Weise die Punkte a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 etc. etc., durch welche die Lage der Parabel völlig bestimmt ist, so dass man von letzterer den Theil $k_1 A k_2$ ziehen kann. —

§. 215.

Aufgabe 9. Es ist eine Parabel gegeben und auf derselben ein beliebiger Punkt; man soll durch letzteren an die Parabel eine Tangente ziehen.

Auflösung. (Fig. 143.) Ist B ein auf der Parabel gegebener Punkt, durch welchen eine Tangente derselben gezogen werden soll, so ziehe man vom Punkte B aus nach dem Brennpunkte F die Gerade BF, und von B aus auf die Direktrix $L_1 L_2$ die Senkrechte Bf, halbire den Winkel FBf, so wird die Halbirungslinie TB die gesuchte Tangente sein, welche mit der Parabel den Punkt B gemeinschaftlich hat.

§. 216.

Aufgabe 10. Von einem ausserhalb einer Parabel gegebenen Punkte aus an jene eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 144.) Hier hat man nur den Berührungspunkt der durch den Punkt M gehenden Tangente der Parabel anzugeben, welches dadurch geschieht, dass man von M aus als Mittelpunkt mit dem Halbmesser MF einen Kreisbogen zieht, und den Punkt f bezeichnet, wo letzterer die Direktrix trifft, so wird dieser der Endpunkt der vom gesuchten Berührungspunkte auf $L_1 L_2$ gezogenen Senkrechten sein. Zieht man daher fB senkrecht auf $L_1 L_2$, so wird die Parabel von fB im Punkte B getroffen, welcher der gesuchte Berührungspunkt von der aus M an die Parabel $k_1 A k_2$ zu ziehenden Tangente ist. Zieht man nun von B aus nach M die Gerade BM, so wird diese die gesuchte Tangente sein.

§. 217.

Aufgabe 11. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 145.) Es sei $L_1 L_2$ die Direktrix, F der Brennpunkt der Parabel und $k_1 A k_2$ diese selbst, so ziehe man in der Parabel zwei Sehnen d e und ab, die parallel mit der gegebenen Geraden CG sind, halbire jede derselben, was durch die Punkte n und c geschieht, und ziehe nun die Halbirungslinie cn, so wird diese die Parabel in einem Punkte Q treffen, welcher der Berührungspunkt der mit CG parallelen Tangente ist. Zieht man daher von Q aus eine Gerade QT, parallel CG, so wird diese Gerade die gesuchte Tangente sein. — Zieht man eine Sehne und halbirt dieselbe, zieht sodann durch den Halbirungspunkt eine Parallele mit BD, so trifft diese Parallele die Parabel im Punkte Q, welcher derselbe Brührungspunkt ist, und wodurch also wieder die Tangente wie vorhin bestimmt werden kann. —

Anmerk. 1. Ist p der Parameter einer Parabel, und man legt durch ihren Scheitel ein rechtwinkliges Coordinatensystem, für welches x die Abscisse eines beliebigen und y die Ordinate desselben Punktes bezeichnet, so ist

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel, aus welcher man für die gegebene Länge des Parameters und eine beliebige Abscisse die zugehörige Ordinate sowohl, als den Punkt selbst bestimmen kann.

Anmerk. 2. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass wenn man die Tangente eines beliebigen Punktes der Parabel bis zur Axe verlängert, der erhaltene Durchschnittspunkt vom Scheitel der Parabel ebenso weit entfernt ist, als letztere von der Senkrechten, die man vom Berührungspunkte auf die Axe der Parabel zieht. Ist daher auf der Axe der Parabel ein Punkt angegeben, durch welchen an die Parabel eine Tangente gezogen werden soll, so trage man die Entfernung dieses Punktes vom Scheitel der Parabel auf die Axe derselben ziehe von dem hierdurch erhaltenen Endpunkte aus eine Senkrechte auf die Axe, so schneidet diese letztere die Parabel in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte der Tangenten sind, die man von dem in der Axe angegebenen Punkte aus an die Parabel ziehen kann; jeden dieser Punkte wird man daher mit jenem gegebenen Punkte durch eine Gerade verbinden, so erhält man die zwei gesuchten Tangenten. In Fig. 144. sei m der gegebene Punkt, so mache man $nA = Am$, ziehe nB senkrecht auf CD, verbinde B mit m durch eine Gerade, so erhält man die Tangente der Parabel, welche durch m geht. —

Anmerk. 2. (Fig. 145.) Es ist wieder aus der analytischen Geometrie bekannt, dass wenn man durch den Berührungspunkt der Tangente einer Parabel einen Radius Vektor zieht, dieser gegen die Axe BD unter einem Winkel geneigt ist, welcher das doppelte desjenigen ist,

unter welchem die Tangente gegen diese Axe geneigt ist. Ist daher die Gerade C G gegeben, mit welcher eine Tangente der Parabel parallel gezogen werden soll, so ziehe man Q F so, dass $\angle$ Q F B das doppelte desjenigen ist, welchen C G mit der verlängerten D B macht, so wird man den Punkt Q erhalten, welcher der Berührungspunkt der mit C G parallel gezogenen Tangente der Parabel ist. Zieht man $QT_2 \nparallel CG$, so erhält man die gesuchte Tangente.

§. 218.

Bewegt sich ein Punkt so, dass der Unterschied seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten gleich einer bestimmten Geraden ist, so entsteht eine Curve, welche zwei ganz von einer getrennte Theile oder Aeste hat, und die man Hyperbel nennt. Die beiden gegebenen fixen Punkte, von welchen der Unterschied der Entfernungen von irgend einer Lage des erzeugenden Punktes unveränderlich ist, werden die Brennpunkte der Hyperbel genannt, dieser unveränderliche Unterschied der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten ist die reelle Axe jener Curve; jede Gerade, welche einen Punkt der Hyperbel mit einem ihrer Punkte verbindet, wird Radius Vektor genannt. Die Punkte, welche die Hyperbel mit der geraden Verbindungslinie ihrer beiden Brennpunkte gemein hat, werden die Scheitel derselben genannt. Iede Gerade, welche zwei beliebige Lagen des erzeugenden Punktes verbindet, nennt man Sehne der Hyperbel. —

§. 219.

Aufgabe 12. Es ist die reele Axe einer Hyperbel gegeben, und ferner sind ihre Brennpunkte bekannt; man soll die Hyperbel konstruiren.

Auflösung. (Fig. 146.) Es sei $B_1 B_2$ die Axe, F_1 der eine, F_2 der andere Brennpunkt der Hyperbel, so verfahre man bei der Construktion derselben analog, wie bei der Zeichnung der im vorigen angegebenen Curven; indem man nämlich eine solche Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes angibt, dass man im Stande ist, durch stätige Verbindung derselben die Curve angeben zu können. Man verfährt nämlich auf folgende Weise: Aus F_1 beschreibt man mit einem Halbmesser, der gleich $B_1 m_1$ ist, einen Kreisbogen, und durchschneidet diesen mit einem aus F_2 beschriebenen, dessen Halbmesser $B_2 m_1$ ist, so erhält man die Punkte $'a_1$ und a'_2, für welche die Bedingung statt findet, dass

$$F_1 a_2 - F_2 a'_2 = F_1 a'_1 - F_2 a'_1 = B_1 B_2 \text{ ist.}$$

Vermittelst derselben Graden $B_1 m_1$ und $B_2 m_1$ kann man auch die Punkte a_1 und a_2 bestimmen, wenn man vermittelst der ersteren aus F_2 und mit einem Halbmesser, der gleich der letzteren ist, aus F_1 einen Kreisbogen beschreibt, so werden die Durchschnittspunkte dieser beiden Kreisbögen jene zwei Punkte sein. Nun kann man auf dieselbe Weise das Verfahren fortsetzen, bis man eine gehörige Anzahl von Punkten erhält, durch welche man die Curve selbst ziehen kann. Man erhält hierdurch eine Curve, die aus zwei ganz von einander getrennten Theilen oder Aesten besteht, von welchen jeder symetrisch zur reellen Axe ist, d. h. die letztere theilt jeden Ast in zwei solche Theile, von welchem ein Punkt des ersten dieselbe Entfernung von dieser Axe hat, als ein Punkt des zweiten Theiles. Der Mittelpunkt der reellen Axe heisst Mittelpunkt der Hyperbel, und zieht man durch diesen eine Gerade senkrecht auf die reele Axe, ferner parallel mit dieser mehrere Gerade, so schneidet jede dieser Parallelen die Hyperbel in zwei Punkte, die gleiche Entfernungen von der durch den Mittelpunkt auf die reele Axe gezogenen Senkrechten haben. Hieraus ersieht man also, dass die Hyperbel zu ihrer reellen Axe sowohl, als auch zu der durch den Mittelpunkt auf diese Axe gezogenen Senkrechten symetrisch ist.

Anmerk. 1. Die Hyperbel hat in ihren Eigenschaften sehr Vieles mit der Ellipse gemein, und man kann letztere als eine in sich zurückkehrende Hyperbel erklären. Man spricht daher auch bei der Hyperbel von einer kleinen oder zweiten Axe, und da diese keine Punkte der Hyperbel mehr enthält, so nennt man dieselbe immaginäre oder eingebildete Axe. (Fig. 146.) Soll man die immaginäre Axe konstruiren, so ziehe man aus dem Mittelpunkte C der Hyperbel eine Gerade senkrecht auf die reelle Axe, und durchschneide diese mit einem Kreisbogen, den man aus B_2 oder B_1 mit einem Halbmesser beschreibt, welcher gleich $F_1 C$ oder $F_2 C$ ist; man erhält auf diese Weise die Punkte A_1 und A_2 auf dieser Senkrechten, und es ist $A_1 A_2$ die immaginäre Axe. — Zwei Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen, in dieser gleiche Winkel gegen die reelle oder gegen die immaginäre Axe machen, und den Zweigen der Hyperbel immer näher zu kommen suchen, ohne sie zu treffen, werden die Asymptoten der Hyperbel genannt. Man definirt dieselben auch als zwei Tangenten, die durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen, und ihre Berührungspunkte in unendlicher Entfernung haben. Die Asymptoten werden erhalten, indem man aus den Scheiteln zwei Gerade senkrecht auf die reelle Axe errichtet, diese von einer durch einen Endpunkt der immaginären Axe mit der reelen Axe gezogenen Parallelen durchschneidet, und die erhaltenen Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte durch Gerade verbindet. —

Anmerk. 2. Bezeichnet a die halbe reelle und b die halbe immaginäre Axe, nimmt man ferner die erstere als Abscissenaxe und die letztere als Ordinatenaxe an, und bezeich-

net den Abstand einer beliebigen Lage des erzeugenden Punktes der Hyperbel von der Abscissenaxe durch x und von der Ordinatenaxe durch y so ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Hyperbel, aus welcher man vermittelst der Abscisse eines beliebigen Punktes seine Ordinate und den Punkt selbst bestimmen kann.

§. 220.

Aufgabe 12. Durch einen auf der Hyperbel angegebenen Punkt eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 146.) Soll durch den Punkt B an die Hyperbel eine Tangente gezogen werden, so ziehe man die Radien Vektoren dieses Punktes, nämlich BF_1 und BF_2, halbire den Winkel $F_1 B F_2$ der Radien Vektoren dieses Punktes, so wird die Halbirungslinie die gesuchte Tangente sein; es ist also B G die für den Punkt B gesuchte Tangente der Hyperbel.

§. 221.

Aufgabe 13. Durch einen ausserhalb der Hyperbel angebenen Punkt an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 147.) Ist M ein ausserhalb der Hyperbel angegebener Punkt, so kann man durch denselben zwei Tangenten an diese Curve ziehen. Um nun eine derselben zu erhalten, beschreibe man von M aus mit einem Halbmesser, der gleich der Entfernung des Punktes M vom einen Brennpunkte F_1 ist, einen Kreisbogen, so wird dieser den ersteren schneiden. Zieht man von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte nach dem zweiten Brennpunkte die Gerade DF_2, so schneidet diese die Hyperbel in einem Punkte B_1, welcher der Berührungspunkt der von M an die Hyperbel zu legenden Tangente ist, so dass also durch die Gerade MB_1 die letztere bestimmt ist. —

§. 222.

Aufgabe 14. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Hyperbel Tangenten zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 148.) Es sei FS_1G der eine, DB_2E der andere Zweig der Hyperbel, ferner sei L_1L_2 eine Gerade, mit welcher an die Hyperbel Tangenten gezogen werden sollen. Es sind deren zwei möglich, und um dieselben zu erhalten, ziehe man zwei unter sich parallele Sehnen DE und FG, halbire jede derselben, so wird der Mittelpunkt der ersteren in H, der der letzteren in K sein. Zieht man nun die Gerade HK, so wird diese die Hyperbel in den zwei Punkten B_2 und B_1 treffen, welche die Berührungspunkte der gesuchten zwei Tangenten sind, und legt man daher $B_1T_1 \neq B_2T_2 \neq L_1L_2$, so werden die Geraden B_1T_1 und B_2T_2 die gesuchten Tangenten sein.

Anmerk. In ihren Constructionen sowohl, als auch in den übrigen für diese drei Curven abgehandelten Aufgaben haben dieselben manche gemeinschaftliche Eigenschaften, und man kann dieselben auch durch eine einzige Gleichung analytisch ausdrücken. Ist nämlich ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben, in dessen Abscissenaxe ein Punkt liegt, von welchem die Abscisse x_1 gegeben ist, und es soll sich ein Punkt so bewegen, dass der Quotient seiner Entfernungen vom gegebenen Punkte und von der Abscissenaxe unveränderlich und gleich der gegebenen Grösse $\frac{m}{n}$ ist, so wird für diesen Punkt, wenn seine Coordinaten mit x und y bezeichnet werden, folgende Gleichung statt finden:

$$(n^2 - m^2)\, x^2 - 2\, n^2 x_1 x + n^2 y^2 + n^2 x_1^2 = 0$$

wodurch man eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes, als auch die Curve, die er bei seiner Bewegung beschreibt, finden kann. Wird nun $n = m$, so erhalten wir die Parabel, wird $n > m$, so erhalten wir die Hyperbel, und bei $n < m$ erhalten wir die Ellipse. Man nennt diese drei Curven die Kegelschnittslinien, weil man die erstere erhält, wenn man einen senkrechten Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, die parallel zur Seite des Kegels ist, die zweite, wenn man jenen Kegel durch eine Ebene schneidet, die mit der Basis des Kegels einen grössern Winkel bildet, als der ist, welchen seine Seite mit der Basis macht, und endlich die dritte, wenn man einen senkrechten Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, welche mit der Basis des Kegels einen kleineren Winkel bildet, als der ist, den die Seite desselben mit seiner Basis macht. Jede dieser Curven werden wir später nochmals erwähnen. —

Zweites Kapitel.

Ueber Curven überhaupt.

§. 223.

Bewegt sich ein Punkt so, dass nicht alle Lagen desselben in einerlei Ebene liegen, so erhält man eine mehrfach gekrümmte Curve.

Ist nun eine solche Curve im Raume angegeben, und man nimmt auf derselben viele Lagen des erzeugenden Punktes neben einander an, so

wird hierdurch die Curve in sehr viele Theile oder Elemente getheilt, von welchen jedes solche Element als geradlinig betrachtet werden kann. Die Verlängerung eines solchen Elementes wird **Tangente** der Curve genannt. Da zwei auf einander folgende Elemente sich treffen, so wird diess auch mit zwei unmittelbar auf einander folgenden (konsekutiven) Tangenten der Fall sein, mithin liegen zwei konsekutive Tangenten in einer Ebene. Man nennt die Ebene zweier konsekutiven Tangenten **Krümmungsebene** (Oskulationsebene), und den Kreis, der in dieser Ebene sich befindet und durch die drei Endpunkte derjenigen zwei konsekutiven Elementen gelegt werden kann, deren Verlängerungen jene Tangenten sind, nennt man den **Krümmungskreis** der Curve für diese Elemente. Der Halbmesser dieses Kreises wird **Krümmungshalbmesser** der Curve genannt. — Der Winkel, welchen zwei konsekutive Tangenten bilden, wird **Gontingenzwinkel** der Curve für den Punkt genannt, welcher der Scheitel jenes Winkels ist, und dieser Winkel dient dazu, um die Krümmung einer Curve in einem beliebigen Punkte zu messen. Eine nicht in einer Ebene liegende Curve hat ausser den Krümmungen noch eine **Windung, und diese wird gemessen durch den Winkel zweier auf einander folgenden Krümmungsebenen.** Eine solche mehrfach gekrümmte Curve kann man ganz und gar in eine einzige Ebene legen, indem man nach und nach alle konsekutiven Krümmungsebenen derselben in eine einzige Ebene bringt. Auf die umgekehrte Weise kann man eine ebene Curve in eine mehrfach gekrümmte rerwandeln. Legt man durch einen beliebigen Punkt einer Curve eine Tangente, so wird diese auch die einzige sein, welche man durch diesen Punkt für die Curve ziehen kann, und durch diesen Punkt auf jene Tangente eine senkrechte Ebene gelegt, so wird diese (§. 22.) der Ort aller Senkrechten sein, welche man auf die Tangente von jenem Punkte aus ziehen kann. Diese Ebene wird **Normalebene** der Curve genannt. —

§. 224.

Ist nun im Raume eine Curve gegeben, und man soll dieselbe projiciren, so theile man diese in gleiche oder ungleiche Elemente, projicire jedes dieser Elemente (nach §. 71.), so werden die Projektionen der einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes auf den entsprechenden Projektionen der Elemente der Curve (§. 72.), folglich auch auf den entsprechenden Projektionen der Curve sich befinden. Soll z. B. die Curve horizontal projicirt werden, so kann man sich den Umfang des Polygones, welches aus den Elementen der Curve gebildet wird, als Direktrix eines Prisma annehmen, dessen Erzeugende senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird die horizontale Spur dieses Prisma (§. 72.) die Projektionen aller auf seiner Oberfläche sich befindenden Punkte enthalten, folglich auch die horizontale Projektion der einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes der Curve, und es ist mithin diese horizontale Spur auch nahezu gleich der horizontalen Projektion der Curve im Raume. Ebenso kann man sich den aus den Elementen der Curve gebildeten Polygonumfang als Direktrix eines zweiten Prisma denken, dessen Erzeugende senkrecht auf der vertikalen Tafel steht. Construirt man nun dieses Prisma, so wird seine vertikale Spur auch der Ort der vertikalen Projektion aller Elemente der Curve, und mithin auch der Ort der vertikalen Projektionen aller einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes sein; daher ist also die vertikale Projektion der Curve auch in der vertikalen Projektion der Spur jenes Prisma. Hieraus folgt nun zunächst:

1. **Ist ein Punkt auf einer Curve, also auf einer beliebigen Linie im Raume angegeben, so müssen seine Projektionen auch auf den entsprechenden Projektionen der Curve enthalten sein.**

2. **Die Projektionen einer Curve werden erhalten, wenn man dieselbe in ihre Elemente theilt, und das durch diese Elemente gebildete Polygon als Direktrix zweier Prismen betrachtet, von welchen die Generatrix des einen senkrecht auf der horizontalen, die des andern senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, von diesen beiden Prismen ihre Spuren sucht, so werden diese die Projektionen der im Raume gegebenen Curve sein.**

3. **Ist die horizontale Projektion sowohl, als auch die vertikale Projektion einer Curve angegeben, so kann man man sich die Curve im Raume vorstellen, indem man die horizontale Projektion der Curve als Direktrix eines Prisma annimmt, dessen Generatrix senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, sodann die gegebene vertikale Projektion der Curve als Direktrix eines zweiten Prisma an-**

nimmt, dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, die Durchschnittscurve dieser beiden Prismen aufsucht, so wird diese Durchschnittslinie die Curve im Raume sein, deren Projektionen gegeben und die Direktricen beider Prismen sind.

4. Ist eine, z. B. die horizontale Projektion eines auf der Curve sich befindenden Punktes gegeben, so erhält man seine vertikale Projektion, wenn man von der gegebenen horizontalen Projektion aus auf die Axe X eine Senkrechte zieht, und diese verlängert, bis die vertikale Projektion der Curve von ihr getroffen wird. Dieser Durchschnittspunkt wird die vertikale Projektion jenes Punktes sein, dessen horizontale Projektion gegeben ist, und der sich auf der gegebenen Curve befindet.

Anmerk. Soll man aus den Projektionen einer Curve ihre Spuren bestimmen, so muss, damit man diese Aufgabe lösen kann, jede der Projektionen bis zu ihren Durchschnitten mit der Axe X gegeben sein, ferner muss die vom Durchschnitte der vertikalen Projektion der Curve mit der Axe auf letztere in der horizontalen Tafel gezogene Senkrechte die horizontale Projektion der Curve und die vom Durchschnittspunkte dieser Projektion mit der Axe auf letztere in der vertikalen Tafel gezogene Senkrechte die vertikale Projektion der Curve noch treffen. Ist diess der Fall, so erhält man zugleich in den Durchschnitten dieser Senkrechten mit der entsprechenden Projektion der Curve die Spuren der letzteren. —

§. 225.

Aufgabe 15. Es sei die vertikale und die horizontale Projektion einer Curve gegeben; man soll ihre zweit-vertikale Projektion angeben.

Auflösung. Man nehme auf der einen, z. B. auf der horizontalen Projektion der Curve viele nahe an einander liegende Punkte an, so dass man jeden zwischen zweien dieser Punkte enthaltenen Theil der horizontalen Projektion der Curve als ein Element der letzteren betrachten kann, und bestimme (nach §. 224., 4.) die vertikalen Projektionen dieser einzelnen Punkte, indem man von ihren horizontalen Projektionen aus Senkrechte auf die Axe X zieht, und diese Senkrechten bis zu ihren Durchschnitten mit der vertikalen Projektion der Curve verlängert, in welchen die vertikalen Projektionen jener Punkte sein werden. Von jedem dieser Punkte bestimme man die zweit-vertikale Projektion (nach §. 67.), verbinde diese einzelnen zweit-vertikalen Projektionen durch Gerade in gehöriger Ordnung, so erhält man eine Linie, die der zweit-vertikalen Projektion der Curve sehr nahe kömmt, und daher als die letztere betrachtet werden kann. —

Beispiel. (Fig. 150.) Es sei abcd die horizontale und $a'b'c'd'$ die vertikale Projektion einer Curve, von welcher die zweit-vertikale Projektion bestimmt werden soll, so nehme man die Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') an, so werden diese (nach §. 224., 1.) die Projektionen von Punkten sein, die sich auf der Curve selbst befinden. Zieht man nun die Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ senkrecht auf Z, sodann die Geraden am, bn, cp, dq senkrecht auf Y, beschreibt aus O mit den Halbmessern Om, On, Op und Oq Kreisbögen, so werden die Durchschnittspunkte der letzteren mit der in der vertikalen Tafel liegenden Axe Y, die Punkte m_1, n_1, p_1 und q_1 geben, von welchen man auf die Axe Y die Senkrechten m_1a'', n_1b'', p_1c'' und q_1d'' errichten muss, um die zweit-vertikalen Projektionen der angegebenen Punkte (a'_1a'), (b'_1b') etc. etc. zu erhalten, und es werden sodann die Durchschschnittspunkte jener Senkrechten mit den auf Z senkrecht gezogenen Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ die Punkte a'', b'', c'' und d'' geben, welche (§. 67.) die zweit-vertikalen Projektionen jener Punkte sein werden, deren horizontale und vertikale Projektion die angegebenen sind. Zieht man nun die Geraden $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, so erhält man die Linie $a''b''c''d''$, welche der zweit-vertikalen Projektion der durch ihre vertikale und horizontale Projektion angegebenen Curve sehr nahe kömmt, und daher auch als solche betrachtet werden kann. —

§. 226.

Aufgabe 16. Die eine Projektion einer ebenen Curve ist gegeben und die Ebene dieser Curve, man soll die andern Projektionen dieser Curve bestimmen.

Auflösung. Ist z. B. die horizontale Projektion der Curve gegeben, so theile man dieselbe in Elemente, bestimme die vertikalen und zweit-vertikalen Projektionen derjenigen Geraden, deren horizontale Projektion diese Elemente sind (nach §. 107. und §. 108.) so werden die Linien, die aus den vertikalen und zweit-vertikalen Projektionen

dieser Geraden zusammengesetzt sind, sich von der vertikalen und zweit-vertikalen Projektion der gesuchten Curve um sehr wenig unterscheiden, und es können mithin die gesuchten Projektionen, die aus sehr kleinen Geraden zusammengesetzt sind, als die Projektionen der Curve betrachtet werden. —

Beispiel. (Fig. 151.) Es sei ESE' eine Ebene, in welcher sich eine Curve befindet, deren horizontale Projektion die Linie abcde ist, man soll die vertikale Projektion dieser Curve angeben. Zieht man die Geraden $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$, $d d_1$ etc. etc. parallel mit X, von den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit E, nämlich von den Punkten a_1, b_1, c_1 etc. etc. aus ziehe man auf X die Geraden $a_1 a'_1$, $b_1 b'_1$, $c_1 c'_1$ etc. etc. senkrecht, sodann durch die Punkte a'_1, b'_1, c'_1 etc. etc. mit E' ziehe man die Parallelen $a'_1 a'$, $b_1 b'$, $c'_1 c'$ etc. etc., so werden diese einzeln von den durch a, b, c etc. etc. auf X gezogenen Senkrechten in den Punkten a', b', c' etc. etc. durchschnitten, welche (§. 107.) die vertikalen Projektionen jener Punkte sind, deren horizontale Projektionen a, b, c, d etc. etc. angegeben waren. Verbindet man nun die Punkte a', b', c' etc. etc. in gehöriger Ordnung, so erhält man die gesuchte vertikale Projektion a'b'c' etc. etc. der Curve. —

§. 227.

Aufgabe 17. Es ist eine ebene Curve durch ihre Projektionen angegeben und eine Ebene durch ihre Spuren; man soll untersuchen, ob diese Ebene von jener Linie getroffen wird, und diese Durchschnittspunkte angeben.

Auflösung. Da die gegebene Curve eine ebene sein soll, und durch drei Punkte (§. 9.) die Lage einer Ebene völlig bestimmt ist, so wird eine Ebene, die man durch drei beliebig auf der gegebenen Curve angenommene Punkte legen kann, die Ebene dieser Linie sein. Bestimmt man nun den Durchschnitt der letzteren mit der gegebenen Ebene, so werden in diesem Durchschnitte auch die Punkte enthalten sein müssen, welche die gegebene Curve mit der angegebenen Ebene gemeinschaftlich hat. Schneidet daher der Durchschnitt der Hülfsebene und der gegebenen Ebene die angegebene Curve, so trifft auch letztere die gegebene Ebene, und jene Punkte, nach welchen die Curve von jenem Durchschnitte getroffen werden, sind auch die Durchschnittspunkte der Curve mit der angegebenen Ebene; wird aber die Curve von dem Durchschnitte der gegebenen und der Hülfsebene nicht mehr getroffen, so schneidet auch die Curve die gegebene Ebene nicht. Um daher für den Fall, in welchem die gegebene Ebene von der Curve getroffen wird, jenen Durchschnitt zu finden, wird man auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man (§. 223., 4.) die Projektionen dreier Punkte auf der Curve an.
2. Lege man durch diese drei Punkte (§. 105.) eine Ebene, und suche die Spuren derselben.
3. Gebe man den Durchschnitt dieser Ebene und der gegebenen (nach §. 110.) an, so werden die Projektionen dieser Communsektion die entsprechenden Projektionen der Curve schneiden, und hierdurch erhält man die Projektionen derjenigen Punkte, welche die gesuchten Durchschnitte der Curve und der gegebenen Ebene sind.

Anmerk. 1. Hat man die Projektionen einer Curve, deren Construktion bekannt ist, z. B. die Projektionen eines Kreises, so lege man die Hülfsebene um eine ihrer Spuren in die entsprechende Tafel, und konstruire in dieser (§. 130.) den Kreis sowohl, als auch den Durchschnitt beider Ebenen, so erhält man sogleich die gesuchten Punkte, nach welchen die Curve die gegebene Ebene trifft. Von diesen Punkten wird man sodann (§. 132.) die Projektionen bestimmen.

Anmerk. 2. Ist eine Curve durch ihre Projektionen gegeben, und man soll vorher untersuchen, ob dieselbe eben oder mehrfach gekrümmt ist; so nehme man auf derselben (nach §. 224., 4.) drei beliebige Punkte durch ihre Projektionen an, lege durch diese drei Punkte (nach §. 105.) eine Ebene: fällt nun die Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach in diese Ebene, so ist sie auch eben, ist diess aber nicht der Fall, so ist dieselbe mehrfach gekrümmt. —

§. 228.

Beispiel. (Fig. 152.) Es sei a'b'c'd'e' die vertikale und abcde die horizontale Projektion einer Kreislinie, (m, m') seien die Projektionen ihres Mittelpunktes; man soll die Durchschnittspunkte dieser Kreislinie durch die Ebene ESE' angeben. Es wurde hier die Ebene HNV zuerst angenommen, diese um ihre horizontale Spur H gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt, und in dieser umgelegten Ebene der Kreis ABCDEFG konstruirt, sodann die Ebene HNV wieder um H, gedreht, und in ihre erste Lage gebracht und jede der Projektionen des Kreises bestimmt. Um nun den Durchschnitt des letzteren mit der Ebene ES'E anzugeben, bestimme man den Durchschnitt der Ebene HNV mit der Ebene ES'E, indem man $s'_2 s_2$ und $s_1 s'_1$ senkrecht auf X, die Geraden $s_1 s_2$ und

$s'_1 s'_2$ zieht, so wird erstere die horizontale und letztere die vertikale Projektion der gesuchten Communsektion sein. Zieht man nun $s_2 p$ senkrecht auf H, konstruirt das rechtwinklige Dreieck $s_2 p q$, und macht $p s_3 = p q$, so wird s_3 der Ort des Punktes (s_2, s'_2) in der umgelegten Ebene HNV sein. Zieht man nun $s_1 s_3$, so ist diese (§. 130. und §. 131.) die Gerade, deren Projektionen $s'_1 s'_2$, $s_1 s_2$ sind, und die sich auf der Ebene HNV befindet. Diese Gerade schneidet aber die Kreislinie ABCDE in den Punkten x_1 und y_1; bestimmt man daher die Projektionen derselben (nach §. 132.), so werden die Punkte (x, x′) und (y, y′) die gesuchten sein, und die Gerade (xy, x′y′) wird den Durchschnitt der Ebene ES′E mit dem Kreise (abcdefg, a′b′c′d′e′f′g′) angeben. —

Anmerk. Da man die Eigenschaften und Construktionen doppelt gekrümmter Curven leichter durch die Eigenschaften jener Flächen, auf welchen sie sich befinden oder deren Durchschnitte sie sind, angeben kann, als wenn man jene Flächen unberücksichtigt lässt, so soll die Construktion einiger doppelt gekrümmter und einiger ebener Curven noch später folgen.

Zweite Abtheilung.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen. Tangirung und Durchschnitte derselben durch Ebenen und Entwickelung derselben.

Drittes Kapitel.

Von der Erzeugung der entwickelbaren Flächen.

§. 229.

Bewegt sich irgend eine Linie nach einem bestimmten Gesetze, und beobachtet während ihrer Bewegung noch ein anderes angegebenes Gesetz, so entsteht ein Raum, den man im Allgemeinen mit dem Namen Fläche bezeichnet. Die Linie, welche die Fläche erzeugt, wird ihre Erzeugende oder Generatrix genannt, und es ist mithin eine Fläche der geometrische Ort aller Lagen ihrer Generatrix. Zur Erzeugung einer Fläche ist nun, wie schon erwähnt, die Angabe eines Gesetzes nothwendig, welches die Bewegung der Generatrix leitet, und ausserdem ist noch ein zweites Gesetz anzugeben nothwendig, welches angibt, ob und wie die Generatrix bei ihrer Bewegung ihre Lagen zu ändern hat. Das erste Gesetz ist immer durch eine oder mehrere Linien oder durch eine oder mehrere Flächen gegeben, an welcher sich die Generatrix fortzubewegen hat, oder welche die letzteren stets in allen ihren Lagen trifft, und das letztere ist auch entweder durch eine geometrische Grösse oder durch eine sonstige Bedingung bestimmt. Man nennt das Gesetz, also die Linie (Fläche), welche die Bewegung der Generatrix bei der Erzeugung der Fläche leitet, die Direktrix (Richtungslinie oder Richtungsfläche) der Fläche.

§. 230.

Aus den im vorigen Paragraphe gegebenen Erklärungen geht sogleich hervor, wie man eine Fläche darstellen kann. Es ist nämlich zur Bestimmung einer Fläche ihre Generatrix sowohl, als auch ihre Direktrix nothwendig; wenn wir daher die Projektionen der letzteren sowohl, als auch eine beliebige Anzahl von Lagen der ersteren durch ihre Projektionen angeben, so wird die Fläche selbst leicht vorzustellen sein. Um daher eine Fläche darzustellen, geben wir eine solche Anzahl von Lagen ihrer Generatrix an, als wir zur Grösse der Ausdehnung der Fläche nothwendig haben, und bestimmen zugleich die Direktrix und diejenigen einzelnen Punkte derselben, in welchen sie von der Generatrix getroffen wird.

§. 231.

Da die Erzeugende irgend einer Fläche noch eine jede Linie sein kann, so wird man nach der Beschaffenheit der Erzeugenden die Flächen sogleich eintheilen können. Alle Flächen, deren Erzeugende Gerade sind, werden geradlinig erzeugte, alle Fläche hingegen, die von krummen Linien erzeugt werden, werden krummlinig erzeugte Flächen genannt. Zwischen je zwei auf einander folgenden Lagen der Erzeugenden liegt ein Theil der Fläche, den man Element der Fläche oder Flächenelement nennt. Auf dem Flächenelemente einer jeden Fläche kann man einen solchen kleinen Theil annehmen, der eben ist, und die Verlängerung eines solchen ebenen Theiles eines Flächenelementes wird Tangentialebene der Fläche genannt. Einen beliebigen auf dem ebenen Theile eines Flächenelementes angenommenen Punkt nennt man den Berührungspunkt der Tangentialebene. Wir werden später Flächen kennen lernen, bei welchen jedes Flächenelement eben ist oder in einer Ebene liegt. — Legt man nun durch den Berührungspunkt eine beliebige Ebene, so schneidet diese die Tangentialebene nach einer Geraden, welche als Tangente einer durch denselben Punkt gehenden, und auf der Fläche liegenden Curve, die der Durchschnitt einer beliebigen Ebene und der Fläche ist, betrachtet werden kann. Eben so wird aber auch der Durchschnitt einer jeden durch den Berührungspunkt gelegten Ebene als Tangente einer Curve betrachtet werden können, die sich auf der Ebene und Fläche zugleich befindet; es enthält also die Tangentialebene einer solchen alle Tangenten der durch

den Berührungspunkt gehenden Curven, die sich auf der Fläche befinden.

§. 232.

Nehmen wir eine ganz beliebige Curve, die doppelt gekrümmt sein soll, an, theilen diese in Elemente, und verlängern jedes Element derselben, so erhalten wir ebenso viele Tangenten, als wir Elemente haben, und von welchen je zwei auf einander folgende in einer Ebene liegen, weil sie sich schneiden. Legen wir nun durch je zwei auf einander folgende Tangenten eine Ebene, so können wir den geometrischen Ort aller dieser Tangenten als eine Fläche betrachten, von welchen jene einzelne Ebenen die Flächenelemente sind. Diese Fläche können wir daher auch dadurch erzeugt denken, dass sich an jener doppelt gekrümmten Linie eine Gerade stets tangirend fortbewegt, und es ist mithin die hier erzeugte Fläche eine geradlinig erzeugte. Dieselbe hat aber auch noch besondere Eigenschaften, die nur einer bestimmten Gruppe der geradlinig erzeugten Flächen zukommen, und diese Eigenschaften zu erörtern sei unsere weitere Aufgabe. Iedes Flächenelement ist vor Allem eben, und da auch jedes von zwei auf einander folgenden Tangenten gebildet wird, so werden zwei auf einander folgende Flächenelemente eine solche Tangente gemeinschaftlich haben. Dreht man nun das erste Flächenelement um seine Communsektion mit dem nächstfolgenden, bis es in die Ebene des letzteren fällt, so ist dadurch an dem ersten Flächenelemente nichts geändert worden, als seine Lage und eben dasselbe ist mit dem ersten Elemente der Direktrix geschehen. Ebenso kann man die Ebene, in welcher die ersten zwei auf einander folgenden Elemente liegen um die Communsektion des zweiten und dritten Elementes drehen, bis die drei ersten unmittelbar auf einander folgenden Flächenelemente in die Ebene des dritten zu liegen kommen, und es wird hierdurch von jedem dieser beiden ersten Elemente bloss die Lage verändert. Setzt man dieses Verfahren auf die hier angezeigte Weise fort, indem man die ersten drei konsekutiven Elemente in die Ebene des vierten, sodann die ersten vier in die Ebene des fünften bringt, etc. etc., so kann man sich die ganze Fläche in einer Ebene ausbreiten, ohne dass sich ein Element derselben ändert. Diese Fläche wird der hier entwickelten Eigenschaft halber, vermittelst welcher sie sich auf einer Ebene ausbreiten lässt, ohne dass sich weder die Ausdehnungen ihrer einzelnen Elemente ändern, noch die Elemente irgend einer auf derselben befindlichen Linie sich ändern, oder ohne dass sich die Fläche faltet, entwickelbare Fläche genannt.

§. 233.

Man ersieht aus dem, was im vorigen Paragraphe erwähnt wurde, dass die Fläche, welche dort erklärt wurde die besondere Eigenschaft hat, dass je zwei konsekutive Lagen ihrer Generatrix in einer und derselben Ebene liegen, und deshalb war es auch möglich, dieselbe auf einer Ebene auszubreiten, ohne dass ein Element derselben oder ein Element einer auf ihr sich befindenden Linie eine andere Ausdehnung erhielt; ferner ist ersichtlich, dass jedes Flächenelement dieser Fläche eben ist. Nehmen wir nun diese Eigenschaften zusammen, so können wir folgende Sätze ableiten:

1. Soll eine Fläche entwickelbar sein, so müssen je zwei auf einander folgende Lagen derselben in einer Ebene liegen, oder dieselbe muss lauter ebene Flächenelemente haben. Wenn also eine Fläche zu den entwickelbaren gehören soll, so muss von derselben nachgewiesen werden können, dass sie die hier ausgesprochene Bedingung erfüllt.
2. Jede Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche hat mit letzterer nicht bloss einen Berührungspunkt, sondern ein ganzes Flächenelement gemein. Da aber ein Flächenelement mit einer seiner Generatricen, zwischen welchen es liegt, vertauscht werden kann, so kann man auch sagen: eine Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche hat mit letzterer die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix gemeinschaftlich.

Anmerk. Wir werden später zeigen, dass manche entwickelbare Flächen es gibt, deren Generatrix man zur Direktrix und deren Direktrix man zur Generatrix machen und dadurch dieselbe Fläche erzeugen, oder dass man Generatricen mit Direktricen vertauschen kann. Hierdurch wird sodann auch gezeigt sein, dass es krummlinig erzeugte Flächen gibt, die abwickelbar sind.

§. 234.

Nimmt man eine beliebige Curve als Direktrix an, und lässt eine Gerade als Generatrix stätig und zwar so fortbewegen, dass dieselbe in allen ihren Lagen parallel zu ihrer ersten Lage bleibt, so wird der geometrische Ort, welchen die

Generatrix nach diesen Gesetzen erzeugt, eine entwickelbare Fläche sein, weil (nach 1. des vor. §.) zur Entwickelbarkeit einer Fläche bloss nothwendig ist, dass je zwei konsekutive Lagen ihrer Erzeugenden in einer Ebene liegen. Die hier erzeugte Fläche ist der Cylinder. Begränzt man einen Cylinder durch zwei parallele Ebenen, und betrachtet bloss diesen begränzten Theil desselben, so werden die Durchschnitte der zwei parallelen Ebenen mit dem Cylinder seine Grundflächen und die einzelnen Lagen seiner Erzeugenden die Seiten desselben genannt. Stehen die einzelnen Seiten eines Cylinders senkrecht auf den Ebenen seiner Grundfläche, so wird derselbe ein senkrechter, machen seine einzelnen Seiten spitze oder stumpfe Winkel mit den Ebenen der Grundflächen, so wird der Cylinder ein schiefer genannt. Diejenige Gerade, welche senkrecht auf den Ebenen beider Grundflächen steht, wird Höhe des Cylinders genannt. Bei einem senkrechten Cylinder ist daher jede Seite gleich der Höhe. — Der zwischen beiden Grundflächen enthaltene Theil der Fläche wird Mantel oder Aussenfläche des Cylinders genannt.

§. 235.

Aus dem vorigen §. ersehen wir, dass eine cylindrische Fläche schon dargestellt werden kann, wenn nur die Projektionen ihrer Direktrix und die von der Richtung der Generatrix bekannt sind. Legt man nun parallel zur Generatrix (nach §. 51.) eine Ebene, so wird von dieser die Cylinderfläche nach einer Linie geschnitten, die zu den ebenen Curven gehört. Diese Ebene wird aber erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punkt eine Gerade parallel zur Richtung der Generatrix legt, und durch diese sodann die Ebene zieht; folglich enthält diese Ebene auch parallele Gerade zur Generatrix, und wenn man mithin durch einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Cylinderfläche eine Parallele zur Generatrix zieht, so muss diese ganz und gar in die Tangentialebene fallen. Es ist also der Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene, die parallel ist zur Richtung der Generatrix, eine Lage oder zwei Lagen der geradlinigen Erzeugenden.

§. 236.

Legt man eine Ebene parallel zur Direktrix und ist diese eine in sich zurückkehrende Curve, und beschreibt man in dem erhaltenen Durchschnitte sowohl, als auch in der Direktrix ein Polygon ein, so dass diese beiden Polygone gleich viele Seiten haben, so wird (§. 162.) das in der Direktrix eingeschriebene Polygon als Direktrix eines Prisma betrachtet werden können, dessen Generatrix mit der des Cylinders gleiche Richtung hat, und mithin ist das zweite Polygon, als Durchschnitt eines Prisma mit einer zu seiner Direktrix parallelen Ebene (nach §. 163.) kongruent dem ersten. Da man aber durch fortgesetzte Theilung jener beiden Linien endlich auf solche Polygone kommen kann, dass ihre Seiten mit den Elementen jener beiden Linien einerlei sind, und auch noch in diesem Falle beide Polygone kongruent sein müssen; so wird der Durchschnitt einer Cylinderfläche durch eine Ebene, welche parallel zur Direktrix ist, mit letzterer kongruent sein, und es sind also auch allgemein: die Durchschnitte einer Cylinderfläche durch parallele Ebenen unter sich kongruent.

§. 237.

Es sei wieder eine Curve als Direktrix, und ausserdem noch ein Punkt gegeben; an jener Direktrix bewegt sich nun eine unbegränzte Gerade, und trifft bei ihrer Bewegung stets dieselbe, geht aber zugleich immer durch den angegebenen Punkt, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche alle Lagen dieser geradlinigen Generatrix enthält. Auf dieser Fläche liegen aber wieder, wie bei der vorigen je zwei Lagen der Generatrix in einer Ebene, weil alle Generatricen durch einen und denselben Punkt gehen, und daher sind auch zwei konsekutive Lagen derselben in einer Ebene. Die hierdurch erzeugte Fläche ist also eine entwickelbare, und zwar eine konische Fläche oder die Oberfläche eines Kegels. Der angegebene Punkt, welchen alle Lagen der Erzeugenden enthalten müssen, wird das Centrum des Conus, und die auf beiden Seiten dieses Punktes liegenden Theile des Conus, seine Fächer genannt.

Ist der Conus durch eine Ebene begränzt, und man betrachtet bloss den zwischen dieser Ebene und dem Centrum enthaltenen Theil derselben, so wird sein Durchschnitt mit jener Ebene seine Grundfläche, ferner werden die zwischen dem Scheitel und dieser Grundfläche liegenden Theile der einzelnen Lagen der Erzeugenden seine Seiten genannt. Liegt die Ebene der Grundfläche so, dass alle Seiten des Kegels gleich lang sind, so wird der Kegel ein gleichseitiger genannt, und seine Grundfläche ist mithin in diesem Falle ein

Kreis. Die vom Centrum eines Kegels auf die Ebene seiner Grundfläche gezogene Senkrechte wird Höhe desselben genannt. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt, und ist der Fuss der Senkrechten dieser letztere so wird der Kegel ein senkrechter genannt. — Die Fläche, welche den körperlichen Raum des Conus einhüllt, wird der Mantel oder die Aussenfläche desselben genannt.

§. 238.

Es ist aus dem vor. §. leicht zu ersehen, dass zur Darstellung einer konischen Fläche bloss die Projektionen der Direktrix und des Centrums nothwendig sind. Nimmt man sodann (nach §. 224.) eine beliebige Anzahl von Punkten an, und zieht durch jeden der letzteren (nach §. 72.) Gerade, die auch das Centrum enthalten, so erhält man ebenso viele Lagen der Erzeugenden der Fläche, als in wie viele Theile die Direktrix getheilt wurde, wodurch also (§. 230.) die konische Fläche dargestellt ist. Ist übrigens das Centrum durch seine Projektionen und ausserdem noch eine beliebige Curve gegeben, die sich auf der konischen Fläche befindet, durch ihre Projektionen gegeben, so kann man diese als Direktrix des Conus betrachten, und auf dieselbe Weise die konische Fläche projiciren, wie diess oben angegeben wurde.

Anmerk. Dasselbe gilt auch vom Cylinder, man kann nämlich jede auf seiner Fläche liegende Curve als Direktrix desselben betrachten.

§. 239.

Legt man durch das Centrum des Conus eine beliebige Ebene, welche die Direktrix oder auch nur irgend eine andere auf der Fläche liegende Curve trifft, und man zieht von einem der Punkte aus, in welchem letztere getroffen wird, eine Gerade durch den Scheitel des Kegels, so wird dieselbe eine Lage seiner Erzeugenden sein. Diese Gerade muss aber (nach §. 4.) ganz und gar in der Durchschnittsebene liegen, und mithin hat die letztere mit der konischen Fläche eine Lage der Erzeugenden gemein. Diese Ebene schneidet aber die Direktrix in zwei Punkten, wenn letztere eine ebene Curve ist, und in mehr als zwei Punkten, wenn dieselbe eine doppelt gekrümmte Curve ist; folglich erhält man den Satz:

Eine konische Fläche wird von einer Ebene, die durch das Centrum des Conus geht, nach einzelnen Lagen seiner Erzeugenden geschnitten.

Anmerk. Um bei einer konischen Fläche die Durchschnittserzeugenden einer durch ihren Scheitel gehenden Ebene und der Fläche angeben zu können, bestimme man (nach §. 227.) die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit einer auf der konischen Fläche liegenden ebenen Curve, ziehe durch diese Durchschnittspunkte und durch das Centrum Gerade, so werden diese die gesuchten Durchschnitte sein. Ein analoges Verfahren wird man befolgen, um den Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene zu bestimmen, die parallel zu einer ihrer Erzeugenden ist, und auf gleiche Weise wird man für eine jede von diesen Flächen die Erzeugende finden, nach welcher dieselbe von einer angegebenen Tangentialebene berührt wird.

§. 240.

Ist die Direktrix eines Conus eine geschlossene (in sich zurückkehrende) Curve, so wird die konische Fläche ebenfalls eine geschlossene, in sich zurückkehrende sein. Legt man nun parallel zur Direktrix eines Conus eine Ebene, theilt die erhaltene Durchschnittscurve in eine solche Anzahl von Theilen, dass jeder Theil einer Geraden sehr nahe kommt, so erhält man ein Polygon von ebenso vielen Seiten, als in wie viele Theile jene Durchschnittscurve getheilt wurde. Zieht man nun durch jeden der Theilungspunkte eine Erzeugende des Conus, so wird hierdurch die Direktrix in ebenso viele Theile getheilt, und man erhält mithin auch auf dieser — wenn man jeden dieser Theile als Element der Curve betrachtet — ein Polygon von ebenso vielen Seiten. Dieses Polygon kann aber (§. 176.) als Direktrix einer Pyramide betrachtet werden, deren Centrum mit dem der konischen Fläche zusammenfällt, und es ist mithin das erste Polygon (nach §. 178.) dem letzteren ähnlich. Setzt man nun statt dieses letzteren Polygons wieder die Direktrix und statt des ersteren die Durchschnittslinie der konischen Fläche mit der zur Direktrix parallel gelegten Ebene, so findet man, dass diese beide Curven ähnlich sind. Da aber dasselbe von den Durchschnitten beliebig vieler unter sich paralleler Ebenen gezeigt werden kann, so erhält man den Satz:

Schneidet man eine konische in sich zurückkehrende Fläche durch Ebenen, welche unter sich parallel sind, so müssen auch die erhaltenen Durchschnitte unter sich ähnliche Curven sein.

Anmerk. 1. Derselbe Satz gilt übrigens auch für eine nicht in sich zurückkehrende konische Fläche, indem auch zwei nicht in sich zurückkehrende Curven ähnlich sein können. —

Anmerk. 2. Denkt man sich das Centrum des Conus in unendlicher Entfernung von seiner Direktrix, so werden seine einzelnen Erzeugenden unter sich parallel werden, und daher die konische Fläche in eine cylinderische übergehen. Es werden daher auch, weil die Cylinderfläche als

spezieller Fall der konischen angenommen werden kann, für erstere alle jene Sätze gelten, welche für letztere gezeigt wurden.

§. 241.

Aufgabe 19. Es sei die Direktrix eines Cylinders sowohl, als auch die Richtung seier Generatrix gegeben; man soll die horizontale Spur dieses Cylinders angeben.

Auflösung. Nimmt man (§. 224.) auf der Direktrix eine genügende Anzahl von Punkten an durch ihre Projektionen, zieht sodann durch jeden dieser Punkte Parallele zur Generatrix (§. 76.), so erhält man auch so viele Lagen der Erzeugenden des Cylinders, als wie viele Punkte auf der Direktrix angenommen wurden, und hierdurch wird man sich also die Cylinderfläche vorstellen können. Bestimmt man nun von jeder dieser Erzeugenden ihre horizontale Spur, zieht durch diese einzelnen horizontalen Spuren eine stätige Curve, so wird diese die gesuchte horizontale Spur des Cylinders sein. Auf gleiche Weise kann man verfahren, wenn man die vertikale Spur desselben angeben will. —

Anmerk. Ist die horizontale Projektion eines auf der Cylinderfläche befindlichen Punktes bekannt, und man soll seine vertikale Projektion bestimmen, so ziehe man durch diese horizontale Projektion eine Gerade parallel zur horizontalen Projektion der Richtung der Generatrix, so wird man die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix erhalten, die den gegebenen Punkt enthält. Verlängert man nun dieselbe bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Projektion der Direktrix des Cylinders, und sucht von diesem Durchschnittspunkte die zugehörige vertikale Projektion (nach §. 224.), zieht durch letzteren eine Gerade parallel zur vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix, so wird diese Parallele die vertikale Projektion der durch den aufzusuchenden Punkt gehenden Lage der Generatrix des Cylinders sein. Bestimmt man auf dieser vertikalen Projektion (nach §. 72.) die vertikale Projektion des Punktes, dessen horizontale angegeben ist, so erhält man die gesuchte.

§. 242.

Beispiel zur vor. Aufgabe. (Fig. 153.) Es sei abcde die horizontale, a′c′ die vertikale Projektion eines Kreises, der als Direktrix eines Cylinders dienen soll, G sei die horizontale und G′ die vertikale Projektion der Generatrix des letzteren, man soll die Spuren dieses Cylinders bestimmen. Man ziehe durch die Punkte a, b, c, d, e Paralle zur horizontalen Projektion G der Generatrix, so erhält man die horizontale Projektion abcdeMN des Cylinders, sodann ziehe man durch a′, b′, c′ etc. etc. Parallele zur vertikalen Projektion G′ der Generatrix, und es wird sodann die vertikale Projektion a′b′M_1P_1 des Cylinders erhalten. Bestimmt man nun die horizontalen Spuren der durch die Punkte (a, a′), (b, b′), (c, c′), (d, d′) etc. etc. gezogenen Lagen der Generatrix, so werden dieselben durch die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 etc. etc. erhalten, und diese letzteren durch eine stätige Curve verbunden, so wird die horizontale Spur $A_1B_1C_1D_1E_1$ des Cylinders erhalten. Auf gleiche Weise erhält man die vertikale Spur $A_2B_2C_2D_2E_2$ desselben, wenn man die vertikalen Spuren einzelner Lagen seiner Generatrix bestimmt.

§. 243.

Aufgabe 20. Es ist die Direktrix eines Kegels gegeben und sein Centrum, beide durch ihre Projektionen, man soll den Kegel projiciren und seine Spuren bestimmen.

Auflösung. Nimmt man eine solche Anzahl von Punkten auf der Direktrix des Kegels durch ihre Projektionen an (nach §. 224.), dass durch dieselben die Direktrix in Elemente getheilt wird, und zieht durch diese einzelnen Punkte (§. 72.) Gerade, die durch das Centrum des Kegels gehen, so erhält man die Projektionen des Kegels. Um nun seine horizontale Spur anzugeben, bestimme man von jeder Lage der gezogenen Erzeugenden desselben seine horizontale Spur, verbinde die horizontalen Spuren der einzelnen Lagen der Generatrix durch eine stätige Curve, so erhält man die horizontale Spur des Conus. Ebenso kann man die vertikale Spur desselben bestimmen, wenn man von allen jenen einzelnen Lagen der Generatrix ihre vertikalen Spuren angibt, diese durch eine stätige Curve in gehöriger Ordnung verbindet, so wird diese Curve die vertikale Spur des Kegels sein. —

Sollte noch ein Punkt auf der Kegelfläche angegeben werden, dessen horizontale Projektion angegeben ist, so weis man, dass die Erzeugende des Kegels nach und nach durch alle Punkte seiner Oberfläche gehen wird, daher wird auch der aufzusuchende Punkt auf einer Lage der Erzeugenden enthalten sein, oder es muss die Erzeugende auch einmal durch den anzugebenden Punkt gehen. Zieht man also durch die horizontale Projektion des Punktes, der angegeben werden soll, eine Gerade durch die horizontale Projektion des Centrums, so wird diese die horizontale Projektion jener Lage der Generatrix des Kegels sein, die den zu bestimmenden Punkt enthält, und der Punkt, in welchem diese horizontale Projektion der durch den anzugebenden Punkt gehenden Lage der Generatrix die horizontale

Projektion der Direktrix trifft, gibt die horizontale Projektion des Punktes, in welchem die Direktrix von der erwähnten Lage der Generatrix getroffen wird. Bestimmt nun auch die vertikale Projektion dieses letzteren Durchschnittspunktes (nach §. 224.), und zieht durch diese eine Gerade nach der vertikalen Projektion des Centrums des Kegels, so erhält man die vertikale Projektion der vorhin erwähnten Lage der Generatrix, und auf dieser (nach §. 73.) die vertikale Projektion des Punktes bestimmt, dessen horizontale Projektion angegeben war, so wird mithin derselbe bestimmt sein. —

Anmerk. In Fig. 154. ist abcde die horizontale Projektion und a′c′ die vertikale Projektion der Direktrix eines Conus, S, ′S sind die Projektionen seines Scheitels, ferner ist abcdeMN die horizontale und a′b′c′d′e′$M_1 N_1$ die vertikale Projektion desselben und endlich $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ seine horizontale und $A_2 B_2 G_2 D_2 E_2$ seine vertikale Spur. In m ist die horizontale Projektion eines auf dieser Kegelfläche liegenden Punktes, mn ist die horizontale und mithin Sn′ die vertikale Projektion derjenigen Lage der Generatrix, welche diesen Punkt enthält. —

§. 244.

Um nun noch eine weitere entwickelbare Fläche angeben zu können, nämlich die entwickelbare Schraubenfläche, ist es vor Allem nothwendig, einige Sätze über die Entwickelung des Cylinders anzugeben. Es sei ein Cylinder gegeben, und dieser habe eine ebene Curve als Direktrix, deren Ebene senkrecht auf der Richtung der Generatrix des Cylinders ist. Theilt man nun die Direktrix in eine solche Anzahl von Theilen, dass diese einzelnen als ihre Elemente betrachtet werden können und denkt sich nun durch alle einzelnen Theilungspunkte der Direktrix Parallele zur Generatrix gezogen, so wird jeder zwischen zwei Lagen der Erzeugenden liegender Theil der Cylinderfläche als ebenes Element betrachtet werden können. Legt man nun das erste Flächenelement in die verlängerte Ebene des zweiten, indem man seine Ebene um die Communsektion derselben mit der des consekutiven Elementes dreht, so wird das erste Element der Direktrix auch in die Verlängerung ihres zweiten Elementes zu liegen kommen, und daher senkrecht auf der Richtung der Generatrix bleiben. Dreht man nun die Ebene des ersten und zweiten Flächenelementes um die dritte Lage der Generatrix, bis dieselbe in die verlängerte Ebene des dritten Flächenelementes zu liegen kömmt, so wird auch die Gerade, welche das erste und zweite Element der Direktrix enthält, in die Verlängerung des dritten Elementes der Direktrix zu liegen kommen, so dass also nunmehr die drei ersten Elemente in einer Geraden liegen, die senkrecht auf der Richtung der Generatrix des Cylinders steht. Dreht man nun auch die Ebene der drei ersten Elemente, bis dieselbe in die Verlängerung der Ebene des vierten Flächenelementes zu liegen kömmt, so wissen wir (aus §. 23.), dass die drei ersten Elemente der Direktrix in eine Gerade zu liegen kommen, welche die Verlängerung des vierten Elementes derselben ist. Da man nun auf diese Weise die ganze Fläche in einer Ebene ausbreiten kann, und dabei aber die Direktrix in eine Gerade sich verwandelt, die senkrecht auf der Richtung der Generatrix ist und ihre vorige Länge beibehält, so kann man die Sätze aussprechen:

1. Entwickelt man einen Cylinder, so wird jeder auf seiner Generatrix senkrecht stehende Schnitt sich in eine Gerade verwandeln, die gleich dem Umfange jenes Schnittes ist, und auf der Richtung der Generatrix senkrecht steht.

2. Die Theile der einzelnen Lagen der Erzeugenden, welche zwischen dem senkrechten Schnitte und einer beliebig gegen die Richtung der Generatrix geneigten Ebene liegen, ändern ihre Längen nicht, wenn der Cylinder entwickelt wird, sondern sind nach der Entwickelung ebenso lang, als dieselben vor der Entwickelung waren.

§. 245.

Nimmt man irgend einen Punkt auf einem Cylinder von beliebiger Direktrix an, und denkt sich durch diesen eine Tangentialebene an den Cylinder gelegt, so wird jene mit letzterem (nach §. 233.) die durch den Punkt gehende Lage der Erzeugenden des Cylinders gemeinschaftlich haben. Denkt man sich nun durch den angenommenen Berührungspunkt eine Gerade gezogen, welche in der Tangentialebene liegt, und mit der Berührungserzeugenden einen angegebenen bestimmten Winkel bildet, lässt sodann die Tangentialebene stets den Cylinder tangirend fortbewegen, ohne dass die in der Tangentialebene angenommene Gerade aber ihre Lage ändert, so dass diese Gerade in allen einzelnen Lagen der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel bildet, so beschreibt der veränderliche Berührungspunkt jener Tangentialebene auf der cylindrischen Fläche eine Curve, welche doppelt gekrümmt ist, und Schraubenlinie genannt wird. Die in der beweglichen

Tangentialebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade, welche in allen Lagen der beweglichen Tangentialebene mit der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel bildet, ist aber (§. 231.) Tangente der Schraubenlinie, und man ersieht also hieraus, dass alle Tangenten der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders unter sich gleiche Winkel bilden. Nun ist aber (§. 204.) die Tangente einer Curve für einen beliebigen Punkt derselben die Verlängerung des durch diesen Punkt gezogenen Elementes der Curve, folglich bilden alle Elemente der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel. Denkt man sich nun den Cylinder durch eine auf seiner Erzeugenden senkrecht stehende Ebene abgeschnitten, und den zwischen dieser Ebene und der Schraubenlinie enthaltenen Theil desselben entwickelt, so werden auch nach der Entwickelung die einzelnen Elemente der Schraubenlinie mit den durch ihre Endpunkte gehenden Lagen der Erzeugenden des Cylinders dieselben Winkel bilden, welche sie vorher mit denselben machten. Nach der Entwickelung verwandelt sich aber die Schraubenlinie jedenfalls in eine ebene Curve, und da von letzterer die Elemente mit einer und denselben Geraden gleiche Winkel bilden müssen, so muss sich die Schraubenlinie bei der Entwickelung des Cylinders auf welchem sie sich befindet, in eine Gerade verwandeln, welche mit der Erzeugenden des Cylinders einen bestimmten Winkel bildet. Nun wurde aber ferner von keinem Elemente dieser Schraubenlinie bei der Entwickelung derselben seine Länge geändert, folglich wird die mit dem Cylinder entwickelte Schraubenlinie dieselbe Länge haben, welche sie als doppelt gekrümmte Curve hat.

Denken wir uns nun auf demselben Cylinder eine andere Curve gezogen, die mit der Schraubenlinie zwei Punkte gemeinschaftlich haben soll, so wird bei der Entwickelung des Cylinders auch diese Linie entwickelt, und nach der Entwickelung der zwischen den beiden angenommenen Punkten enthaltene Theil derselben von der ursprünglichen Länge sein. Da aber von dieser Curve nicht angenommen ist, dass ihre einzelnen Elemente mit der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel bilden, so wird sie sich auch nach der Entwickelung in keine Gerade verwandeln, und daher ist der entwickelte Theil derselben, welcher zwischen den zwei Punkten enthalten ist, die sie mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat grösser, als der zwischen denselben zwei Punkten liegende Theil der Schraubenlinie.

§. 246.

Betrachten wir nun nochmals die Schraubenlinie auf dem Cylinder, so wissen wir, dass sie durch den Berührungspunkt einer an dem Cylinder tangirend sich fortbewegenden Ebene erzeugt wird. Da nun jene Tangentialebene öfters in ihre erste Lage wieder kommen kann, wenn der Cylinder geschlossen ist, oder eine in sich zurückkehrende Curve als Direktrix hat, also auch mehrmal dieselbe Berührungserzeugende haben kann, so wird der Berührungspunkt auch bei seiner Bewegung öfters auf dieselbe Erzeugende des Cylinders kommen können, und daher kann die Schraubenlinie eine und dieselbe Erzeugende mehrmals schneiden. Man nennt den Theil der Schraubenlinie, welcher zwischen einem solchen Durchschnittspunkte derselben mit der ersten Erzeugenden und ihrem nächstfolgenden liegt, einen Schraubengang, und den Theil dieser Erzeugenden (auf welcher der Anfangspunkt der Schraubenlinie liegt), welcher zwischen zwei auf einander folgenden Durchschnittspunkten derselben mit der Schraubenlinie enthalten ist, die Höhe eines Schraubenganges.

§. 247.

Endlich wollen wir noch eine Eigenschaft der Schraubenlinie ableiten, welche für ihre Construktion nothwendig sein wird. Wir wissen nämlich, dass die Schraubenlinie im entwickelten Zustande dieselben Eigenschaften hat, die eine Gerade besitzt. Denken wir uns daher von ihrem Anfangspunkte aus auf die Erzeugende ihres Cylinders eine senkrechte Ebene gelegt, diesen Durchschnitt sodann in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen getheilt, und durch die einzelnen Theilungspunkte einzelne Lagen der Erzeugenden gezogen, so wird durch diese letzteren auch die Schraubenlinie in ebenso viele gleiche Theile getheilt worden sein, als wie viele Theilpunkte der senkrechte Schnitt hat. Entwickeln wir nun den Cylinder, so wird der senkrechte Schnitt (§. 244.) in eine Gerade sich verwandeln, die auf der Erzeugenden des Cylinders senkrecht steht, die Schraubenlinie aber (§. 241.) in eine Gerade übergehen, welche mit diesem entwickelten Schnitt den Complementswinkel desjenigen Winkels bildet, welchen ihre Tangente mit der Erzeugenden macht, und jeder Theil der einzelnen Lagen der Erzeugenden, welcher im

senkrechten Schnitte des Cylinders anfängt, und in der Schraubenlinie endigt, ist Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypothenuse derjenige Theil der entwickelbaren Schraubenlinie ist, welcher zwischen ihrem Anfangspunkte und dem Endpunkte dieser Kathete liegt; dessen andere Kathe aber derjenige Theil des entwickelten senkrechten Schnittes ist, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dieser Kathete enthalten ist. Man ersieht also hieraus, dass *für ein gegebenes Element des senkrechten Schnittes und dem Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders macht, der entsprechende Punkt der Schraubenlinie bestimmt werden kann.*

Ist also der senkrechte Schnitt in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen getheilt, so wird hierdurch der Schraubengang in ebenso viele gleiche Theile getheilt, wenn man sich durch die einzelnen Theilpunkte des senkrechten Schnittes Erzeugende des Cylinders gezogen denkt. (Fig. 155.) Es sei nun abcd die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, MN sei die Höhe des Schraubenganges und AC sei gleich der Länge der Kreislinie abcd. Macht man $\angle BCA = 90°$, und $BC = MN$, so wird AB die Länge eines Schraubenganges sein. Hat man nun die Linie $AC = abcd$ dadurch erhalten, dass man abcd in 24 gleiche Theile theilte, und $Aa_1 = a1$, $Aa_2 = a2$ etc. etc. machte, so werden die auf AC senkrecht gezogenen Geraden a_1m_1, a_2m_2, a_3m_3 etc. etc., auch AB in ebenso viele gleiche Theile getheilt. Da aber $m_1a_1 : a_1A = m_2a_2 : a_2A =$ etc. etc. $= BC : AC$ ist, so ist $m_1a_1 = \frac{1}{24}BC$, $m_2a_2 = \frac{2}{24}BC$, $m_3a_3 = \frac{3}{24}BC$ etc. etc., und es folgt also hieraus, dass die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. auch erhalten werden können, indem man BC in ebenso viele gleiche Theile theilt, als in wie viele AC getheilt wurde, und durch die Theilpunkte b_1, b_2, etc. etc. die Geraden b_1m_1, b_2m_2 etc. etc. parallel zu AC zieht, so werden die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc., in welchen die von a_1, a_2, a_3 etc. etc. aus AC senkrecht gezogenen Geraden a_1m_1, a_2m_2, a_3m_3 etc. etc. jene Parallelen treffen, die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. der Schraubenlinie geben.

§. 248.

Aus den im vorigen §. entwickelten Sätzen folgt die Construktion eines beliebigen Theiles der Schraubenlinie. Nachdem man nämlich die horizontale Tafel in die Ebene des senkrechten Schnittes gelegt, und die einzelnen Lagen der Generatrix mithin senkrecht auf dieser Tafel stehen, verfahre man auf folgende Weise:

1. *Theile man den Umfang des senkrechten Schnittes in eine solche Anzahl von gleichen Theilen, dass jeder Theil nahezu als eine Gerade betrachtet werden kann.*
2. *Lege man, wenn jener senkrechte Schnitt eine geschlossene Curve, also die Höhe des Schraubenganges bekannt ist, diese Theile derselben senkrecht auf X, und theile die Höhe des Schraubenganges in ebenso viele gleiche Theile, als in wie viele man vorher den senkrechten Schnitt getheilt hat.*
3. *Nun ziehe man durch die einzelnen Theilpunkte des senkrechten Schnittes Parallele zur Erzeugenden, und durch die einzelnen Theilpunkte der Höhe des Schraubenganges Parallele zur Axe X, so werden die vertikalen Projektionen jener Lagen der Erzeugenden von den durch die entsprechenden Theilungspunkte der Höhe gehenden Parallelen in Punkten getroffen, welche der vertikalen Projektion der Schraubenlinie angehören, und wodurch letztere bestimmt werden kann.*
4. *Die horizontale Projektion der Schraubenlinie fällt mit dem senkrechten Schnitte selbst zusammen, weil die Erzeugende, auf deren einzelnen Lagen die Punkte der Schraubenlinie sich befinden senkrecht auf dieser Tafel stehen, und mithin ist die Schraubenlinie ganz und gar bestimmt,*

(Fig. 155.) Ist also der senkrechte Schnitt eine Kreislinie abcd, die in der horizontalen Tafel liegt, und in 24 gleiche Theile getheilt ist, ist ferner MN die Höhe des Schraubenganges und a der Anfangspunkt der Schraubenlinie, so theile man auch MN in ebenso viele gleiche Theile, ziehe durch den ersten Theilungspunkt von abcd, nämlich von 1 aus die Gerade 1 1′ senkrecht auf X, und durchschneide diese von der durch den ersten Theilungspunkt der Geraden MN mit X gezogenen Parallelen 11′, so wird 1′ ein Punkt der vertikalen Projektion der Schraubenlinie sein. Auf dieselbe Weise erhält man die Punkte 2′, 3′, 4′ etc. etc., durch deren stätige Verbindung die vertikale Projektion a′1′2′P′N′₁ des ersten Ganges der

der Schraubenlinie erhalten werden kann. Durch Fortsetzung und Wiederholung dieses Verfahrens kann man auch noch mehr Schraubengänge $N'_1 P'_2 N'_1$ etc. etc erhalten.

Zur Entwickelung der Schraubenlinie, z. B. eines Ganges derselben wird es hinreichen, dass wir $A a_1 = a_1 a_2 = a_2 a_3$ etc. etc. $= a I$ machen, so dass AC gleich der Länge von $Abcd$ wird; sodann $BC = MN$ machen und $C b_1 = b_1 b_2 = b_2 b_3 = M1 = 12$ etc. etc. gleich $\frac{1}{24} MN$ auftragen. Wenn wir nun $b_2 m_2 \neq b_1 m_1 \neq b_3 m_3$ etc. etc. $\neq AC$ und $a_1 m_1 \neq a_2 m_2 \neq a_3 m_3$ etc. etc. $\neq BC$ ziehen, so erhalten wir die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc., die der Schraubenlinie angehören. Zieht man also AB, so müssen sich auf dieser jene Punkte (§. 245.) befinden werden, $A m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$ etc. etc. ihre einzelnen Elemente sein, und $\angle ABC = \angle A m_1 a_1$ ist der Winkel, welchen eine Tangente für einen beliebigen der Punkte m_1, m_2 etc. etc. mit der Richtung der Erzeugenden macht. —

Anmerk. 1. Im entwickelten Zustande der Schraubenlinie hat dieselbe mit einer Geraden alle Eigenschaften gemein, und sie ist daher auch auf dem Cylinder das, was die Gerade in der Ebene ist — für alle diese Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. hat man

$$\frac{A a_1}{m_1 a_1} = \frac{A a_2}{m_2 a_2} = \frac{A a_3}{m_3 a_3} = \text{etc. etc.} = \frac{AC}{BC} = \text{tang} \angle \alpha = k$$

Zieht man daher AZ senkrecht auf AV, und bezeichnet die Entfernung eines beliebigen der Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. von AZ durch v, die Entfernung desselben Punktes von AV durch z, so findet für einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie die Bedingung statt:

$$z = kv$$

worin k eine unveränderliche, konstante Grösse ist, und durch $\angle \alpha$ bestimmt werden kann, v aber eine krummlinige Abscisse ist, die, wenn die einzelnen Elemente des senkrechten Schnittes durch m bezeichnet werden, nach und nach die Werthe m, $2m$, $3m$ etc. etc. annehmen muss, damit man einen zugehörigen Werth für Z, also auch einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie angeben kann.

Anmerk. 2. Wäre der senkrechte Schnitt des Cylinders keine geschlossene Curve, so kann auch im Allgemeinen die Höhe des Schraubenganges nicht angegeben sein. Um nun in diesem Falle die vertikale Projektion der Schraubenlinie zu erhalten, lege man an einem beliebigen Punkte $'A$ der Axe X den Complementswinkel des $\angle \alpha$, mache $'A n_1 = n_1 n_2 =$ etc. etc. $= a I$, ziehe $n_1 p_1 \neq n_2 p_2$ etc. etc. $\neq a' e'$, so erhält man im Durchschnitte der mit X durch p_1, p_2 etc. etc. gezogenen Parallele $p_1 1'$, $p_2 2'$ etc. etc. die Punkte $1'$, $2'$ etc. etc. welche der vertikalen Projektion der Schraubenlinie angehören.

§. 249.

Nun wollen wir zur besseren Uebersicht die in den letzten Paragraphen entwickelten Eigenschaften zusammenfassen. Diese werden folgende sein:

1. Die durch beliebige Punkte der Schraubenlinie an diese gezogenen Tangenten bilden mit der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel.
2. Bei der Entwickelung des Cylinders, auf dessen Oberfläche sich die Schraubenlinie befindet, verwandelt sich diese in eine Gerade.
3. Unter allen zwischen irgend zwei Punkten der Cylinderfläche sich befindlichen Theile von Curven ist derjenige Theil der kürzeste, welcher der Schraubenlinie angehört; folglich ist die von einem Punkte einer Cylinderfläche zu einem andern gezogene Schraubenlinie die kürzeste Entfernung dieser beiden Punkte auf der Fläche.
4. Für irgend einen Punkt der Schraubenlinie findet für den Theil der Erzeugenden, welcher zwischen diesem Punkte und der senkrechten Schnittebene liegt, und dem entsprechenden Theile dieses Schnittes, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dem Endpunkte jener Erzeugenden sich befindet ein konstantes Verhältniss statt, welches durch den Contingenzwinkel der Schraubenlinie bestimmt ist. —

§. 250.

Soll nun für einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie an diese eine Tangente gezogen werden, so denke man sich durch diesen Punkt an die Cylinderfläche eine Tangentialebene gezogen, in dieser durch den Berührungspunkt eine Lage der Erzeugenden des Cylinders gelegt, und an letztere durch den Berührungspunkt eine Gerade unter dem gegebenen Contingenzwinkel angelegt, so wird letztere die gesuchte Tangente sein. Um aber die Projektion der letzteren zu bestimmen, lege man vor Allem die horizontale Tafel wieder durch die Ebene des Schnittes, so wird jede Tangentialebene dieses Cylinders, weil sie (§. 255.) mit letzterem eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich hat, und diese senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, (nach §. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel sein,

und daher ihre horizontale Spur die horizontale Projektion der Tangente der Schraubenlinie sein. Legen wir daher durch die horizontale Projektion des gegebenen Berührungspunktes eine Tangente an den senkrechten Schnitt, so wird diese die horizontale Projektion der gesuchten Tangente sein. Denken wir uns den Cylinder entwickelt, so wird sich auf die horizontale Projektion irgend einer solchen Tangente der senkrechte Schnitt abwickeln und die horizontale Spur einer solchen Tangente wird mithin der Anfangspunkt der Schraubenlinie; der zwischen dem Berührungspunkte und der horizontalen Spur liegende Theil der Tangente wird die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes sein, dessen eine Kathete mit der horizontalen Projektion der Tangente zusammenfällt, und gleich sein wird dem Theile des senkrechten Schnittes, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dem gegebenen Berührungspunkte liegt. Tragen wir daher von der horizontalen Projektion des gegebene Berührungspunktes auf die horizontalen Projektion der gesuchten Tangente denjenigen Theil des senkrechten Schnittes, welcher zwischen dem Berührungspunkte der letzteren uud dem Anfangspunkte der Schraubenlinie liegt, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangente. Bestimmt man von dieser die vertikale Projektion, und zieht durch letztere Gerade nach der vertikalen Projektion des angegebenen Berührungspunktes, so erhält man die vertikale Projektion der Tangente.

Beispiel. (Fig. 155.) Ist p die horizontale und p′ die vertikale Projektion eines Punktes der Schraubenlinie, durch welchen an diese eine Tangente gezogen werden soll, so muss, wie schon vorhin erwähnt wurde, die horizontale Projektion derselben, welche ohnediess (§. 72.) durch p gehen muss, Tangente der Kreislinie für p sein. Zieht man daher von p aus (nach §. 205.) an diese Kreislinie die Tangente pc_2, so wird letztere die horizontale Projektion der gesuchten Tangente der Schraubenlinie sein. Die vertikale Projektion der letzteren muss aber durch p′ gehen; bestimmt man daher noch einen Punkt derselben, so wird man diese vertikale Projektion leicht bestimmen können.

Nun wurde erwähnt, dass der Theil der horizontalen Projektion der Tangente, welcher zwischen der horizontalen Projektion des Berührungspunktes und der horizontalen Spur der Tangente liegt, Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, von welchem die vertikale Ordinate des Berührungspunktes die andere Kathete und die Länge des zwischen diesem Punkte und der horizontalen Spur liegenden Theiles der Tangente Hypothenuse ist. Die auf der horizontalen Projektion der Tangente liegende Kathete aber ist so lang, als der zwischen der horizontalen Projektion des Berührungspunktes und dem Anfange der Schraubenlinie liegende Theil des senkrechten Schnittes. Trägt man daher die Länge pa von p aus auf pc_2, so wird c_2 die horizontale Spur der gesuchten Tangente sein. Zieht man nun $c_2 c'_2$ senkrecht auf X, so erhält man in c'_2 die vertikale Projektion von c_2, und die Gerade $p' c'_2$ gezogen, gibt die vertikale Projektion der gesuchten Tangente, deren Berührungspunkt (p, p′) ist. —

Anmerk. Zieht man durch alle einzelnen Theilpunkte der Kreislinie, die Tangenten der letzteren, und macht $II c_3 = III a$, $IV c_4 = IV a$ etc. etc.. so verden die Punkte c_3, c_4, c_5 etc. etc. die horizontalen Spuren aller einzelnen durch die Punkte (III, 3′), (IV, 4′) etc. etc. gezogenen Tangenten der Schraubenlinie sein, und die Linie $a c_1 c_2 \ldots\ldots C$, welche diese horizontalen Spuren verbindet, ist die Kreisevolvente. Die Construktion der letzteren ist also hieraus leicht abzunehmen.

§. 251.

Zieht man eine Tangente jener Schraubenlinie, und lässt dieselbe stets die letztere tangirend sich fortbewegen, so entsteht (§. 232.) eine entwickelbare Fläche, und zwar die entwickelbare Schraubenfläche.

Letztere ist also der geometrische Ort aller Tangenten der Schraubenlinie, und könnte mithin durch die einzelnen Lagen dieser Erzeugenden leicht bestimmt werden. Man müsste nämlich (nach §. 249.) für viele nahe an einander liegende Punkte der Schraubenlie die Tangenten der letzteren ziehen, so werden je zwei consecutive Lagen dieser Tangenten ein Element der Schraubenfläche bilden. Da aber dieses Verfahren zu unbequem ist, so wollen wir ein anderes benützen, das uns auf die Construktion der Schraubenfläche führt. Theilen wir nämlich den senkrechten Schnitt des Cylinders, auf welch letzterem sich die Direktrix unserer Fläche, nämlich die Schraubenlinie befindet, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und ziehen durch die einzelnen Theilpunkte Tangenten an diesen senkrechten Schnitt, der hier eine Kreislinie sein soll, tragen auf jede dieser Tangenten den Theil des senkrechten Schnittes auf, welcher zwischen dem Berührungspunkte der Tangente und dem ersten Theilungspunkte liegt, so erhalten wir die horizontalen Spuren von ebenso vielen Tangenten der Schraubenlinie, als wie viele Tangen-

ten an den senkrechten Schnitt gezogen wurden. Wenn wir daher diese horizontalen Spuren vertikal projiciren (nach §. 70.), so haben wir die Projektionen von Punkten, von welchen jeder einer Lage der Generatrix unserer Schraubenfläche angehört. Um nun noch einen zweiten Punkt von jeder dieser Lagen der Erzeugenden zu erhalten, nehmen wir in einer Entfernung (h), welche gleich der Höhe eines Schraubenganges ist, eine Ebene parallel zur horizontalen Tafel an, und suchen wieder die Durchgangspunkte der vorhin erwähnten Lagen der Erzeugenden mit dieser Ebene. Eine jede solche Lage der Erzeugenden nun bildet mit der Erzeugenden des Cylinders einen bekannten Winkel, und für welchen, wenn er mit α bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 R \pi}{h}$$

ist, worin R der Halbmesser des Kreises ist, dessen Ebene senkrecht auf dem Cylinder steht, und in dessen Umfang der Anfangspunkt der Schraubenlinie liegt.

Es ist mithin (nach dem Begriffe von trigometrischer Tangente eines Winkels) derjenige Theil einer jeden Lage der Erzeugenden, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der um h von letzterer entfernten Ebene liegt, die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete gleich h, und dessen andere Kathete die Länge des auf dem Cylinder senkrecht stehenden Schnittes, also 2 R π ist.ⁱ Letztere aber muss (nach §. 249.) Tangente dieser Kreislinie sein, und ihr Endpunkt wird sodann der Durchschnittspunkt mit der in der Entfernung h von der horizontalen Tafel gelegten Horizontalebene sein. Verlängert man daher die an den senkrechten Schnit des Cylinders gezogenen Tangenten so weit, dass jede derselben gleich dem Umfange dieses Schnittes (oder gleich 2 R π) wird, so werden die hierdurch erhaltenen Endpunkte die horizontalen Projektionen der einzelnen Durchschnittspunkte von den Lagen der Erzeugenden der Schraubenfläche mit der horizontalen Hülfsebene sein. Zu diesen Projektionen die vertikalen gesucht, welche in der vertikalen Spur (einer zur Axe X parallelen und um h von ihr entfernten Geraden) der horizontalen Hülfsebene liegen müssen, sodann die einzelnen horizontalen Spuren der Lagen der genannten Erzeugenden mit ihren Durchgangspunkten in die horizontale Hülfsebene durch Gerade verbunden, so erhält man die einzelnen Lagen der Erzeugenden der Schraubenfläche, deren Durchschnittspunkte der Direktrix der letzteren angehören werden. —

Anmerk. 1. Es wurde vorhin der Begriff von trigometrischer Tangente eines Winkels benützt, weshalb dieser Begriff hier noch erwähnt werden soll. Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkte des Scheitels eines Winkels auf seinen andern Schenkel eine Senkrechte, bezeichnet letztere mit h, den zwischen h und dem Scheitel des Winkels liegenden Theil des zweiten Schenkels mit b, und den zwischen h und dem Scheitel des Winkels liegenden Theil des ersten Schenkels mit H, so bilden, b, h und H ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem das Verhältniss irgend zweier seiner Seiten konstant bleibt, so lange der angegebene Winkel (welcher mit α bezeichnet werden soll) sich nicht ändert, und es ist

$$\frac{h}{H} = \text{sinus } \alpha, \quad \frac{b}{H} = \cos \alpha, \quad \frac{h}{b} = \text{tang } \alpha, \quad \frac{b}{h} = \text{Coatg } \alpha,$$

$$\frac{H}{b} = \text{sekante } \alpha, \quad \frac{H}{h} = \text{cosecante } \alpha. \text{ —}$$

Anmerk. 2. In Fig. 156. ist Abcd der senkrechte Schnitt eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, MN die Höhe eines Schraubenganges und hierdurch die Schraubenfläche konstruirt. Die nähere Beschreibung dieser Figur wird unten, wo von der Tangirung und den Durchschnitten der Schraubenfläche gesprochen wird, folgen.

Anmerk. 3. Es wurde oben von der Aehnlichkeit zweier Curven gesprochen. Damit zwei Curven ähnlich sein können, müssen dieselben einerlei Ordnung angehören, und in einer oder in parallelen Ebenen liegen. Ist nun diess der Fall, so nennt man dieselben ähnlich liegend, wenn die von einem beliebigen in der einen liegenden Punkte nach ihrem Umfange gezogenen Geraden in demselben Verhältnisse stehen, als die in der andern von einem entsprechenden und zu bestimmenden Punkte parallel zu jenen gezogenen Geraden.

Anmerk. 4. Ehe wir die Erzeugung der entwickelbaren Flächen schliessen, wollen wir noch erwähnen, dass diejenige Linie, welche der geometrische Ort aller Durchschnittspunkte der einzelnen Lagen der Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche ist, Wendecurve der Fläche genannt wird. Von dieser sind die einzelnen Lagen der Erzeugenden Tangenten.

Viertes Kapitel.

Tangirung der entwickelbaren Flächen durch Ebenen.

§. 252.

Es wurde schon (§. 233.) erwähnt, dass eine entwickelbare Fläche von einer Tangentialebene

derselben nach einem Flächenelemente berührt wird. Ein solches Flächenelement ist nun der zwischen zwei konsekutiven Lagen der Erzeugenden enthaltene Theil der Fläche, und da zwei solche konsekutive Lagen der Erzeugenden so nahe nebeneinder liegen, dass sie als in einander fallend angenommen werden können, so wird man auch sagen können: eine entwickelbare Fläche wird von einer ihrer Tangentialebenen nach einer Erzeugenden berührt.

§. 253.

Hat man nun für einen beliebigen Punkt einer entwickelbaren Fläche an diese eine Tangentialebene zu legen, so weis man (aus §. 252.), dass dieselbe eine Lage der Erzeugenden mit der Fläche gemeinschaftlich hat. Ferner ist (aus §. 251.) bekannt, dass die Tangentialebene für einen Punkt einer Fläche der geometrische Ort aller Tangenten der Curven ist, die durch jenen Punkt gehen und der Fläche angehören. Wenn wir daher nur eine solche Curve wissen, die durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene geht, und der Fläche angehört, sodann von dem Berührungspunkte aus an diese Curve eine Tangente ziehen, so gehört diese der Tangentialebene an. Da aber auch ausserdem der letzteren noch die Berührungserzeugende angehört, so wird jene bestimmt werden können durch die genannte Tangente und diese Erzeugende, weil beide sich schneiden. Um daher für einen beliebigen Punkt einer entwickelbaren Fläche an diese eine Tangentialebene zu legen, ziehen wir zuerst durch durch den gegebenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche, sodann legen wir durch denselben Punkt eine Ebene, welche die gegebene Fläche nach einer bekanten Curve schneidet, legen an diese durch den gegebenen Berührungspunkt eine Tangente, und suchen nun die Ebene auf, welche diese Tangente und die Berührungserzeugende enthält, so wird dieselbe die gesuchte Tangentialebene sein.

§. 254.

Ist eine der Spuren der entwickelbaren Fläche gegeben, so kann man bei der Aufsuchung einer Tangentialebene dieser Fläche sogleich diese Curve benützen. Ist nämlich die horizontale Spur der Fläche gegeben, so wird die horizontale Spur der Berührungserzeugenden als Berührungspunkt angenommen werden können, und legt man sodann an die horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so wird diese der Tangentialebene angehören. Diese Tangente liegt aber in der horizontalen Tafel, weil die Tangente einer Curve — als Verlängerung eines ihrer Elemente — in der Ebene derselben liegen muss; folglich ist diese Tangente die horizontale Spur der Tangentialebene für die angegebene Berührungserzeugende. Da sich nun ebenso zeigen lässt, dass die vertikale Spur der Fläche von der vertikalen Spur der Tangentialebene berührt wird, so folgt hieraus der Satz:

Die horizontale Spur einer Tangentialebene für eine entwickelbare Fläche ist Tangente der horizontalen Spur und die vertikale Spur jener Ebene Tangente der vertikalen Spur der Fläche.

Anmerk. Da die horizontale Spur der Tangentialebene Tangente der horizontalen Spur der Fläche, und der Berührungspunkt dieser Tangente die horizontale Spur der Berührungserzeugenden ist, so wird man letztere bestimmen können, wenn man durch jenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche legt.

§. 255.

Hat man nun zwei Tangentialebenen für einen Cylinder, so können diese entweder parallel sein oder sich schneiden. Im letzteren Falle haben dieselben (§. 13.) eine Gerade gemeinschaftlich, deren Richtung wir nun bestimmen wollen. Man kann nämlich die Berührungserzeugende der einen Tangentialebene als Erzeugende der letzteren betrachten. Lässt man nun eine dieser Tangentialebenen durch ihre Berührungserzeugende erzeugen, so wird diese letztere während ihrer Bewegung an einer gegebenen Direktrix auch einmal durch einen Punkt der Communsektion beider Ebenen gehen, und in dieser Lage auch ganz und gar in die andere Ebene fallen müssen, weil eine Gerade, die man durch einen Punkt dieser zweiten Ebene parallel zur Erzeugenden des Cylinders zieht, ganz und gar in diese Ebene fallen muss. Es folgt also hieraus, dass zwei Tangentialebenen eines Cylinders sich nach einer Geraden schneiden, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist.

§. 256.

Legt man die Direktrix eines Cylinders in die horizontale Tafel, und ist diese Direktrix senkrecht auf der Erzeugenden des Cylinders, so steht such letzterer senkrecht auf der horizontalen Tafel. Wenn man nun an den Cylinder eine Tangentialebene legt, so wird diese (§. 252.) eine Lage der Erzeugenden des Cylinders enthalten, nämlich die,

welche durch den Berührungspunkt geht, und mithin wird diese Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Nun muss aber (§. 254.) die horizontale Spur dieser Tangentialebene Tangente an der angenommenen Direktrix sein, und ist ausserdem auch die horizontale Projektion einer jeden in der Tangentialebene enthaltenen Linie, weil diese letztere projicirende Ebene dieser Linie ist, folglich ist die horizontale Spur der Tangentialebene auch die horizontale Projektion einer jeden Tangente einer Curve, die sich auf dem gegebenen Cylinder befindet. Projicirt man aber irgend eine im Raume enthaltene Curve horizontal, so werden alle ihre projicirenden Linien als einzelne Lagen der Erzeugenden eines Cylinders betrachtet werden können, dessen Direktrix die gegebene Curve und dessen horizontale Spur die horizontale Projektion dieser Curve ist; daher wird die horizontale Projektion der Tangente einer Curve als Tangente an der horizontalen Projektion der Curve erscheinen. Da aber dasselbe auch in Bezug auf die vertikale Projektion der Tangente einer Curve bewiesen werden kann, so können wir den Satz aussprechen: die Projektionen einer Tangente für eine Curve im Raume sind Tangenten für die Projektionen dieser Curve, und gehen durch die Projektionen des Berührungspunktes.

Anmerk. Ist also die eine Projektion einer Curve eine Gerade, so wird die entsprechende Projektion einer Tangente der Curve mit jener Geraden zusammenfallen müssen.

§. 257.

Hat man für einen Conus zwei Tangentialebenen, so werden sich dieselben jedenfalls schneiden, weil jede derselben eine Lage der Erzeugenden mit dem Conus gemeinschaftlich haben muss (§. 252.). Jede Lage der Erzeugenden des Conus geht aber durch sein Centrum, und mithin wird dieses auch in jeder der Tangentialebenen enthalten sein müssen, folglich schneiden sich zwei Tangentialebenen eines Conus nach einer durch das Centrum des letzteren gehenden Geraden.

§. 258.

Aufgabe 21. Es ist ein Cylinder durch seine horizontale Spur und die Richtung seiner Generatrix gegeben; ferner ist die eine Projektion eines auf dem Cylinder enthaltenen Punktes bekannt; man soll

1. die andere Projektion dieses Punktes angeben.
2. an diesen Cylinder für den gegebenen Punkt eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Ist die horizontale Projektion des Berührungspunktes gegeben, und man legt durch dieselbe eine Gerade parallel mit der horizontalen Projektion der Erzeugenden des Cylinders, so wird diese Parallele die horizontale Projektion der durch den Berührungspunkt gehenden Lage der Erzeugenden und ihr Durchschnittspunkt mit der horizontalen Spur des Cylinders die horizontale Spur dieser Lage der Erzeugenden sein. Bestimmt man nun zu dieser horizontalen Spur die vertikale Projektion, zieht sodann durch letztere eine Parallele mit der vertikalen Projektion der Erzeugenden, so erhält man auch die vertikale Projektion jener Lage der Erzeugenden, welche den Berührungspunkt enthält, wodurch also auch leicht die vertikale Projektion dieses Punktes bestimmt werden kann, und hierdurch ist also der erste Theil unserer Aufgabe gelöst. Um den zweiten Theil derselben zu lösen, so weis man (aus §. 254.), dass die horizontale Spur der Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche, eine an die horizontale Spur dieser Fläche gezogene Tangente ist, die durch die horizontale Spur der Berührungserzeugenden geht; legt man daher durch die horizontale Spur der Berührungserzeugenden eine Tangente an die horizontale Spur des angegebenen Cylinders, so wird diese Tangente die horizontale Spur unserer Tangentialebene sein müssen. Bestimmt man nun von dieser Berührungserzeugenden die vertikale Spur, so erhält man einen Punkt der vertikalen Spur unserer Tangentialebene, und nimmt man auf der Berührungserzeugenden einen Punkt an, legt durch denselben eine Gerade parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene und sucht von dieser Parallelen die vertikale Spur, so wird letztere ebenfalls in der vertikalen Spur der Tangentialebene enthalten sein müssen. Durch dieselbe und den schon vorhin angegebenen Punkt kann nun die vertikale Spur der Tangentialebene gezogen werden, und es ist mithin die Tangentialebene für den gegebenen Berührungspunkt hierdurch bestimmt.

Auf gleiche Weise würde man verfahren, wenn die vertikale Spur des Cylinders bekannt wäre und an diesen eine Tangentialebene gelegt werden sollte.

§. 259.

Beispiel. (Fig. 157.) Ist ABCDEF die horizontale Spur eines Cylinders, und zwar ein Kreis, (CF', AF_1) die Richtung der Generatrix und m die horizontale Projektion des Berührungspunktes, und man soll für diesen Punkt an diesen Cylin-

der (ABCDEFG, 'AD'G₁F₁) eine Tangentialebene legen, so ziehe man mB parallel zu CF, ferner BB' senkrecht auf X, und B'm' ≠ 'AF₁, so wird Bm die horizontale und 'AF₁ die vertikale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den gegebenen Berührungspunkt geht, und B wird die horizontale Spur dieser Berührungserzeugenden sein. Zieht man (§. 205.) durch B die Tangente BS an den gegebenen Kreis, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene sein, welche mit der Axe X den Punkt S gemeinschaftlich hat. Nimmt man nun (§. 75.) die Projektionen n und n' eines auf der Geraden (Bm, B'm') enthaltenen Punktes an, zieht na ≠ BS und vom Durchschnittspunkte dieser Parallelen na mit X, nämlich von a aus eine Senkrechte aa' auf X, zieht ferner n'a' ≠ X, so wird (na, n'a') (§. 72.) eine durch (n, n') gehende und mit E parallel gehende Gerade sein, die also (§. 120., Anmerk. 2.) auch in der gesuchten Tangentialebene liegen muss. Von dieser Geraden (na, n'a') ist aber (§. 93.) in a' die vertikale Spur, zieht man daher a'S, so erhält man hierdurch die vertikale Spur der Tangentialebene, und letztere ist also durch ihre Spuren E und E' völlig bestimmt.

§. 260.

Aus dem Vorhergehenden ist leicht ersichtlich, dass es für einen auf einem Cylinder angegebenen Punkt nur eine einzige Tangentialebene gibt; wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, welche die Lage der Tangentialebene eines Cylinders völlig bestimmen, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist. Da die Tangentialebene eines Cylinders mit demselben eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich hat, so wird dieselbe nur noch durch einen ausserhalb des Cylinders angegebenen Punkt gehen oder durch eine Gerade gehen können, welche die Berührungserzeugende schneidet oder parallel mit ihr ist, und endlich mit einer Ebene parallel sein können, die parallel zur Generatrix des Cylinders ist. Es folgt hieraus, welche Bedingungen der Tangentialebene eines Cylinders zu erfüllen auferlegt werden dürfen, wenn ihr Berührungspunkt nicht gegeben, und diese sind folgende:

1. K a n n e i n P u n k t g e g e b e n s e i n, d u r c h w e l c h e n d i e T a n g e n t i a l e b n e g e l e g t w e r d e n s o l l.
2. E i n e G e r a d e, d i e p a r a l l e l z u r E r z e u g e n d e n d e s C y l i n d e r s i s t, u n d d u r c h w e l c h e d i e T a n g e n t i a l e b e n e g e h e n m u s s.
3. E i n e b e l i e b i g e G e r a d e, m i t w e l c h e r d i e T a n g e n t i a l e b e n e p a r a l l e l g e z o g e n w e r d e n s o l l. Denn im letzteren Falle wird man die Ebene finden können, die mit der Generatrix parallel ist und noch eine Bedingung ausserdem erfüllt. —

§. 261.

A u f g a b e 22. E s i s t e i n C y l i n d e r d u r c h s e i n e h o r i z o n t a l e S p u r u n d d i e R i c h t u n g s e i n e r G e n e r a t r i x g e g e b e n, m a n s o l l d u r c h e i n e n a u s s e r h a l b d e s s e l b e n a n g e g e b e n e n P u n k t a n d e n s e l b e n e i n e T a n g e n t i a l e b e n e l e g e n.

A u f l ö s u n g. Man sieht vor Allem leicht ein, dass durch den gegebenen Punkt zwei Ebenen gelegt werden können, welche den Cylinder tangiren, wenn die Direktrix des Cylinders eine geschlossene Curve ist, und man hat daher diese beiden Ebenen anzugeben. Aus §. 255. ist aber bekannt, dass die Communsektion zweier Tangentialebenen eines Cylinders eine zur Generatrix des letzteren parallele Gerade ist, und da beide Tangentialebenen durch den gegebenen Punkt gehen müssen, so wird die Gerade, welche durch den gegebenen Punkt parallel zur Erzeugenden des Cylinders gezogen werden kann, die Communsektion beider Tangentialebenen sein. Die horizontalen Spuren der letzteren müssen aber durch die horizontale Spur ihrer Communsektion gehen und (§. 254.) Tangenten der horizontalen Spur des Cylinders sein; ziehen wir daher von der horizontalen Spur jener Communsektion aus an die horizontale Spur des Cylinders Tangenten, so werden diese die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen sein. Es folgt also hieraus die Regel:

U m d u r c h e i n e n g e g e b e n e n P u n k t a n e i n e C y l i n d e r f l ä c h e d i e T a n g e n t i a l e b e n e n z u l e g e n, z i e h e m a n d u r c h d i e s e n P u n k t e i n e P a r a l l e l e z u r E r z e u g e n d e n d e s C y l i n d e r s, s u c h e v o n d i e s e r P a r a l l e l e n d i e h o r i z o n t a l e S p u r, u n d l e g e d u r c h l e t z t e r e a n d i e h o r i z o n t a l e S p u r d e s C y l i n d e r s T a n g e n t e n, s o w e r d e n d i e s e d i e h o r i z o n t a l e n S p u r e n d e r g e s u c h t e n T a n g e n t i a l e b e n e n s e i n, v o n w e l c h e n n u n d i e v e r t i k a l e n S p u r e n b e s t i m m t w e r d e n k ö n n e n, w e n n m a n (§. 234.) d i e B e r ü h r u n g s e r z e u g e n d e n a u f s u c h t, u n d d i e i n §. 258. e r w ä h n t e n R e g e l n b e n ü t z t.

§. 262.

Beispiel. (Fig. 158.) Es sei ABCDE eine in der horizontalen Tafel liegende Ellipse und ho-

rizontale Spur eines Cylinders, von welchem die Richtung der Erzeugenden durch die Gerade (C c, C' c') gegeben ist, man soll durch den Punkt (a, a') an den Cylinder zwei Tangentialebenen legen. Zieht man a d ≠ C c und a' d' ≠ C' c', so wird (a d, a' d') die Communsektion der beiden gesuchten Tangentialebenen sein. Nun ziehe man vom Durchschnittspunkte d' der Geraden a' d' mit X auf letztere eine Senkrechte, und durchschneide letztere von a d, so wird in d ein Punkt sein, der den horizontalen Spuren beider Tangentialebenen zugleich angehört, und legt man nun von d aus (nach §. 210.) an die Ellipse A B C D E die Tangenten d C und d D, so werden die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen, und die Punkte C und D werden die Berührungspunkte jener Tangenten sein, folglich sind die Geraden (C c, C' c') und (D b, D' b') die Berührungserzeugenden beider Tangentialebenen. Nimmt man auf (a d, a' d') den Punkt (b, b') an, legt b m ≠ E_1 und 'b m' ≠ X, so wird diese Gerade parallel zur horizontalen Spur der ersten Tangentialebene und mithin in dieser letzteren (§. 120. Anmerk. 2.) enthalten sein, folglich ist die vertikale Spur dieser Geraden, nämlich m' ein Punkt der vertikalen Spur der ersten Tangentialebene, und diese Spur kann daher jetzt bestimmt werden, und ist E_1. Ebenso werden die Punkte c' und p', die der vertikalen Spur E'_2 der zweiten Tangentialebene angehören, bestimmt. Es ist also E_1'E_1 die eine und E_2'E_2 die andere Tangentialebene des gegebenen Cylinders, welche durch den Punkt (a, a') geht.

§. 263.

Aufgabe 23. Parallel zu einer gegebenen Geraden an einen Cylinder, dessen horizontale Spur und Generatrix gegeben ist, eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Vor Allem sieht man wieder, dass an den gegebenen Cylinder zwei Tangentialebenen gelegt werden können, welche die in diesem §. angegebenen Bedingungen erfüllen, wenn der Cylinder eine in sich zurückkehrende Curve als horizontale Spur hat. Jede dieser Ebenen muss aber eine zur gegebenen Geraden parallele Gerade enthalten (§. 29.), wenn sie mit jener parallel sein soll, und (§. 252.) muss eine Lage der Erzeugenden ganz und gar in jeder der Tangentialebenen liegen. Zieht man daher von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, und legt durch diese Parallele und die gegebene Gerade eine Ebene (§. 101.), so wird letztere parallel zu jeder der gesuchten Tangentialebenen sein, und folglich werden auch beide unter sich parallel sein müssen. Man ziehe daher parallel zur horizontalen Spur der Hülfsebene Tangenten an die horizontale Spur des Cylinders, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden Tangentialebenen, deren vertikale Spuren nach §. 258. bestimmt werden können —

§. 264.

Beispiel. (Fig. 159.) Es sei L die horizontale und L' die vertikale Projektion der gegebenen Geraden, A B C D E die horizontale Spur eines Cylinders, dessen Generatrix durch die Richtung ('A M_1, B M) bestimmt ist; man soll parallel zur Geraden (L, 'L) eine Tangentialebene an diesen Cylinder ziehen. Man nehme (§. 75.) auf (L, 'L) den Punkt (m, m') an, ziehe m s_2 ≠ B M und m' s'_2 ≠ 'A M_1, so wird die Gerade (m s_2, m' s'_2) (§. 76.) parallel zur Erzeugenden des gegebenen Cylinders sein. Nun lege man durch beide Gerade (L, 'L) und (m s_2, m' s'_2) nach §. 101. eine Ebene, indem man die horizontalen Spuren s_1 und s_3 und die vertikalen Spuren s'_2 und s'_4 dieser Geraden sucht, die ersten dieser zwei Punkte unter sich und dann die letzten durch Gerade verbindet, so erhält man die Spuren $s_3 s_1$ und $s'_4 s'_2$ der Hülfsebene. Zieht man (§. 207.) parallel zur Geraden $s_3 s_1$ Tangenten an die horizontale Spur A B C D E des Cylinders, nämlich E_1 und E_2, so wird E_1 die horizontale Spur der ersten und E_2 die der zweiten gesuchten Tangentialebene sein. Durch die Durchschnittspunkte S_1 und S_2 dieser Spuren mit der Axe X parallele Gerade mit s s'_2 gezogen, so erhält man auch die vertikalen Spuren E'_1 und E'_2 der gesuchten Ebene, und es ist mithin $E_1 S_1 E'_1$ die eine und $E_2 S_2 E'_2$ die andere Ebene, welche den gegebenen Cylinder (A B C D M N, 'A C' N_1 M_1) tangirt und mit der gegebenen Geraden (L, L') parallel ist.

§. 265.

Sollte man durch eine Gerade, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, an diesen eine Tangentialebene legen, so bestimme man die Spuren dieser Geraden, lege durch die horizontale Spur derselben Tangenten an die horizontale Spur des gegebenen Cylinders, so wird man hierdurch die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen erhalten. Bestimmt man nun die Berührungserzeugenden, und gibt (§. 258.) noch Punkte an, welche den vertikalen Spuren der Tangentialebenen angehören, legt durch dieselben und die vertihale Spur der angegebenen Geraden gerade Linien, so werden diese die gesuchten vertikalen Spuren der Ebenen sein, welche den Cy-

linder tangiren und parallel zur gegebenen Geraden sind. —

Anmerk. Ist eine Gerade angegeben, durch welche eine Tangentialebene an den Cylinder gelegt werden soll, so ist die Aufgabe im Allgemeinen unmöglich. Nur dann würde die Lösung möglich sein, wenn die Berührungserzeugende der zu suchenden Tangentialebene mit jener Geraden in einer Ebene liegt.

§. 266.

Aufgabe 24. Es ist ein Conus durch seine horizontale Spur und die Projektionen seines Centrums angegeben; man soll für einen auf dem Conus liegenden und angegebenen Punkt an denselben eine Tangentialebene legen.

Auflösung. In §. 252. wurde gezeigt, dass eine jede abwickelbare Fläche von einer Ebene nach einer Lage der Erzeugenden tangirt wird, auf welcher sich der Berührungspunkt befindet, folglich hat auch der Conus mit der gesuchten Tangentialebene eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich. Hat man daher aus der einen Projektion des Berührungspunktes, die angegeben ist, nach §. 243. seine andere Projektion bestimmt, und man legt durch diesen Punkt (§. 72.) eine Gerade, die durch das Centrum des Conus geht, so wird diese die Berührungserzeugende desselben mit der gesuchten Tangentialebene sein. Nun weis man ferner, dass

1. jeder Punkt dieser Berührungserzeugenden als Berührungspunkt angenommen werden kann, und
2. die horizontale Spur des gegebenen Kegels (§. 254.) von der horizontalen Spur der Tangentialebene tangirt wird.

Bestimmt man daher die horizontale Spur der Berührungserzeugenden, (was leicht geschehen kann, weil dieselbe der Durchschnitt der horizontalen Spur des Conus mit der horizontalen Projektion der Berührungserzeugenden ist), zieht durch dieselbe eine Tangente an die horizontale Spur des Conus, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene. Um nun die vertikale Spur dieser Ebene zu bestimmen, kann man wieder zwei Mittel benützen, durch welche man zwei Punkte jener Spur bestimmen kann.

1. Bestimme man die vertikale Spur der Berührungserzeugenden (§. 93.), so wird dieselbe durch die vertikale Spur der Tangentialebene gehen müssen.
2. Nehme man (§. 73.) auf der Berührungserzeugenden einen beliebigen Punkt an, lege durch denselben eine Gerade, die parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene ist, so wird diese (§. 120., Anmerk. 2.) in der Tangentialebene liegen müssen. Sucht man daher von dieser Parallelen die vertikale Spur, und legt durch letztere und die vertikale Spur der Berührungserzeugenden eine Gerade, so wird diese letztere die vertikale Spur der gesuchten Tangentialebene sein müssen.

Anmerk. Jedenfalls muss dieser letzte Punkt so gewählt werden, dass die durch denselben mit der horizontalen Spur der Tangentialebene gezogene Parallele noch die vertikale Tafel trifft. Sollte ferner die vertikale Spur der Berührungserzeugenden nicht angegeben werden können, so hat man das in (2) angegebene Verfahren zu wiederholen, und man wird hierdurch noch einen zweiten Punkt der vertikalen Spur der Tangentialebene erhalten, so dass letztere wieder leicht bestimmt werden kann.

§. 267.

Beispiel. (Fig. 160.) Ist ABCDE ein in der horizontalen Tafel liegender Kreis, der die horizontale Spur eines Conus ist, S die horizontale und S′ die vertikale Projektion des Centrums, so kann man (§. 243.) die Projektionen des Conus angeben, und es ist SABCDE seine horizontale und S′A′E′ seine vertikale Projektion. Nun sei m′ die horizontale Projektion des Berührungspunktes, dessen vertikale Projektion angegeben werden muss, so ziehe man Sm, verlängere diese bis zu ihrem Durchschnittspunkte D mit der horizontalen Spur des Conus, so ist D die horizontale Spur der Berührungserzeugenden. Zieht man nun DD′ senkrecht auf X, und sodann die Gerade D′S′, so ist letztere die vertikale und DS die horizontale Projektion der Berührungserzeugenden. Von m aus auf X die Gerade mm′ senkrecht gezogen, so wird (§. 73.) im Durchschnittspunkte m′ dieser Senkrechten mit S′D′ die vertikale Projektion des Berührungspunktes erhalten. Nun kann man aber, weil die gesuchte Ebene die konische Fläche nach der ganzen Geraden (SD, S′D′) berührt, jeden Punkt der letzteren als Berührungspunkt betrachten, folglich auch den Punkt D, welcher die horizontale Spur der Berührungserzeugenden ist. Zieht man daher DS_1 tangirend an die Kreislinie ABCDE (nach §. 205.), so wird diese Gerade S_1DE_1 die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene (§. 254.) sein. Verlängert man nun SD bis zum Durchschnitte s_1 mit X, zieht sodann $s_1s'_1$ senkrecht auf X, und verlängert m′D′ bis zu ihrem Durch-

schnitte mit $S_1 s'_1$, so ist s'_1 (§. 93.) die vertikale Spur der Berührungserzeugenden. Zieht man daher die Gerade $S_1 s'_1$, so wird hierdurch die vertikale Spur der gesuchten Tangentialebene erhalten werden, und mithin ist $E_1 S_1 'E_1$ die Ebene, welche den Conus (SABCD, 'S'A E') tangirt, und deren Berührungspunkt (m, m') ist.

§. 268.

Auch hier wollen wir wieder untersuchen, welche Bedingung gegeben sein darf, damit die Tangentialebene eines Conus völlig bestimmt ist und ihr Berührungspunkt angegeben werden kann. Eine jede Ebene ist nämlich der Lage nach durch einen Punkt und eine Gerade völlig bestimmt; ebenso durch zwei sich schneidende und durch zwei parallele Gerade. Da nun die Tangentialebene eines Conus mit letzterem eine Lage seiner Erzeugenden gemeinschaftlich hat, so kann die Tangentialebene nur noch durch einen bestimmten Punkt gehen, oder eine Gerade enthalten, welche die Berührungserzeugende schneidet, oder endlich eine Gerade enthalten, die mit der Berührungserzeugenden parallel ist. Ausserdem wird sie auch parallel sein können mit einer Ebene, die parallel zur Berührungserzeugenden ist, oder mit einer beliebigen Geraden parallel sein können, ohne dass sie den Conus schneidet. Es folgt also hieraus, dass wenn der Berührungspunkt einer Tangentialebene für einen Conus nicht gegeben ist, folgende Bestimmungsstücke angegeben sein können:

1. Ein Punkt, der ausserhalb der konischen Oberfläche liegt, und durch welchen die Tangentialebene gehen soll.
2. Eine Gerade, mit welcher die Tangentialebene parallel gelegt werden soll.
3. Eine Gerade, von welcher man gewiss weis, dass dieselbe mit der Berührungserzeugenden der gesuchten Tangentialebene in einer Ebene liegt, also mit jener parallel ist, oder dieselbe schneidet.

§. 269.

Aufgabe 25. Es ist ein Conus durch seine horizontale Spur und sein Centrum gegeben; man soll durch einen ausserhalb des Conus angegebenen Punkt eine Ebene legen, welche jenen berührt.

Auflösung. Durch den angegebenen Punkt wird man zwei Ebenen legen können, welche den Conus berühren, wenn der letztere eine geschlossene Curve als horizontale Spur hat, und diese beiden Ebenen schneiden sich nach einer Geraden, die durch den gegebenen Punkt und zugleich (nach §. 257.) durch das gegebene Centrum des Conus geht. Von dieser Geraden liegt aber jeder Punkt in der gesuchten Tangentialebene, folglich geht die horizontale Spur der letzteren durch die horizontale Spur jener Geraden, und da die horizontalen Spuren der Tangentialebenen zugleich Tangenten der horizontalen Spuren des Conus sein müssen, so wird man zur Bestimmung der horizontalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen folgende Regel anwenden:

1. Ziehe man vom angegebenen Punkte aus nach dem Centrum des Conus eine Gerade (nach §. 73.).
2. Bestimme man (§. 93.) die horizontale Spur der letzteren, und ziehe durch diese an die horizontale Spur des Conus Tangenten, so werden diese die horizontalen Spuren der beiden Tangentialebenen des Conus sein, welche durch den angegebenen Punkt gehen.
3. Zur Bestimmung der vertikalen Spuren beider Tangentialebenen kann man die vertikale Spur der Geraden angeben, die das Centrum und den gegebenen Punkt verbindet; sodann noch durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden eine Parallele zu den horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen ziehen und von diesen die vertikalen Spuren suchen, so wird durch die eine der letzteren die vertikale Spur der einen und durch die andere die vertikale Spur der andern Tangentialebene gehen müssen.

Anmerk. Man kann zur Bestimmung der vertikalen Spuren beider Tangentialebenen ihre Berührungserzeugenden suchen und das in (§. 267. 2.) angegebene Verfahren benützen.

§. 270.

Beispiel. (Fig. 161.) Ist ABCD ein in der horizontalen Tafel liegender Kreis, nach welchem ein Conus, dessen Centrum der Punkt (S, 'S) ist, die horizontale Tafel trifft, so projicire man ABCD (nach §. 70.) vertikal, und es wird 'A'C seine vertikale Projektion sein. Zieht man nun die Geraden (A S, 'A S'), (B S, B'S') etc. etc., so erhält man einzelne Lagen der Erzeugenden des

Conus, wodurch also letzterer bestimmt werden kann. Nun sei (m, m') ein gegebener Punkt, man soll durch denselben an den Conus (A B C D S, 'A C' S') eine Tangentialebene legen. Zieht man S m und S' m', so wird man die Projektionen der Communsektion der beiden durch (m, m') gehenden und den gegebenen Conus tangirenden Ebenen erhalten, und von welcher die horizontale Spur s_2 und die vertikale Spur s_1 (nach §. 93.) bestimmt wurde. Legt man nun (§. 206.) durch s_2 an die Kreislinie A B C D die Geraden $s_2 b_1$ und $s_2 b_2$ tangirend, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden gesuchten Tangentialebenen. Diese Punkte b_1 und b_2 (nach §. 70.) vertikal projicirt, und durch die erhaltenen Punkte b'_1 und b'_2 die Geraden $b_1 S$, $b'_1 S'$, $b_2 S$, $b'_2 S'$ gezogen, so erhält man die Projektionen der Berührungserzeugenden beider Ebenen. Zieht man nun durch den Punkt S_2, in welchem die horizontale Spur der zweiten Tangentialebene die Axe X trifft nach s'_1 die Gerade $S_2 s'_1$, so wird letztere die vertikale Spur dieser Tangentialebene, und $E_2 S_2 E'_2$ diese letztere selbst sein. Da die horizontale Spur $s_2 b_1$ oder E_1 der ersten Tangentialebene die Axe X nicht mehr trifft, so müssen wir von der vertikalen Spur dieser Ebene zwei Punkte angeben, um jene Spur bestimmen zu können. Der Punkt s'_1 gehört schon dieser Spur an, nimmt man nun auf ($S b_1$, '$S b'_1$) den Punkt (a, a') (nach §. 73.) an, zieht a, $s_3 \neq E_1$ und a' $s'_4 \neq X$, so erhält man die Projektionen einer Geraden, die in der ersten Tangentialebene liegen muss, folglich wird die vertikale Spur s'_3 dieser Geraden in der vertikalen Spur dieser Ebene liegen müssen. Zieht man nun $s'_1 s'_3$, so erhält man die vertikale Spur 'E_1 der ersten Tangentialebene. —

§. 271.

Aufgabe 25. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine konische Fläche eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Soll eine Ebene parallel zu einer Geraden sein, so muss sie eine Gerade enthalten, die parallel zu jener ist. Legen wir daher durch das Centrum des Conus eine Parallele zur gegebenen Geraden, so wird diese ganz und gar in der gesuchten Tangentialebene liegen, weil diese durch das Centrum des Conus geht und parallel zur gegebenen Geraden ist. Bestimmt man nun von dieser Parallelen die horizontale Spur, und legt durch letztere an die horizontale Spur der Fläche Tangenten, so erhält man die horizontalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen. Die vertikalen Spuren derselben können nun leicht bestimmt werden, indem man

1. die vertikale Spur der durch das Centrum mit der gegebenen Geraden gezogenen Parallelen benützen kann.
2. Die Berührungserzeugenden ziehen und hierdurch Punkte der vertikalen Spuren der Tangentialebenen angeben kann.

§. 272.

Beispiel. (Fig. 162.) Es sei A B C D eine in der horizontalen Tafel liegende Ellipse, nach welcher ein Conus, der sein Centrum im Punkte (S, S') hat, die horizontale Tafel trifft, man soll parallel zur Geraden (L, 'L) an den gegebenen Conus eine Tangentialebene legen. Zieht man durch 'S die Gerade '$S s'_1 \neq$ 'L und durch S die Gerade $S s_2 \neq L$, so erhält man eine Gerade ($S s_2$, $S' s'_1$), die in der gesuchten Tangentialebene liegt. Von s'_1 auf X die Gerade $s'_1 s_1$ senkrecht gezogen, und diese Senkrechte sowohl, als $S s_2$ verlängert, bis sich beide treffen, so erhält man in s_1 die horizontale Spur der Geraden ($S s_2$, $S' s_1$). Legt man daher (§. 211.) durch s_1 die Geraden $s_1 b_1$ und $s_1 b_2$, dass dieselben die Ellipse A B C D tangiren, so wird man hierdurch die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen erhalten. Da nun diese beiden Spuren die Axe X in den Punkten S_1 und S_2 treffen und s'_2 die vertikale Spur der in den gesuchten Ebenen enthaltenen Geraden ($S s_2$, $S' s'_1$) ist, so werden die Geraden $s'_2 S_1$ und $s'_2 S_2$ die vertikalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen sein. Man hat also die beiden Ebenen $E_1 S_1 E'_1$ und $E_2 S_2 E'_2$, welche parallel zur gegebenen Geraden (L, L') sind und den gegebenen Conus tangiren.

§. 273.

Aufgabe 26. Es ist der Berührungspunkt einer beliebigen abwickelbaren Fläche gegeben; man soll durch denselben an die Fläche eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Es wurde in §. 252 gezeigt, dass eine abwickelbare Fläche von einer Ebene nach einer ganzen Erzeugenden berührt wird; ferner wurde in §. 254. nachgewiesen, dass die horizontale Spur der Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche Tangente der horizontalen Spur der Fläche ist und endlich geht aus §. 252. hervor, dass man jeden Punkt der Berührungserzeugenden als Berührungspunkt annehmen kann. Hieraus geht nun die Regel hervor, an eine abwickelbare Fläche eine Tangentialebene zu legen, die durch einen

gegebenen Punkt der Fläche geht, uud diese ist folgende:

1. **Lege man durch den gegebenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche, so gehört diese der Tangentialebene an.**
2. **Bestimme man von dieser die horizontale Spur, und lege durch letztere an die horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Ebene.**
3. **Bestimme man die vertikale Spur der Berührungserzeugenden, so wird dieser Punkt der vertikalen Spur der Tangentialebene angehören; nehme sodann auf der Berührungserzeugenden einen Punkt noch an, und ziehe durch diesen eine Parallele mit der horizontalen Spur der Tangentialebene, suche von dieser Parallelen die vertikale Spur, und ziehe durch letztere nach der vertikalen Spur der Berührungserzeugenden eine Gerade, so wird diese die vertikale Spur der gesuchten Ebene sein.**

(Fig. 156.) Soll z. B. für die entwickelbare Schraubenfläche eine Tangentialebene bestimmt werden, deren Berührungspunkt durch seine Projektionen (B_1, $'B_1$) angegeben ist, so lege man durch diesen Punkt die Erzeugende der Fläche ($B_1 B_2$, $B'_1 B'_2$), durch die horizontale Spur B_1 dieser Erzeugenden lege man an die Evolvente $A B_1 Q_1$ eine Tangente, so erhält man die horizontale Spur der Tangentialebene, von welcher nun die vertikale Spur leicht angegeben werden kann, wenn man die in (3.) gegebenen Mittel benützt.

§. 274.

Aufgabe 27. **Durch einen ausserhalb einer entwickelbaren Fläche angegebenen Punkt an diese eine Tangentialebene zu legen.**

Auflösung. Da eine entwickelbare Fläche (§. 252.) von einer Ebene nach einer ganzen Erzeugenden berührt wird, so ist diese Aufgabe eine ganz bestimmte. Um nun dieselbe zu lösen, denken wir uns die horizontale Tafel so weit parallel zu ihrer ersten Lage verschoben, bis dieselbe den gegebenen Punkt enthält, bestimmen ihre neue horizontale Spur, indem wir die Durchgangspunkte einer grossen Anzahl von Lagen ihrer Erzeugenden mit der neuen horizontalen Tafel bestimmen, und diese Punkte sodann durch eine stätige Curve verbinden. Legen wir nun an letztere eine Tangente, die durch den gegebenen Punkt geht, so erhielte man hierdurch die horizontale Spur der Tangentialebene (§. 254.), wenn die horizontale Tafel in der verlangten Lage wäre. Da aber diese Tangente zur vertikalen Projektion eine mit X parallele Gerade hat, und zur horizontalen Projektion eine Tangente an die neue horizontale Spur der Fläche, so wird dieselbe jedenfalls, weil sie noch ausserdem den gegebenen Punkt enthält, in der gesuchten Tangentialebene liegen, und zwar eine Parallele zur horizontalen Spur der letzteren sein. Zieht man daher parallel zur horizontalen Projektion dieser Parallelen an die erste horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene sein. Die vertikale Spur der letzteren wird man bestimmen können, wenn man die Berührungserzeugende sucht, und die früher (in §. 273., 3.) angegebenen Mittel benützt.

§. 275.

Aufgabe 28. **Parallel zu einer gegebenen Geraden an eine entwickelbare Fläche eine Tangentialebene zu legen.**

Auflösung. Um diese Aufgabe zu lösen, wollen wir eine der Tafeln parallel zur gegebenen Geraden legen, und die Spur der Fläche für diese neue Lage der Tafel bestimmen. Nun wissen wir (§. 254.), dass die entsprechende Spur der Tangentialebene Tangente der Spur der Fläche sein muss, ferner muss die Tangentialebene parallel zur gegebenen Geraden sein, und folglich ist die Communsektion der Tangentialebene mit der Tafel, die zur gegebenen Geraden parallel ist, eine Parallele zu dieser Geraden. Legen wir daher die horizontale Tafel parallel zur gegebenen Geraden, (mithin so, dass die Axe X parallel zur vertikalen Projektion der Geraden wird), und suchen die horizontale Spur der Fläche, legen sodann an diese Spur eine Tangente parallel zur (horizontalen Projektion der) Geraden, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene, und kann zugleich die Berührungserzeugende der letzteren konstruiren. Durch diese Berührungserzeugende kann man nun auch die vertikale Spur der Tangentialebene angeben. Sollte man die horizontale Tafel in eine ihr schon vorher gegebene Lage wieder zurückbringen, so ist zwar jene an die neue horizontale Spur der Fläche parallel zur gegebenen Geraden gezogene Gerade nicht die horizontale Spur der Tangentialebene, allein in dieser ist jene Parallele enthalten, und die Berührungserzeugende ist ebenfalls der Tangentialebene angehörig, so dass also hierdurch die Tangentialebene dennoch bestimmt

werden kann, wenn auch die horizontale Tafel in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht wurde, in welcher sie nicht parallel zur gegebenen Geraden ist.

Viertes Kapitel.

Durchschnitte entwickelbarer Flächen durch Ebenen, Construktion dieses Durchschnittes, Entwickelung derselben und des zwischen dem letzteren und der Direktrix enthaltenen Theiles der Fläche.

§. 276.

Der Durchschnitt einer Fläche und einer Ebene ist eine Linie und zwar diejenige ebene Curve, welche der Ort aller Durchschnittspunkte der Erzeugenden der Fläche mit der Durchschnittsebene ist.

§. 277.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene geschnitten, die parallel zur Ebene der Direktrix ist, so erhält man (§. 256.) eine der Direktrix kongruente Figur, in jedem andern Falle aber erhält man eine von der Direktrix verschiedene Durchschnittsfigur. Wird nun ein Kegel von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Direktrix ist, und wir sollen den Schnitt untersuchen, so wollen wir zu diesem Zwecke um die Direktrix des Kegels ein Polygon von einer beliebigen Anzahl Seiten beschreiben, ohne diese Seitenzahl zu berücksichtigen, sodann dieses Polygon als Direktrix einer Pyramide betrachten, welche mit dem Kegel ein gemeinschaftliches Centrum hat. Diese Pyramide wird nun von der Durchschnittsebene des Kegels nach einem Polygone geschnitten, das um die gesuchte Durchschnittsfigur des Kegels und in jener Ebene beschrieben ist, und statt dieser Figur, weil man ihre Seitenzahl unberücksichtigt lässt, gesetzt werden kann. Es ist aber dieses Polygon, nach welchem die Pyramide von der Durchschnittsebene geschnitten wird, (§. 178.) ähnlich der Direktrix, folglich muss auch die Figur, nach welcher der Kegel von der mit seiner Direktrix parallelen Ebene geschnitten wird, der Direktrix ähnlich sein. Hieraus folgt also der Satz:

Schneidet man einen Kegel durch eine Ebene, die parallel zur Direktrix ist, so erhält man eine der Direktrix ähnliche Figur; oder allgemein: schneidet man einen Kegel durch mehrere parallele Ebenen, so erhält man ähnliche Durchschnittsfiguren.

Anmerk. Dieser Satz wurde seiner grossen Wichtigkeit und Anwendung halber nochmals erwähnt. Wir ersehen hieraus ferner, dass die für die Pyramide (§. 178. und §. 179.) bewiesenen Sätze auch für den Kegel gelten, weil man denselben mit einer Pyramide vertauschen kann, die dasselbe Centrum und eine Direktrix hat, die statt der des Kegels gesetzt werden kann, wenn auf ihre Seitenzahl nicht Rücksicht genommen wird.

§. 278.

Aufgabe 29. Es ist ein Cylinder gegeben, der von einer Ebene geschnitten wird, man soll

1. die Projektionen der Durchschnittslinie,
2. ihre wahre Grösse bestimmen,
3. für einen beliebigen Punkt derselben eine Tangente an dieselbe legen.
4. den zwischen der Durschschnittsebene und der Direktrix enthaltenen Theil des Cylinders entwickeln, und an den entwickelten Schnitt eine Tangente legen.

Auflösung. Ad. 1. Um diese Aufgabe zu lösen, lege man vor Allem das Coordinatensystem so, dass die Construktionen nicht zu unbequem werden. Man lege daher die horizontale Tafel senkrecht auf die Richtung der Erzeugenden des Cylinders und die vertikale Tafel senkrecht auf die Durchschnittsebene, so wird die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur (§. 83. Anmerk.) in der vertikalen Spur der Schnittebene liegen und derjenige Theil dieser Spur sein, welcher zwischen den äussersten Erzeugenden des Cylinders liegt; die horizontale Projektion des Schnittes wird, weil die Erzeugende in allen ihren Lagen diesen Schnitt treffen wird, und auf der horizontalen Tafel senkrecht bleibt, mit der horizontalen Spur des Cylinders zusammenfallen. Hierdurch ist die erste Aufgabe gelöst.

Ad. 2. Um die wahre Grösse der Durchschnittscurve zu bestimmen, kann man entweder die Durchschnittsebene umlegen, und in dieser so viele Punkte der Durchschnittslinie angeben (§. 230.), dass man durch stätige Verbindung derselben dieselbe ziehen kann; oder man kann die Schnittebene so weit drehen, bis dieselbe parallel zur horizontalen Tafel wird, die einzelnen Punkte der Durchschnittslinie bei dieser Drehung verfolgen, und ihre andern Pro-

jektionen bestimmen, so wird die neue Projektion dieser Linie ihre wahre Grösse angeben. Um aber diese neue horizontale Projektion zu erhalten, nehmen wir eine auf der vertikalen Tafel senkrecht stehende Gerade an, um welche sich die Ebene während ihrer Bewegung bis zum Parallelismus mit der horizontalen Tafel dreht, so wird jeder Punkt einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist. Es beschreibt daher jeder Punkt der Durchschnittslinie einen Kreisbogen, dessen Ebene parallel zur vertikalen, und mithin senkrecht auf der horizontalen Tafel ist; folglich beschreibt die vertikale Projektion eines jeden Punktes der Durchschnittslinie einen Kreisbogen, dessen Halbmesser so gross ist, als die Entfernung des betreffenden Punktes von der vertikalen Spur der Drehungsaxe. Da nun die Durchschnittsebene auch senkrecht auf der vertikalen Tafel bleibt, wenn sie parallel zur horizontalen Tafel gedreht wurde, so wird in ihre neue vertikale Spur, welche eine durch die vertikale Spur der Drehungsaxe mit X gezogene Parallele ist, die neue vertikale Projektion der Durchschnittslinie zu liegen kommen. Nimmt man daher auf der vertikalen Projektion der Durchschnittslinie eine beliebige Anzahl von Punkten an, beschreibt sodann von der vertikalen Spur der Drehungsaxe aus mit den Entfernungen jener Punkte von dieser Spur aus letzterem Punkte Kreisbögen, so werden die Durchschnittspunkte dieser Kreisbögen mit der neuen vertikalen Spur der Schnittebene die neuen vertikalen Projektionen von Punkten der Durchschnittslinie sein. Hiezu sollen jetzt die horizontalen Projektionen angegeben werden. Die horizontale Projektion eines jeden Punktes der Durchschnittsfigur wird in der Spur der Ebene des Kreisbogens liegen, den der Punkt beschreibt, und da diese horizontalen Spuren der Kreisbögen Parallele zur Axe sind, so hat man nur von den horizontalen Projektionen der angenommenen Punkte der Durchschnittslinie Parallele zur Axe X zu ziehen, und diese von Geraden zu durchschneiden, die senkrecht auf X durch die neuen vertikalen Projektionen von Punkten der Durchschnittslinie gezogen werden. Die erhaltenen Durchschnittspunkte in gehöriger Ordnung stätig verbunden, geben die neue horizontale Projektion der Durchschnittslinie, welche gleich ihrer wahren Grösse ist.

Ad. 3. Ist ein Punkt auf dem Durchschnitte durch seine Projektionen angegeben, und man soll für diesen eine Tangente der Durchschnittslinie finden, so lege man für diesen Punkt an die Cylinderfläche (nach §. 258.) eine Tangentialebene, und es muss sodann in dieser (§. 232.) die gesuchte Tangente enthalten sein, weil die Curve, für welche durch den angegebenen Punkt eine Tangente gezogen werden soll auf der Cylinderfläche sich befindet. Die gesuchte Tangente muss sich aber auch auf der Schnittebene befinden, weil jene in der Ebene der Durchschnittslinie liegen muss; folglich ist die gesuchte Tangente der letzteren, Communsektion der Schnittebene und der durch den angegebenen Punkt an die Cylinderfläche gelegten Tangentialebene. Um also für einen beliebigen Punkt der Durchschnittscurve an diese eine Tangente zu ziehen, lege man durch diesen Punkt eine Tangentialebene an den Cylinder (§. 258.), suche den Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene der Curve (§. 110.), so wird diese Communsektion die Durchschnittslinie des Cylinders und der angegebenen Ebene tangiren, und daher die gesuchte Gerade sein.

Bei der Aufsuchung der wahren Grösse der Durchschnittslinie kann man auch die Lage ihrer Tangente angeben. Es liegt nämlich letztere in der Schnittebene, und man kann daher den Berührungspunkt sowohl, als noch einen zweiten Punkt der Tangente angeben, wenn man beim Umlegen der Durchschnittsebene in eine der Tafeln die in §. 130. angegebenen Regeln befolgt. Diese zwei Punkte verbinde man durch eine Gerade, so erhält man die Tangente der Durchschnittsfigur.

Ad. 4. Nun soll der zwischen der Durchschnittsebene und der horizontalen Tafel enthaltene Theil der gegebenen Cylinderfläche entwickelt werden. Aus §. 244. ist bekannt, dass wenn man einen Cylinder durch eine Ebene schneidet, die senkrecht auf der Richtung seiner Erzeugenden ist, die Durchschnittslinie bestimmt, und sodann den Cylinder entwickelt, diese Durchschnittslinie sich nach der Entwickelung in eine Gerade verwandelt, welche gleich ihrer ursprünglichen Länge ist, und senkrecht auf der Richtung der Erzeugenden des Cylinders bleibt; die einzelnen Lagen der Erzeugenden aber ihre Längen nicht ändern. Ein solcher senkrechter Schnitt des Cylinders ist aber im vorliegenden Falle schon bekannt, nämlich die horizontale Spur des Cylinders (weil die horizontale Tafel senkrecht auf der Richtung jener Erzeugenden steht); theilt man daher die horizontale Spur des Cylinders in gleiche Theile und zwar in so viele, dass jeder einzelne Theil als eine Gerade angenommen werden kann, zieht eine beliebige Gerade, und trägt auf diese alle Elemente der horizontalen Spur des Cylinders nach und nach, so ist hierdurch diese horizontale Spur entwickelt.

Zieht man nun ferner durch die einzelnen Theilungspunkte der horizontalen Spur des Cylinders Parallele zu seiner Erzeugenden, so werden die zwischen der Axe X und der vertikalen Spur der Schnittebene enthaltenen Theile dieser Parallelen gleich den wahren Längen derjenigen Theile dieser Parallelen sein, die sich zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene befinden. Wenn man also von den einzelnen Theilpunkten der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders senkrechte Gerade auf letztere fällt, und jede so lang macht, als der Theil der entsprechenden Lage der Erzeugenden lang ist, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene liegt, sodann die einzelnen Endpunkte jener Senkrechten durch Gerade in gehöriger Ordnung verbindet, so erhält man eine Curve, welche gleich der entwickelten Durchschnittslinie ist, und die zwischen dieser Linie und der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders enthaltene Figur wird von der Cylinderfläche denjenigen entwickelten Theil angeben, der zwischen der horizontalen Tafel und der Durchschnittsebene liegt. —

Um endlich noch an die entwickelte Durchschnittscurve eine Tangente für den auf ihren Projektionen angegebenen Berührungspunkt zu bestimmen, ziehe man durch den Berührungspunkt eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, und suche ihre wahre Lage in der entwickelten Fläche, so wird ihr Durchschnitt mit der entwickelten Durchschnittslinie den Berührungspunkt der Tangente dieser Linie angeben. Diese Tangente macht aber mit dieser Erzeugenden nach der Entwickelung denselben Winkel, unter welchem sich vorher diese beiden Linien neigten (nach §. 245.); sucht man daher (nach §. 134.) diesen Winkel, und legt denselben in dem Berührungspunkte der entwickelten Durchschnittslinie an die entsprechende Lage der Erzeugenden, so erhält man die gesuchte Tangente des entwickelten Schnittes. Diese Tangente für den auf dem entwickelten Schnitte angegebenen Berührungspunkt kann auch auf andere Weise noch erhalten werden. Verlängert man nämlich die Tangente bis zur horizontalen Tafel, so wird der zwischen ihrer horizontalen Spur und dem angegebenen Berührungspunkte enthaltene Theil derselben (§. 88.) die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes sein, dessen eine Kathete die vertikale Ordinate des Berührungspunktes (also die Länge der schon angegebenen Berührungserzeugenden) ist, und dessen andere Kathete gleich dem Theile der horizontalen Projektion der Tangente sein muss, welcher zwischen der horizontalen Projektion des Berührungspunktes und der horizontalen Spur der Tangente liegt. Trägt man daher diese Kathete von dem Fusspunkte der Berührungserzeugenden (ihrem Durshschnittspunkte mit der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders) aus auf die entwickelte horizontale Spur des Cylinders, so wird der hierdurch erhaltene Endpunkt der Tangente des entwickelten Schnittes angehören. Von diesem Punkte aus nach dem Berührungspunkte eine Gerade gezogen, gibt daher die gesuchte Tangente. —

§. 279.

Beispiel. (Fig. 163.) Es sei A L G D die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, 'A P R G' die vertikale Projektion dieses Cylinders und $S_1 S 'S_1$ eine Ebene, welche den Cylinder schneidet; man soll die im vor. §. gelösten Aufgaben an diesem Beispiele zeigen.

1. Da der Cylinder senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird (nach §. 278. 1.) A B C D E G L die horizontale und 'a g' die vertikale Projektion der Durchschnittslinie des Cylinders mit Ebene $S_1 S 'S_1$ sein.
2. Legt man Ebene $S_1 S S'_1$ um $S 'S_1$ in die vertikale Tafel, zieht sodann die Senkrechten $'a A_1$, $'b B_1$, $'c C_1$, $'d D_1$, $'e E_1$, $'f F_1$, $'g G_1$, und macht $'a A_1 = A 'A$, $'b B_1 = BB'$, $'c C_1 = 'C C$ etc. etc., verbindet die hierdurch erhaltenen Punkte A_1, B_1, C_1 etc. etc. durch eine stätige Curve, so erhält man die Linie $A_1 D_1 G_1 L_1$, welche die wahre Grösse des gesuchten Durchschnittes ist.

Um die wahre Grösse auch nach der zweiten Methode anzugeben, nehme man die Gerade (D D', d') als Drehungsaxe, und drehe die Ebene $S_1 S 'S_1$ um (D D', d') so weit, bis dieselbe parallel zur horizontalen Tafel wird, so bleiben vor Allem die Punkte (D, d') und (L, d') der Durchschnittscurve liegen, die vertikale Spur der Schnittebene $S_1 S 'S_1$ kömmt aber nach $s'_1 g'_1$ zu liegen, nämlich nach der Geraden, welche durch d' parallel zu X gezogen werden kann. Beschreibt man nun von d' aus mit den Längen d' S, d' a', d' b' etc. etc. als Halbmesser die Kreisbögen S s', $a' a'_1$, $b' b'_1$, etc. etc., so erhält man die Punkte s'_1, a'_1, b'_1, c'_1 etc. etc., welche die neuen vertikalen Projektionen der Punkte (s, S), (A, a'), (B, b') etc. etc. sind, und mithin ist $a'_1 g'_1$ die neue vertikale Projektion der Durchschnittslinie. Zieht man nun $s s_1 \neq A a_1 \neq B b_1 \neq C c_1 \neq D d_1$ etc. etc. $\neq$ X, sodann $'a_1 a_1 \neq 'b_1 b_1 \neq c' c_1 \neq d' d_1$ etc. etc. $\neq$ D' d', so erhält man die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 etc. etc., welche die neuen ho-

rizontalen Projektionen der Punkte (s, S), (A, a'), (B, b'), C, c'), D, d') etc. etc. sind. Zieht man nun die krumme Linie a_1 L g_1 D, so erhält man die neue horizontale Projektion der Durchschnittslinie, welche zugleich die wahre Grösse dieses Durchschnittes angibt.

3. Um nun für den Punkt (C, c') eine Tangente an die Durchschnittslinie zu ziehen, wissen wir (aus §. 256.), dass die Projektionen der Tangente einer Curve, Tangenten der Projektionen der Curve für die Projektionen des Berührungspunktes sind; wir werden daher (nach §. 205.) durch C an die Linie A D G L die Tangente C s ziehen, so wird letztere die horizontale Projektion der gesuchten Tangente sein, die vertikale Projektion der letzteren aber wird mit a' g' zusammenfallen. Bei der Umdrehung der Ebene um (D D', d') bis zum Parallelismus zur horizontalen Tafel, wird der Punkt (C, c') nach (c_1, c'_1) kommen und die horizontale Spur s der Tangente (C s, c' S) nach (s, s'); zieht man die Gerade $c_1 s_1$, so ist letztere die Tangente der Durchschnittslinie a_1 D g_1 L für den Punkt (c_1, c'_1). — In der Durchschnittslinie $A_1 D_1 G_1 L_1$ ist C_1 der wahre Ort des Punktes (C, c'), und da bei der Umlegung der Ebene $S_1 S' S_1$ in die vertikale Tafel s nach s_2 kömmt, (wobei nach §. 130. $s_2 S = S'S_1$ und $s_2 S = S s$ gemacht wurde), so wird $C_1 s_2$ die Tangente der Linie $A_1 D_1 G_1 L_1$ sein. —

4. Zieht man die beliebige Gerade $Y_1 Y_2$, trägt auf diese die Theile des senkrechten Schnittes A D G L auf, indem man $A_2 B_2 = B_2 C_2 = C_2 D_2$ = etc. etc. = $N_2 A_2$ = A B macht, so wird $A_2 A_2$ = A D G L sein. Errichtet man nun die Geraden $A_2 a_2$, $B_2 b_2$, $C_2 c_2$ etc. etc. senkrecht auf $Y_1 Y_2$, macht $A_2 a_2$ = 'A 'a, $B_2 b_2$ = 'B'b, $C_2 c_2$ = 'C 'c etc. etc., und verbindet die Punkte a_2, b_2, c_2 etc. etc. stätig, so wird die Curve $a_2 g_2 a_2$ die Entwickelung der Durchschnittslinie (A D G L, a' g'), und $a_2 g_2 a_2 A_2 A_2$ die Entwickelung des Cylinderstückes (A D G L, 'a g') sein. Macht man nun $C_2 s_3$ = C s, und zieht $c_2 s_2$, so ist diese Gerade $c_2 s_3$ die Tangente der Linie $a_2 g_2 a_2$ für den Punkt c_2, dessen Projektionen die Punkte C und 'c sind. —

§. 280.

Aufgabe 30. Ein beliebiger Cylinder ist von einer Ebene geschnitten, die auf keiner der Tafeln senkrecht steht; man soll

1. die Durchschnittscurve bestimmen;
2. für einen beliebigen Punkt derselben eine Tangente suchen.
3. die wahre Grösse des Durchschnittes angeben, und
4. den zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene enthaltenen Theil der Cylinderfläche entwickeln.

Auflösung. Ad 1. Um die Projektionen des Durchschnittes anzugeben, können wir verschiedene Verfahrungsarten anwenden, durch welche Punkte der Durchschnittscurve erhalten werden:

a. Können wir die horizontale Spur des Cylinders aufsuchen, sodann parallel zur horizontalen Tafel Ebenen legen, welche sowohl den Cylinder, als auch die gegebene Ebene schneiden. Da nun diese einzelnen Durchschnittscurven kongruent der horizontalen Spur des Cylinders sind, so kann man dieselben finden, und es werden die Punkte, in welchen diese einzelnen Schnitte von den Communsektionen der gegebenen Ebene mit den einzelnen Hülfsebenen getroffen werden, dem gesuchten Schnitte angehören. Wäre also z. B. die horizontale Spur des Cylinders ein Kreis, und man schneidet den Cylinder durch eine mit der horizontalen Tafel parallele Hülfsebene, so wird die horizontale Projektion des Durchschnittes wieder ein Kreis von demselben Halbmesser sein, den die horizontale Spur des Cylinders hat. Die Communsektion dieser Hülfsebene und der gegebenen Ebene kann (§. 110.) leicht angegeben werden, indem die vertikale Projektion derselben mit der vertikalen Spur der Hülfsebene zusammenfällt, und ihre horizontale Projektion parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene sein und durch die horizontale Projektion desjenigen Punktes gehen muss, in welchem sich die vertikalen Spuren beider Ebenen schneiden. Die zwei Punkte nun, in welchen diese Communsektion die Durchschnittscurve der Hülfsebene und des Cylinders trifft, gehören dem gesuchten Schnitte an, und es können durch genugsame Wiederholung dieses Verfahrens so viele Punkte erhalten werden, als zur Zeichnung jenes Schnittes nothwendig sind. —

b. Legt man parallel zur Erzeugenden des Cylinders eine beliebige Ebene, so schneidet diese (§. 255.) den Cylinder nach Erzeugenden, die mit G_1 und G_2 bezeichnet sein sollen, und erhalten werden können, wenn man durch die Punkte, in welchen die horizontale Spur des Cylinders von der horizontalen Spur der

Hülfsebene getroffen wird, Parallele zur Erzeugenden des Cylinders legt. Die gegebene Ebene wird von der Hülfsebene nach einer Geraden C geschnitten, die mit G_1 sowohl, als auch mit G_2 in einer Ebene, nämlich in der Hülfsebene liegt, und (§. 110.) bestimmt werden kann. Da nun die gegebene Ebene (nach Voraussetzung) den Cylinder schneidet, so wird sowohl G_1 als auch G_2 von C geschnitten, und diese sollen in den Punkten p_1 und p_2 geschnitten werden. Nun liegen aber diese Punkte sowohl auf der Cylinderfläche, als auch auf der gegebenen Ebene, und gehören mithin der gesuchten Durchschnittslinie an, folglich sind p_1 und p_2 zwei Punkte, durch welche diese Linie gehen muss. Auf gleiche Weise kann man zwei andere und überhaupt beliebig viele Punkte finden, die der gesuchten Durchschnittslinie angehören. Verbindet man diese Punkte in gehöriger Ordnung durch eine stätige Curve, so erhält man den gesuchten Schnitt.

c. Endlich können noch Punkte des letzteren dadurch erhalten werden, dass man von einzelnen Lagen der Erzeugenden des Cylinders die Durchgangspunkte mit der gegebenen Ebene aufsucht, diese Punkte werden sodann auch der gesuchten Durchschnittslinie angehören.

Ad. 2. Man lege für den gegebenen Berührungspunkt an den Cylinder eine Tangentialebene, suche die Communsektion der letzteren und der gegebenen Ebene, so wird dieser Durchschnitt die gesuchte Tangente sein.

Ad. 3. Die wahre Grösse des Durchschnittes wird hier am beqemsten erhalten, indem man die Schnittebene um eine ihrer Spuren dreht, in die entsprechende Tafel legt, und nun in dieser die Punkte aufsucht, deren Projektionen (in 1.) bestimmt wurden. Verbindet man diese Punkte in gehöriger Ordnung, so erhält man den gesuchten Schnitt.

Ad. 4. Soll nun der Cylinder mit dem erhaltenen Schnitte entwickelt werden, so lege man eine Ebene senkrecht auf die Richtung der Erzeugenden des Cylinders, suche die Durchschnittslinie (nach 1.), so wird letztere (nach §. 244.) sich bei der Entwickelung des Cylinders in ihrer Länge nicht ändern, und in eine Gerade verwandeln, die senkrecht auf der Erzeugenden des Cylinders steht. Man entwickle daher zuerst den zwischen dieser auf der Erzeugenden des Cylinders senkrechten Ebene und der horizontalen Tafel liegenden Theil des Cylinders, sodann den Theil des letzteren, welcher zwischen jener Hülfsebene und der gegebenen Ebene enthalten ist, so ist hierdurch die Aufgabe gelöst. —

§. 281.

Aufgabe 31. Es ist eine beliebige Curve im Raume angegeben; man soll den Durchschnitt derselben mit einer angegebenen Ebene aufsuchen.

Auflösung. Betrachtet man die gegebene Curve L als Direktrix eines Cylinders C_1, dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht so wird die vertikale Spur 'S dieses Cylinders die vertikale Projektion von L sein. Es wird aber von der angegebenen Ebene E auch C_1 geschnitten und zwar nach einer Linie L_1, welche mit L einige Punkte gemein haben wird, und deren vertikale Projektion 'S sein muss. Diese Punkte liegen aber zugleich in E, und werden mithin dem Durchschnitte von C und E angehören; wenn man daher den Schnitt von C_1 und E horizontal projicirt (nach §. 280.), so wird die horizontale Projektion von L_1, nämlich S, die horizontale Projektion von L schneiden, und hierdurch erhält man die horizontalen Projektionen von Punkten des gesuchten Durchschnittes. Die vertikalen Projektionen dieser Punkte können nun (§. 226.) erhalten werden, wenn man von ihren horizontalen Projektionen aus Senkrechte auf die Axe X zieht, und die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit 'S aufsucht. —

§. 282.

Aus §. 237. ist bekannt, dass jede konische Fläche entwickelbar ist. Ist nun die Grundfläche eines Kegels sowohl, als auch sein Centrum, und mithin auch seine Generatrix gegeben, und man theilt den Umfang der Grundfläche in eine beliebige Zahl gleicher Theile, legt sodann durch jeden Theilungspunkt eine Lage der Erzeugenden, so wird die Kegelfläche in ebenso viele Theile getheilt, und wenn die einzelnen Theile der Direktrix geradlinig sind, so werden die Theile des Kegels als ebene Dreiecke betrachtet werden können, deren Scheitel gemeinschaftlich und im Centrum des Kegels ist, deren Grundlinien aber die Elemente der Direktrix sind. Entwickelt man daher die Kegelfläche, so werden für die Entwickelung, weil man auf die Anzahl der Theile, in welche dieselbe getheilt ist, nicht Rücksicht nimmt, dieselben Sätze gelten, welche in §. 184. für die Entwickelung einer Pyramide angegeben wurden, und mithin können wir folgende Sätze aussprechen:

1. Entwickelt man einen Kegel, so werden die Theile seiner Erzeugenden, welche zwischen dem Centrum und seiner Grundfläche liegen nach der Entwickelung dieselben Längen haben, welche dieselben vor der Entwickelung hatten, und die einzelnen Elemente der Direktrix behalten ihre vorige Längen.
2. Die einzelnen Erzeugenden bilden unter sich und mit den Elementen der entwickelten Direktrix dieselben Winkel, welche sie vorher machten, folglich macht jede Erzeugende mit der durch ihren Endpunkt gehenden Tangente der Entwickelung der Direktrix nach derEntwickelung des Kegels denselben Winkel, welchen dieselbe vor der Entwickelung mit derselben Tangente bildete.
3. Die Direktrix verwandelt sich nach der Entwickelung in eine Linie von ursprünglicher Länge, aber von anderer Form, und es sind also die einzelnen Elemente der entwickelten Direktrix gleich denen der Direktrix, ferner bleiben die Tangenten der Direktrix auch tangirend für ihre Entwickelung.
4. Ist der Kegel ein gerader Kreiskegel, so wird, weil (nach 1.) die einzelnen Erzeugenden derselben nach der Entwickelung ihre vorige Länge behalten, die Direktrix sich in einen Kreisumfang verwandeln, dessen Centrum das des Kegels, und von welchem der Halbmesser gleich der Seite des Kegels ist. In diesem Falle verwandelt sich also der Kegel nach der Entwickelung in einen Kreissektor.

§. 283.

Aufgabe 32. Es sei ein senkrechter Kreiskegel gegeben, welcher von einer Ebene geschnitten wird; man soll

1. den Durchschnitt durch seine Projektionen angeben,
2. die wahre Grösse dieses Durchschnittes bestimmen.
3. für einen beliebigen Punkt der Durchschnittscurve eine Tangente derselben angeben.
4. den zwischen der Schnittebene und der Direktrix enthaltenen Theil der Kegelfläche entwickeln, und an die Entwickelung des Schnittes eine Tangente legen.

Auflösung. Ad. 1. Zur bequemeren Zeichnung des Durchschnittes lege man die horizontale Tafel durch die Ebene der Direktrix (hier der Grundfläche) und die vertikale Tafel senkrecht auf die Schnittebene, so wird der Theil der vertikalen Spur der Schnittebene, welcher zwischen den vertikalen Projektionen der äussersten Erzeugenden des Kegels enthalten ist, die vertikale Projektion des gesuchten Schnittes sein. Um die horizontale Projektion dieses Schnittes zu erhalten, nehme man auf demselben beliebig viele Punkte an, und ziehe durch jeden dieser Punkte Ebenen, die parallel zur horizontalen Tafel sind, so wird jede dieser Ebenen den Kegel nach einem Kreise schneiden, dessen horizontale Projektion diesem Schnitte kongruent ist und in dem Mittelpunkte der gegebenen Grundfläche ihren Mittelpunkt hat. Halbirt man daher die vertikale Spur einer solchen Hülfsebene, und beschreibt mit ihrer Hälfte vom Mittelpunkte der Grundfläche aus in der horizontalen Tafel einen Kreis, durchschneidet sodann den letzteren durch eine auf X senkrecht stehende Gerade, welche vom Durchschnitte der vertikalen Spur der Hülfsebene mit der der gegebenen Ebene gezogen wird, so erhält man die horizontalen Projektionen zweier Punkte, die dem gesuchten Schnitte angehören. Wiederholt man dieses Verfahren, so wird man eine hinreichende Anzahl von Punkten finden können, durch welche die horizontale Projektion des gesuchten Schnittes gehen muss, und bestimmt werden kann. Diese horizontale Projektion kann man auch noch dadurch erhalten, dass man auf der vertikalen Projektion des Schnittes beliebig viele Punkte und eine grosse Anzahl derselben annimmt, durch jeden die vertikale Projektion einer Lage der Erzeugenden des Kegels legt, zu diesen die horizontalen Projektionen sucht, und auf diesen die horizontalen Projektionen jener Punkte aufsucht, deren vertikale Projektionen angegeben sind. —

Ad. 2. Um die wahre Grösse des Schnittes anzugeben, denke man sich die Schnittebene um ihre vertikale Spur gedreht und in die vertikale Tafel gelegt, bestimme dann (nach §. 140.) die Länge der einzelnen Schnittpunkte in dieser umgelegten Ebene, verbinde dieselben durch eine stätige Curve, so wird diese der gesuchte Schnitt sein.

Ad. 3. Ist ein Punkt angegeben, von welchem man an den Schnitt eine Tangente legen soll, so kann man wieder zuerst durch den gegebenen Punkt an den Conus eine Tangentialebene (nach §. 266.) legen. Da nun (nach §. 233.) die letztere die gesuchte Tangente enthalten muss, da ferner diese

Tangente in der Schnittebene enthalten ist, so wird die Communsektion dieser beiden Ebenen die gesuchte Tangente sein. Nun ist aber die vertikale Projektion dieser Tangente in der vertikalen Spur der Schnittebene enthalten, und es ist also durch letztere die vertikale Projektion der gesuchten Tangente bekannt. Die horizontale Projektion der Communsektion jener beiden Ebenen wird erhalten (§. 110.), wenn man vom Durchschnittspunkte ihrer horizontalen Spuren aus nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht. Da die horizontale Spur der Tangentialebene Tangente der horizontalen Spur der Berührungserzeugenden ist (nach §. 254.), so wird die horizontale Projektion der gesuchten Tangente erhalten, wenn man von der horizontalen Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Erzeugenden des Kegels an die horizontale Spur des letzteren eine Tangente zieht, diese bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der Schnittebene verlängert, und von dem letzteren Punkte aus nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht.

Ad. 4. Soll endlich der Kegel entwickelt werden, so weis man (aus §. 282.), dass sich seine horizontale Spur in einen Kreisbogen verwandelt, dessen Centrum das des Kegels, und dessen Radius gleich der Seite des letzteren ist. Beschreibt man daher aus einem beliebigen Punkte mit der Länge der Seite des Kegels einen Kreisbogen, so entwickelt sich auf diesem der Umfang der horizontalen Spur ab. Theilt man nun letzteren in gleiche Theile und zwar in so viele, dass jeder als eine Gerade betrachtet werden kann, und trägt diese einzelnen Theile auf jenen Kreisbogen, so erhält man den entwickelten Umfang der horizontalen Spur des Kegels und mithin seine entwickelte Direktrix. Von den einzelnen Theilungspunkten dieser entwickelten Grundlinie des Kegels nach seinem Centrum Gerade gezogen, so werden die letzteren mit den Elementen jener Linie Dreiecke bilden, welche die Elemente des Kegels sind. Sucht man nun die Längen jener Theile der Seiten dieses Kegels, welche zwischen seiner Grundfläche und der Schnittebene enthalten sind, und trägt in der Entwickelung der Kegelfläche auf seine Seiten der Ordnung nach jene Theile, verbindet die erhaltenen Endpunkte in gehöriger Ordnung, so erhält man den entwickelten Schnitt. Um endlich noch für einen auf dem letzteren gegebenen Punkt eine Tangente an diesen Schnitt zu legen, so weis man, dass diese gesuchte Tangente mit der durch den gegebenen Punkt gezogenen Erzeugenden des Kegels nach der Entwickelung des letzteren denselben Winkel bildet, als vorher, und man würde daher leicht die Tangente erhalten, wenn man durch den gegebenen Punkt des entwickelten Schnittes eine Erzeugende des Kegels legen und an letztere in jenem Punkte eine Gerade anlegen würde, welche mit der Erzeugenden denselben Winkel bildet, den die Tangente von der Entwickelung mit dieser Erzeugenden machte. Uebrigens weis man, dass die Tangente der Direktrix auch nach der Entwickelung der letzteren noch tangirend an derselben bleibt, und ihre vorige Länge beibehält, folglich dürfen wir nur durch den auf dem entwickelten Schnitte angegebenen Punkt eine Erzeugende des Kegels legen, von dem Punkte der letzteren aus, der ihrer horizontalen Spur entspricht, auf dieselbe eine Senkrechte errichten und letztere so lange machen, als die von der horizontalen Spur derselben Erzeugenden an die Direktrix des Kegels gezogene Tangente lang gemacht wurde, den erhaltenen Endpunkt mit dem gegebenen Brührungspunkte durch eine Gerade verbinden, so erhält man die gesuchte Tangente des entwickelten Schnittes. —

§. 284.

Beispiel. (Fig. 164.) Es sei A B C D G L eine in der horizontalen Tafel liegende Kreislinie, welche die horizontale Spur eines Conus ist, (S, 'S) seien die Projektionen des Centrums dieses letzteren, und dieser wird von der Ebene $S_1 S 'S_1$ geschnitten; man soll die Durchschnittslinie aufsuchen. Zieht man die Geraden A 'A, B B′, C C′ etc. etc. senkrecht auf X, so erhält man die vertikale Projektion 'A G′ der horizontalen Spur oder der Grundfläche des Kegels, und zieht man die Geraden S A, S B, S C etc. etc., ferner S′ 'A, S′ B′, S′ C′ etc. etc., so erhält man die horizontale Projektion S A D G L und die vertikale Projektion S′ A′ G′ des Kegels. Da nun S A $\neq$ X ist, so wird die Gerade (S′ A′, S A) parallel zur vertikalen Tafel und $<$ S′ A′ G′ gleich dem Winkel sein, welchen die Seite des gegebenen Kegels mit der horizontalen Tafel macht. Nun ist $<$ $'S_1 S_2 X$ kleiner als $<$ 'S 'A X, und da $<$ $'S_1 S_2 X$ der Neigungswinkel der Ebene $S_1 S_2 'S_1$ gegen die horizontale Tafel ist, so wird unsere Schnittebene $S^1 S_2 'S_1$ mit der Ebene der Grundfläche des Kegels einen kleineren Winkel bilden, als die Seite des Kegels mit seiner Grundfläche macht. Die Durchschnittslinie, welche man im vorliegenden Falle erhält, ist eine geschlossene Curve, und zwar eine Ellipse. Um nun diesen Schnitt zu erhalten, darf man nur die horizontalen Projektionen jener Punkte bestimmen, deren verti-

kale Projektionen in a', b', c', d', 'e, 'f, g' sind, und zu diesem Behufe ziehe man von diesen Punkten aus die Senkrechten a'a, b'b, c'c', e'e, 'ff und g'g auf die Axe X, so werden die Geraden SA, SB, SC, SE, SF, SG etc. etc. von denselben durchschnitten, und man erhält hierdurch die Punkte a, b, c, e, f etc. etc., welche der horizontalen Projektion des gesuchten Durchschnittes angehören. Um die Punkte d und e zu bestimmen, lege man durch d' die Gerade $x_5 y_5$, und betrachte diese als vertikale Spur einer mit der horizontalen Tafel parallelen Ebene, so wird letztere den Kegel nach einer Linie schneiden, deren vertikale Projektion in $x_5 y_5$ liegt, und deren horizontale Projektion die von S aus mit S p = d' p' beschriebenen Kreislinie ist, und im Durchschnitte dieser Kreislinie mit SD und SL werden die horizontalen Projektionen d und e jener Punkte sein, deren vertikale Projektionen in d' sind. Verbindet man nun die Punkte a, b, c, d etc. etc. durch eine stätige Curve, so erhält man die horizontale Projektion adge des gesuchten Schnittes. — Legt man nun die Ebene $S_1 S_2\,'S_1$ um $S_2\,'S_1$ in die vertikale Tafel, zieht $'a A_1$, $'b B_1$, $'c C_1$ etc. etc. senkrecht auf $S_2\,'S_1$, und macht $'a A_1 = 'A A$, $'b B_1 = B' B$, $'c C_1 = C' C$ etc. etc., so werden die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 etc. etc. in dieser umgelegten Ebene erhalten, und diese durch eine stätige Curve verbunden, geben die wahre Grösse der verlangten Durchschnittslinie $A_1 D_1 G_1 L_1$. — Endlich soll noch der gegebene Kegel entwickelt werden; hierzu beschreibe man aus dem Punkte "S mit der Länge $''S A_2 = 'S 'A$ der Seite des Kegels einen Kreisbogen $A_2 G_2 A_2$, mache $A_2 B_2 = B_2 C_2 = C_2 D_2$ etc. etc. $= AB = BC =$ etc. etc., ziehe $A_2''S$, $B_2''S$, $C_2''S$, $D_2''S$ etc. etc., so erhält man die Entwickelung $A_2''S A_2$ des gegebenen Kegels. Nun suche man die Längen der einzelnen Theile der Erzeugenden, nämlich die Längen von ('Aa', Aa), ('Bb', Bb), (C'c', Cc) etc. etc., mache $A_2 a_1$, $B_2 b_1$, $C_2 c_1$ etc. etc. gleich diesen einzelnen Theilen, und verbinde die Punkte a_1, b_1, c_1 etc. etc. durch eine stätige Curve, so wird $a_1 b_1 g_1 l_1 a_1$ der entwickelte Schnitt sein. — Zieht man Dt tangirend an ADGL, verbindet ferner den Punkt t mit dem Punkte d durch die Gerade dt, so wird letztere die horizontale Projektion der an der gesuchten Durchschnittslinie für (d, d') zu ziehenden Tangente. Zieht man endlich $D_2 T$ senkrecht auf $d_1 D_1$ und, macht $D_2 T = Dt$, zieht sodann $T d_1$, so ist letztere Gerade die Tangente der Linie $a_1 g_1 n_1 a_1$. —

Anmerk. 1. Schneidet man den gegebenen Conus durch die Ebene $S_3 S_4\,'S_3$, so dass $\angle\, 'S_3 S_4 X = \angle\, 'S A' X$ wird, so erhält man eine offene in sich nicht zurückkehrende Curve als Schnitt, nämlich die Parabel, deren Projektionen $S_1 a'_2$ und $f_2 a_2 e_2$ sind. Schneidet man endlich den Kegel durch Ebene $S_5 S_6\,'S_5$, so dass $\angle\, 'S_5 S_6 X$ grösser als $\angle\, 'S 'A X$ wird, so erhält man eine aus zwei Theilen bestehende Curve, deren einer im unteren, und deren anderer Theil im oberen Fache des Conus liegt; diese Curve ist die Hyperbel, und ihre horizontale Projektion ist durch die Curveh nrq und $E q_1 H$ bestimmt ist. In Fig. 164. a. ist der Kegel entwickelt und in dieser Entwickelung stellen die Curven $M_1 N_1 P_1$ und $M_2 N_2 P_2$, ferner $b_1 a_1 c_1$ und $b_2 a_2 c_2$ diese entwickelten Schnitte dar. —

Anmerk. 2. Die Tangente für einen beliebigen Punkt einer dieser Curven wird, wie schon §. 283. erwähnt wurde, gefunden, indem man durch den gegebenen Berührungspunkt eine Ebene legt, welche den Kegel tangirt, den Durchschnitt dieser und der Durchschnittsebene angibt, so wird die hierdurch erhaltene Communsektion die gesuchte Tangente sein. Dabei hat man aber nur, um die horizontale Projektion dieser Tangente anzugeben, von dem Punkte aus, in welchem die horizontale Spur der Tangentialebene die horizontale Spur der Schnittebene trifft, eine Gerade nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes zu ziehen.

Anmerk. 3. Es wurde schon (§. 219., Anmerk. 1.) erwähnt, dass die Asymptoten der Hyperbel Tangenten derselben sind, die ihre Berührungspunkte in unendlicher Entfernung haben. Da nun diese Asymptoten in der Schnittebene liegen müssen, so werden ihre Berührungspunkte in Erzeugenden des Conus liegen, die mit der Schnittebene parallel sind. Zieht man daher durch das Centrum des Conus eine Ebene parallel zur Schnittebene, so wird diese Hülfsebene den Conus (§. 239.) nach zwei Erzeugenden G_1 und G_2 schneiden. Betrachtet man nun die eine dieser Erzeugenden G_1 als Berührungserzeugende einer Tangentialebene, so wird in dieser — welche mit T_1 bezeichnet sein soll — eine Asymptote der Hyperbel liegen; folglich wird diese Asymptote der Durchschnitt von T_1 mit der Ebene der Hyperbel sein. Dieser Durchschnitt ist aber parallel mit G_1, wenn man daher von dem Durchschnitte der horizontalen Spur von T_1 und der Schnittebene eine Gerade parallel mit der horizontalen Projektion von G_1 zieht, so erhält man die horizontale Projektion der einen Asymptote. Ebenso erhält man die horizontale Projektion der andern Asymptote, wenn man G_2 als Berührungserzeugende einer Tangentialebene T_2 betrachtet, von dem Durchschnittspunkte der horizontalen Spur von T_2 mit der horizontalen Spur der Ebene der Hyperbel (der gegebenen Schnittebene) aus eine Gerade parallel zur horizontalen Projektion von G_2 zieht. Durch diese beiden horizontalen Projektionen der Asymptoten sind dieselben nunmehr ganz und gar bestimmt, weil ihre vertikalen Projektionen in die vertikale Spur der Schnittebene fallen müssen.

§. 285.

Aufgabe 33. Es wird ein schiefer Kegel von einer Ebene geschnitten, man soll

1. die Durchschnittsfigur und eine Tangente für einen auf derselben gegebenen Punkt bestimmen.
2. Den Kegel mit diesem Schnitte entwickeln.

Auflösung. Um die Durchschnittslinie zu finden, schneide man den Kegel durch Ebenen, welche durch sein Centrum gehen. Eine jede solche Ebene wird nun mit dem Kegel eine oder zwei Lagen seiner Erzeugenden gemeinschaftlich haben, und die gegebene Ebene schneiden. Da nun in der Communsektion dieser und einer der Hülfsebenen ein Punkt des Durchschnittes liegen muss, so werden die Punkte, in welchen diese Communsektion von den Erzeugenden getroffen wird, nach welchen die Hülfsebene den Kegel schneidet, dem gesuchten Schnitte angehören. Wenn man daher durch das Centrum des Conus eine Ebene E legt, ihre Durchschnitte G_1 und G_2 sucht, sodann den Durchschnitt C von E mit der Schnittebene angibt, dann die Punkte aufsucht, welche C mit mit G_1 und G_2 gemein hat, so erhält man Punkte, die in dem gesushten Durchschnitte liegen, und durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man eine gehörige Anzahl von Punkten dieser Linie finden, um dieselbe auch ziehen zu können. — Sucht man die Durchgangspunkte von einzelnen Erzeugenden des Kegels mit der Schnittebene, so erhält man auch Punkte der gesuchten Durchschnittslinie. — Durch Umlegung der Schnittebene in eine der Tafeln kann man auch die wahre Gestalt dieser Linie finden, und eine Tangente derselben kann man nach dem in §. 283. angegebenen allgemeinen Verfahren bestimmen. — Um nun den Kegel abzuwickeln, müsste man das in §. 184. für die Pyramide angegebene Verfahren anwenden; da aber dasselbe zu unbequem und weitläufig ist, so schlägt man ein anderes Verfahren ein, welches auf später entwickelte Sätze beruht. Man schneidet nämlich den Kegel durch eine Kugel, deren Centrum mit dem des Kegels zusammenfällt, sucht sodann den Durchschnitt dieser beiden Flächen, indem man durch das Centrum des Conus beliebige und eine gehörige Anzahl von Ebenen legt. Diese Ebenen schneiden nämlich den Kegel nach Erzeugenden und die Kugel — wie später erwähnt wird — nach grössten Kreisen und die Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit jenen Erzeugenden sind Punkte der Durchschnittslinie des Kegels und der Kugel. Legt man nun durch diese Durchschnittslinie einen auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinder, entwickelt den letzteren, so erhält man auch die Entwickelung jener Linie. Beschreibt man nun mit einem Halbmesser, der gleich dem der Kugel ist, eine Kreislinie, trägt auf diese die Elemente der entwickelten Durchschnittslinie des Kegels und der Kugel, und zieht durch die Endpunkte dieser aufgetragenen Elemente die entsprechenden Erzeugenden des Kegels, so erhält man seine Entwickelung. Auf diese Erzeugenden trägt man nun die Längen der zwischen dem Centrum und der gegebenen Schnittebene enthaltenen Theile derselben, und verbindet die hierdurch erhaltenen Endpunkte, so erhält man auch die entwickelte und gesuchte Durchschnittslinie.

Dritte Abtheilung.

Von den krummlinig erzeugten Flächen überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Rotationsflächen, Flächen vom zweiten Grade überhaupt und Umhüllungsflächen.

§. 286.

Bewegt sich irgend eine (ebene oder doppelt gekrümmte) Linie um eine fixe Gerade so, dass sie mit dieser in einer fixen Verbindung bleibt, und jeder Punkt der Erzeugenden von der Drehungsaxe seine anfängliche Entfernung behält, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche man Rotations-, Revolutions- oder Umdrehungsfläche nennt. Die fixe Gerade, um welche sich jene Linie dreht, wird die Rotationsaxe oder Axe der Fläche genannt, während die erste die Generatrix genannt wird. — Da jeder Punkt der Generatrix während der Bewegung der letzteren einen Kreisbogen beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe (§. 22. 2.) ist, so folgt vor Allem der Satz:

> Schneidet man eine Rotationsfläche durch eine Ebene, welche senkrecht auf der Axe ist, so ist der hierdurch erhaltene Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser die Entfernung des Durchschnittspunktes jener Ebene mit der Generatrix von der Axe ist.

Dieser Kreis wird Parallelkreis der Fläche genannt. Schneidet man die Fläche durch eine Ebene, welche die Rotationsaxe enthält, so erhält man eine Curve, welche der Meridian der Fläche genannt wird. — Ist nun die Generatrix eine ebene Curve, und liegt die Rotationsaxe in der Ebene der Generatrix, so wird auch letztere in allen ihren Lagen die Axe enthalten, folglich ist in diesem Falle ein Meridian gleich der Generatrix und alle Meridane sind also auch einander gleich. Ist der Meridian eine in sich zurückkehrende ebene Curve, und man legt durch den Mittelpunkt der Axe eine Ebene senkrecht auf dieselbe, so entsteht ein Schnitt, welcher der grösste Parallelkreis sein wird; man nennt denselben Aequator. Die einzelnen Schnittebenen benennt man nach ihren Schnitten, und unterscheidet daher Meridianebenen und Aequatorialebenen.

§. 287.

Ist der Meridian eine Kreislinie, von welcher die Rotationsaxe ein Durchmesser ist, so entsteht durch Bewegung jener Kreislinie um diese fixe Axe die Kugel. Nun kann man jeden Durchmesser der Generatrix als Axe der Fläche annehmen, weil diese keine andere Bedingung zu erfüllen hat, als dass sie mit dem Meridane in einer fixen Verbindung bleibt und selbst ihre Lage nicht ändert; da aber ferner (nach §. 286.) jeder auf der Axe senkrechte Schnitt ein Kreis sein muss, und alle Meridiane gleich der Generatrix sein müssen, also hier jeder Meridian auch ein Kreis ist, so erhält man für jeden ebenen Schnitt auf der Kugel einen Kreis, und daraus folgt mithin der Satz: schneidet man eine Kugel durch irgend eine Ebene, so erhält man einen Kreis, als Durchschnittsfigur. Jeder Kreis welcher einen Durchmesser der Kugel enthält, wird grösster Kreis genannt.

§. 288.

Der Einfachheit wegen wollen wir die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel legen, so wird ihre horizontale Projektion mit ihrer horizontalen Spur zusammenfallen, und alle Parallelkreise projiciren sich horizontal als Kreise von ihrer wahren Grösse, ihre vertikalen Projektionen aber werden mit den vertikalen Spuren ihrer Ebenen zusammenfallen, und so gross als die Durchmesser dieser Kreise sein. Was nun die vertikale Projektion eines Meridians betrifft bei dieser Lage der Rotationsaxe, so wird dieselbe bestimmt, wenn man den Meridian als Direktrix eines Cylinders betrachtet, dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, sodann wird die vertikale Spur dieses Cylinders die vertikale Projektion des gegebenen Meridians sein; die horizontale Projektion des letzteren wird die horizontale Spur der Meridianebene sein. Dreht man nun die Meridianebene parallel zur vertikalen Tafel, so wird die vertikale Spur des den Meridian projicirenden Cylinders gleich

dem Meridian werden, während die horizontale Spur des Meridians in dieser Lage eine zur X parallele Gerade ist. —

§. 289.

Nach der Gestalt der Generatrix wird man auch verschiedene Arten von Rotationsflächen erhalten.

1. Es sei der Meridian ein Kreis, so erhält man, wie schon erwähnt, eine Kugel.
2. Ist der Meridian eine Ellipse, deren grosse Axe die Rotationsaxe ist, so entsteht hierdurch eine Fläche, deren Meridiane alle gleich der angegebenen Ellipse und deren Aequator die kleine Axe dieser Ellipse zum Durchmesser hat. Die hierdurch entstandene Fläche ist das Rotationsellipsoid oder das Ellipsoid mit zwei Axen. Wären die Axen des Meridians gegeben, so kann man die vertikale Projektion dieses Ellipsoides erhalten, wenn man senkrecht auf die Axe in der vertikalen Tafel eine Gerade zieht, auf diese von einem angegebenen Punkte aus die grosse Axe der gegebenen Ellipse trägt, und diese (nach §. 208.) konstruirt, so wird diese die vertikale Projektion des Ellipsoides sein, und zugleich die wahre Grösse eines Meridians (nach §. 288.) vorstellen. Nimmt man nun die horizontale Spur der Axe an, und zieht aus dieser als Mittelpunkt mit der halben kleinen Axe des Meridians einen Kreisbogen, so wird dieser die horizontale Projektion des Ellipsoides sein.
3. Ist die vertikale Projektion des Meridians eine Parabel, deren Axe die Rotationsaxe ist, und bewegt sich diese um letztere, indem beide stets in der angegebenen Verbindung bleiben, so entsteht hierdurch eine nicht in sich zurückkehrende Fläche, von welcher jeder Meridian die angegebene Parabel ist, und diese Fläche ist das Rotationsparaboloid. Begränzt man die Fläche durch eine mit der horizontalen Tafel parallele Ebene, und projicirt diesen Schnitt, so wird seine vertikale Projektion eine auf der Rotationsaxe senkrechte Gerade sein, und seine horizontale Projektion ein Kreis, dessen Durchmesser gleich der vertikalen Projektion dieses Schnittes ist.
4. Hat eine Hyperbel in der Rotationsaxe ihre reelle Axe, und bewegt sich um diese, so entsteht hierdurch eine Fläche, von welcher jeder Meridian gleich dieser Hyperbel ist. Diese Fläche hat aber zwei ganz von einander getrennte Fächer, weil zwischen den beiden Aesten des Meridians kein Punkt der Generatrix liegt, also auch kein Punkt der Fläche liegen kann, und wird Hyperboloid mit zwei Fächern genannt. Der Mittelpunkt des Meridians wird wieder der Mittelpunkt der Fläche sein.
5. Hat eine Hyperbel ihre imaginäre Axe in der Rotationsaxe, und erzeugt eine Fläche, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche ein Fach hat, weil auf beiden Seiten der Rotationsaxe die Aeste der Hyperbel liegen. Dieses Fach ist aber wieder unbegränzt, und mithin die Fläche eine nicht in sich zurückkehrende. Man nennt diese Fläche das Hyperboloid mit einem Fache. Der Scheitel einer Hyperbel wird einen Kreis beschreiben, dessen Umfang der Ort aller Scheitel der Meridiane dieser Fläche, und dessen Durchmesser gleich der reellen Axe der Hyperbel ist. Dieser Kreis wird Kehlkreis der Fläche genannt.

§. 290.

Die hier erklärten Flächen sind spezielle Fälle von folgenden:

1. Nimmt man eine Ellipse an, deren grosse Axe senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, und bewegt sich eine andere Ellipse so fort, dass ihr Mittelpunkt stets in der Axe der ersten, ihre Ebene senkrecht auf dieser Axe bleibt, ihre Axen ein konstantes Verhältniss behalten, und die erste Ellipse stets getroffen wird, so entsteht eine Fläche, die mit der ersten Ellipse zwei Axen und mit der letzten die konstante Axe gemein hat. Man nennt diese Fläche Ellipsoid mit drei Axen. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man ein Ellipsoid mit zwei Axen, also das in 1. des vor. §. beschriebene; folglich kann man ein Rotationsellipsoid auch dadurch erzeugen, indem sich ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Axe einer Ellipse ist, an dieser fortbewegt, und dessen Halbmesser nach und nach den einzelnen Sehnen der Ellipse gleich wird. — Geht diese Ellipse ebenfalls in einen Kreis über, so erhält man die Kugel.
2. Nimmt man eine Parabel als Direktrix, und lässt an dieser eine Ellipse sich so fortbewegen, dass die Ebene der letzteren senkrecht auf der Axe der Parabel bleibt, und die Ellipse mit dieser stets eine Sehne gemeinschaftlich hat, so entsteht hierdurch das elliptische Paraboloid. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man das Rotationsparaboloid.
3. Nimmt man wieder eine Parabel, an welcher sich eine Hyperbel so fortbewegt, dass ihre Ebene senkrecht auf der Axe der Parabel ist,

und das Verhältniss ihrer Axen dasselbe bleibt, ihre reelle Axe aber nach und nach in Sehnen der Parabel übergeht, so erhält man eine Fläche, welche man das hyperbolische Paraboloid nennt.

4. Bewegt sich eine Ellipse an einer Hyperbel so, dass ihre Axen stets ein konstantes Verhältniss gegen einander behalten, die eine Axe in Sehnen der Hyperbel übergeht, und die Ebene der Ellipse senkrecht auf der reellen Axe der Hyperbel bleibt, so entsteht hierdurch das elliptische Hyperboloid mit zwei Fächern. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man das Rotationshyperboloid mit zwei Fächern.

5. Bewegt sich wieder eine Ellipse auf die vorhin angegebene Weise, und bleibt dabei ihre Ebene stets senkrecht auf der imaginären Axe der Hyperbel, so entsteht hierdurch das elliptische Hyperboloid mit einem Fache. Auch dieses geht in das Rotationshyperboloid mit einem Fache über, wenn man statt der erzeugenden Ellipse einen Kreis nimmt.

Anmerk. 1. Diese hier angegebenen Flächen sind die fünf Flächen vom zweiten Grade. Man ersieht hieraus, dass man aus denselben, die in 3. angeführte ausgenommen, die in §. 289. angegebenen Rotationsflächen wieder ableiten kann, also diese eine zweifache Erzeugungsart zulassen.

Anmerk. 2. Ist der Meridian ein gleichschenkliges Dreieck, bewegt sich also eine die Rotationsaxe schneidende Gerade, so erzeugt dieselbe einen Kegel. Ist die Generatrix eine zur Rotationsaxe parallele Gerade, so entsteht die Cylinderfläche. Ist die Generatrix eine Gerade, welche weder parallel mit der Axe ist, noch diese schneidet, so entsteht das Rotationshyperboloid, welches in 5. des vor. §. erwähnt wurde. Die Eigenschaften dieser Fläche, welche aus dieser Erzeugungsart hervorgehen, werden noch später berücksichtiget.

§. 291.

Bewegt sich eine Fläche stätig fort, so werden ihre auf einander folgenden Lagen sich schneiden, und der geometrische Ort aller einzelnen Durchschnitte wird Umhüllungsfläche oder Umhüllung genannt. Die erzeugende Fläche wird Umhüllte und die einzelnen Durchschnitte ihrer konsekutiven Lagen werden Charakteristiken genannt. Bewegt sich z. B. eine Kugel so fort, dass ihr Mittelpunkt stets in einer gegebenen Geraden bleibt, so werden zwei konsekutive Lagen derselben eine Durchschnittslinie haben, die durch den Mittelpunkt der zweiten Lage geht und auf der Oberfläche einer jeden dieser Kugeln liegt. Der geometrische Ort aller dieser Charakteristiken ist nun die Umhüllung, und die Kugel die Umhüllte. —

§. 292.

Bewegt sich nun eine Fläche fort, und erzeugt eine neue Fläche, und ist die erste Stellung der Umhüllten S_1, die zweite S_2, die dritte S_3 etc. etc. Ist nun der Durchschnitt von S_1 und S_2 durch D_1, der von S_2 und S_3 durch D_2, der von S_3 und S_4 durch D_3 etc. etc. und der von S_4 und S_5 durch D_4 bezeichnet, so ist der geometrische Ort der Linien D_1, D_2, D_3 ... D_4 die erzeugte Fläche. Bewegt sich nun D_1 fort, und nimmt nach und nach die Lagen von D_2, D_3, D_4 etc. etc. an, so entsteht eine Fläche, von welcher zwischen D_1 und D_2 das erste Flächenelement f_1, zwischen D_2 und D_3 das zweite Flächenelement f_2, zwischen D_3 und D_4 das dritte Flächenelement f_3 etc. etc. liegt. Es liegt aber D_1 sowohl, als auch D_2 auf S_2, also auf der Umhüllung und auf der Umhüllten, folglich liegt auch f_1 auf diesen beiden Flächen. Ebenso liegt sowohl D_2 als auch D_3 auf S_3, also liegt auch f_2 auf S_3, oder f_2 liegt auf der Umhüllung sowohl, als auch auf der Umhüllten, und ebenso lässt sich überhaupt nachweisen, dass alle übrigen Elemente f_3, f_4 etc. etc. der durch D_1, D_2, D_3 etc. etc. erzeugten Fläche auf der Umhüllung und auf der Umhüllten zugleich liegen, folglich haben diese beiden immer ein Flächenelement gemein. Die Bedingung also, dass eine Fläche die Umhüllte einer andern oder umgekehrt diese Fläche Umhüllung der ersteren ist, besteht darin, dass beide ein Flächenelement gemeinschaftlich haben. Hieraus können nun folgende Folgerungen gemacht werden:

1. Haben wir den Meridian irgend einer Rotationsfläche, so wird jede Tangente dieses Meridians in der Ebene des letzteren liegen, also auch die Rotationsaxe schneiden, oder mit dieser parallel sein müssen. Nehmen wir nun irgend eine Tangente des Meridians an, welche die Rotationsaxe schneidet, und lassen von dem Meridiane die Rotationsfläche erzeugen, so wird jene Tangente einen geraden Kegel beschreiben, dessen Grundfläche der vom Berührungspunkte dieser Tangente beschriebene Parallelkreis der Fläche ist. Dieser Kegel hat also mit der gegebenenen Rotationsfläche ein Flächenelement gemeinschaftlich, denn man kann (§. 291.) eine Rotationsfläche auch dadurch erzeugen, dass sich ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Axe bleibt, stets den Meridian treffend fortbewegt, so dass also ein Parallelkreis einer Rotationsfläche als ein Element der letzteren betrachtet werden kann; folglich ist jener Kegel Umhüllte der Rotationsfläche, oder diese Umhüllte des Kegels. Da aber durch

jede Tangente des Meridians, welche die Rotationsaxe schneidet, ein solcher Kreiskegel, wie der vorhin erwähnte, beschrieben wird, so folgt hieraus der Satz:

Eine Rotationsfläche kann als Umhüllung von Kegeln, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen, und deren Grundflächen Parallelkreise der Umhüllung sind, betrachtet werden.

2. Zieht man eine Tangente des Meridians einer Rotationsfläche, die parallel zur Axe der letzteren ist, und lässt durch jenen Meridian die Fläche erzeugen, so wird die zur Axe parallel gezogene Tangente einen senkrechten Cylinder beschreiben, dessen Grundfläche der von dem Berührungspunkte jener Tangente beschriebene Parallelkreis ist. Dieser Cylinder hat also mit der Rotationsfläche ein Flächenelement gemeinschaftlich, und ist mithin Umhüllte dieser Fläche. Es folgt also hieraus: dass man Rotationsflächen als Umhüllungen von Cylindern betrachten kann, deren Grundflächen Parallelkreise und deren Erzeugende parallel der Rotationsaxe sind.

3. Man kann auch für irgend eine Tangente des die Rotationsfläche erzeugenden Meridians die zugehörige Normale gezogen denken, so wird diese die Rotationsaxe ebenfalls schneiden müssen. Betrachtet man nun diesen Durchschnittspunkt als Mittelpunkt eines Kreises, und beschreibt aus diesem mit jener Normale einen Halbkreis, so wird dieser, während der angegebene Meridian die Rotationsfläche beschreibt, eine Kugel erzeugen, deren Halbmesser jene Normale ist und deren Mittelpunkt in der Rotationsaxe liegt. Dabei beschreibt aber der Berührungspunkt der anfänglich gezogenen Normale einen Parallelkreis der Fläche, welcher auch der Kugel angehört; folglich hat diese mit der Rotationsfläche ein Flächenelement gemein, und ist mithin Umhüllte dieser Fläche. Es folgt also hieraus: eine Rotationsfläche kann als Umhüllung von Kugeln betrachtet werden, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen, und deren Halbmesser Normalen des Meridians sind.

Anmerk. Es ist leicht nachzuweisen, dass eine Cylinderfläche, welche einen Meridian einer Rotationsfläche als Direktrix und eine Generatrix hat, die senkrecht auf der Meridianebene steht, als Umhüllte der Rotationsfläche betrachtet werden kann. —

Sechstes Kapitel.

Tangirung der krummlinig erzeugten, nicht abwickelbaren Flächen überhaupt, und der Rotationsflächen insbesondere.

§. 293.

Aus §. 253. ist bekannt, dass die Tangentialebene irgend eines Punktes einer Fläche die Tangenten aller Curven enthält, welche der Fläche angehören und durch den gegebenen Berührungspunkt gezogen werden können. Ist daher auf einer krummen Oberfläche ein Punkt gegeben, für welchen eine Tangentialebene dieser Fläche bestimmt werden soll, so lege man durch diesen Punkt zwei Curven, die der Fläche angehören, und ziehe an diese durch jenen Punkt Tangenten, lege durch diese beiden Tangenten eine Ebene, so wird diese die gesuchte Tangentialebene sein.

Anmerk. Um diese Curven zu erhalten, lege man durch den Berührungspunkt Ebenen, welche mit der Fläche einfache und leicht zu konstruirende Curven gemein haben, konstruire diese Curven, und bestimme sodann die erwähnten Tangenten.

§. 294.

Für eine Rotationsfläche lässt sich die im vor. §. erwähnte Regel einfach anwenden. Ist nämlich ein Punkt einer Rotationsfläche gegeben, für welchen an diese Fläche eine Tangentialebene gelegt werden soll, so lege man durch diesen Punkt einen Parallelkreis und an diesen eine Tangente, so gehört letztere der Tangentialebene an; sodann ziehe man durch denselben Punkt einen Meridian der Fläche, und lege an diesen eine Tangente, so gehört diese auch der gesuchten Tangentialebene an. Legt man also durch diese beiden Tangenten eine Ebene, so wird diese die gesuchte Tangentialebene sein.

§. 295.

Legt man nun die horizontale Tafel senkrecht auf die Rotationsaxe, so wird die horizontale Projektion eines jeden Parallelkreises gleich diesem selbst, seine vertikale Projektion aber senkrecht auf der Rotationsaxe und gleich dem Durchmesser dieses Kreises sein. Ist daher die vertikale Projektion eines Parallelkreises angegeben, und man will seine horizontale Projektion bestimmen, so halbire man jene, und beschreibe mit der halben Geraden, welche dieser vertikalen Projektion gleich

ist, aus der horizontalen Spur der Rotationaaxe einen Kreis, so wird dieser die horizontale Projektion des Parallelkreises sein. Legt man nun für einen auf diesem gegebenen Punkte eine Tangente, so wird die vertikale Projektion derselben mit der vertikalen Projektion des Parallelkreises zusammenfallen, ihre horizontale Projektion aber Tangente der horizontalen Projektion dieses Kreises sein. Da nun diese Tangente parallel mit der horizontalen Tafel ist und in der gesuchten Tangentialebene liegen muss, so wird dieselbe parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene sein, und es folgt also hieraus:

Zieht man durch die horizontale Projektion des gegebenen Berührungspunktes eine Tangente an die horizontale Projektion des durch diesen Punkt gehenden Parallelkreises, so wird mit dieser die horizontale Spur der Tangentialebene parallel sein müssen.

Denkt man sich nun durch den gegebenen Berührungspunkt und die Rotationsaxe eine Ebene gelegt, so wird diese senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen und die Meridianebene sein. Da aber letztere senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so muss ihre horizontale Spur die horizontale Projektion des Berührungspunktes enthalten, und es wird mithin diese horizontale Spur erhalten, wenn man durch die horizontale Spur der Rotationsaxe und die horizontale Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht. Diese Gerade wird aber senkrecht auf der horizontalen Projektion der vorhin erwähnten Tangente des den Berührungspunkt enthaltenden Parallelkreises sein, und da mit dieser Tangente die horizontale Spur der Tangentialebene parallel sein muss, so wird letztere senkrecht auf der horizontalen Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Meridianebene stehen. Hieraus folgt also ein weiterer Satz:

Die horizontale Spur einer Tangentialebene einer Rotationsfläche steht senkrecht auf der horizontalen Spur derjenigen Meridianebene, welche den Berührungspunkt enthält.

§. 296.

Da öfters die Forderung gemacht wird, für einen gegebenen Punkt einer Rotationsfläche den Parallelkreis und den Meridian zu konstruiren, so sollen diese Construktionen ausgeführt werden. (Fig. 165.) Ist ${}'C_1\,{}'C_2$ die vertikale und C die horizontale Projektion der Rotationsaxe, ${}'A\,{}'C_1\,B'\,C'_2$ die vertikale Projektion desjenigen Meridians der Fläche, welcher parallel mit der vertikalen Tafel ist und A B seine horizontale Projektion, ferner a die horizontale Projektion eines auf der Rotationsfläche liegenden Punktes, so ist der Kreis a h g die horizontale Projektion des diesen Punkt enthaltenden Parallelkreises, und die vertikale Projektion dieses Punktes kann in a' oder a'_1 sein, folglich ist auch die vertikale Projektion dieses Parallelkreises $a'\,g'$ oder $a'_1\,g'_1$. Ist nun M S die horizontale Spur einer Meridianebene, so muss ihre vertikale Spur die auf X X senkrechte Gerade S M′, und F G muss die horizontale Projektion des Meridians selbst sein. Nimmt man daher die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. an, welche der horizontalen Projektion dieser Curve angehören, und zieht durch diese Punkte Parallelkreise, so werden die vertikalen Projektionen dieser Punkte in den vertikalen Projektionen der zugehörigen Parallelkreise, also in m'_1 oder in m'_{14}, in m'_2 oder in m'_{13} etc. etc. liegen, und verbindet man die Punkte m'_1, m'_2, m'_3 etc. etc. durch eine stätige Curve, so wird diese die vertikale Projektion des Meridians sein, und es ist dieser durch die Curve ${}'C_1\,{}'F\,C'_2\,G'$ bestimmt.

Anmerk. Dreht man die Ebene M S M′ um die Axe $(C, C'_1\,C'_2)$, bis sie parallel zur vertikalen Tafel liegt, also ihre horizontale Spur die Lage $M_1\,S_1$ annimmt, so fällt die vertikale Projektion des Meridians, nach welchem dieselbe die Rotationsfläche schneidet mit dem Meridian ${}'A\,C'_1\,B'\,C'_1$ zusammen. Diesen letzteren nennt man den Hauptmeridian. Derselbe ist hinreichend, um die Projektionen der Rotationsfläche angeben zu können.

§. 297.

Aufgabe 34. Es ist eine Rotationsfläche durch ihren Hauptmeridian und die Projektionen ihrer Axe gegeben, ferner ist die horizontale Projektion eines auf dieser Fläche liegenden Punktes bekannt; man soll die vertikale Projektion dieses Punktes bestimmen, und für diesen an die Fläche eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Vor Allem beschreibe man aus der horizontalen Spur der Rotationsaxe mit ihrer Entfernung von der horizontalen Projektion des gegebenen Punktes einen Kreis, so ist dieser die horizontale Projektion des Parallelkreises, auf welchem sich der Berührungspunkt befindet, und zieht man von der horizontalen Projektion dieses Punktes aus auf X eine Senkrechte, welche den Hauptmeridian schneidet, so erhält man zwei Punkte, von welchen jeder die vertikale Projektion des Berührungspunktes sein kann. Durch diese zwei Punkte senkrecht auf die Rotationsaxe Sehnen des Meri-

dians gezogen, so werden diese die vertikalen Projektionen des Parallelkreises sein, welche den Berührungspunkt enthalten können, und diese Sehnen werden zugleich (§. 295.) die vertikalen Projektionen der Tangenten sein, welche man durch die Berührungspunkte an ihre Parallelkreise ziehen kann, und von welchen Tangenten die gemeinschaftliche horizontale Projektion erhalten wird, wenn man durch die horizontale Projektion des Berührungspunktes an den zugehörigen Parallelkreis eine Tangente zieht. Sucht man nun von diesen Tangenten ihre vertikalen Spuren, so erhält man zwei Punkte, durch welche die vertikalen Spuren der Tangentialebenen gehen müssen, welche man für die zwei Berührungspunkte, die einerlei horizontale Projektion haben an die Rotationsfläche ziehen kann. Nun müssen wir ferner (§. 294.) durch den gegebenen Berührungspunkt einen Meridian der Fläche legen, und an diesen durch jenen Punkt eine Tangente ziehen. Ziehen wir nun durch die horizontale Spur der Rotationsaxe und die horizontale Projektion des Berührungspunktes eine Gerade, so ist diese die horizontale Spur der Meridianebene, und die horizontale Projektion der gesuchten Tangente. Um die vertikale Projektion des Meridians nicht konstruiren zu dürfen, drehen wir die Meridianebene um die Rotationsaxe, bis sie parallel zur vertikalen Tafel zu liegen kömmt, so wird die vertikale Projektion des gesuchten Meridians mit dem Hauptmeridian zusammenfallen. An diesen durch die neuen vertikalen Projektionen der Berührungspunkte Tangenten gezogen, und ihre horizontalen Spuren gesucht, so würden durch diese Punkte die horizontalen Spuren der Tangentialebenen gehen müssen, wenn die Meridianebene in ihrer wahren Lage wäre. Wir drehen daher diese in ihre erste Lage wieder zurück, und suchen auf ihrer horizontalen Spur die horizontalen Spuren jener Tangenten auf. Ziehen wir nun durch diese Punkte senkrechte Gerade auf die horizontale Spur der Meridianebene, so werden diese (§. 295.) die horizontalen Spuren der Tangentialebenen sein, welche durch die Berührungspunkte, deren gemeinschaftliche horizontale Projektion angegeben war, an die Rotationsfläche gezogen werden können. Von jeder der vertikalen Spuren der Tangentialebenen haben wir schon vorhin einen Punkt aufgesucht, und schneiden die horizontalen Spuren die Axe X nicht mehr auf den Gränzen unserer Tafeln, so können wir von jeder der vertikalen Spuren noch einen Punkt erhalten, indem wir entweder die vertikalen Spuren der Tangenten des Meridians suchen, oder durch einen Punkt einer jeden dieser Tangenten eine Parallele zur entsprechenden horizontalen Spur der Tangentialebene ziehen, und es kann mithin auch die vertikale Spur einer jeden der gesuchten zwei Tangentialebenen bestimmt werden.

§. 298.

Beispiel. (Fig. 166.) Es sei $'AC'_1B'C'_2$ der Hauptmeridian, und zwar ein Kreis, ferner ACBD die horizontale Projektion des Aequators, wobei $AC = 'AC'$ ist, so wird die gegebene Rotationsfläche (§. 289.) eine Kugel sein. In p_2 sei die horizontale Projektion des Berührungspunktes, so ziehe man aus C mit dem Halbmesser Cp den Parallelkreis hfg, und vom Durchschnittspunkte p_1 des letzteren mit AB auf X eine Senkrechte $p_1p'_1$, ferner durch die hierdurch erhaltenen Punkte p'_1 und p''_1 die Geraden p'_1c und p''_1c_2 senkrecht auf C'_1C_2, so erhält man die vertikalen Projektionen der zwei Parallelkreise, deren gemeinschaftliche horizontale Projektion der Kreis hfg ist. Von p aus auf X eine Senkrechte gezogen, so erhält man in p' und p'' die vertikalen Projektionen des Berührungspunktes. Zieht man an hfg die Tangente pv_1, so wird diese die horizontale Projektion der an den Parallelkreisen $(hfg, d'p'_1)$ und $(hfg, d_2p''_1)$ zu ziehenden Tangenten sein, und von diesen die vertikalen Spuren v'_1 und v'_2 gesucht, so werden diese zwei Punkte den vertikalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen angehören. Zieht man nun CpN, so wird diese die horizontale Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Meridianebene und NN' die vertikale Spur dieser Ebene sein. Dreht man Ebene MNV' um $(C, C'_1C'_2)$, bis dieselbe parallel zur vertikalen Tafel wird, so beschreibt jeder der auf derselben enthaltenen Punkte M und N Kreisbögen, deren Mittelpunkt C ist, und nach der Drehung wird MN nach M_1N_1, M nach M_1 und N nach N_1 zu liegen kommen. Hierdurch geht aber die vertikale Projektion des durch MNN' entstandenen Meridianschnittes in den Kreis $'AC'_2B'C'_1$ und die horizontale Projektion desselben in AB über, der Punkt (p, p') wird aber einen auf $(C'_1C'_2, C)$ also auch auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Kreisbogen beschreiben, dessen horizontale Projektion pp_1 und dessen vertikale Projektion $p'p'_1$ ist, und mithin werden die Punkte p_1 und p'_1 die neuen Projektionen von (p, p') sein. Ebenso entspricht der Punkt p''_1 der neuen vertikalen Projektion des Berührungspunktes. Zieht man nun $p'_1s'_1$ und $p''_1p'_1$ tangirend an $'AC'_1B'C'_1$, so werden diese die Tangenten, und s_1, t_1 die horizontalen Spuren der Tangenten des Meridianschnittes sein, so lange die Meridianebene parallel mit der vertikalen Tafel ist; dreht man daher diese Ebene

wieder in ihre erste Lage, so beschreiben die Punkte s_1 und t_1 Kreisbögen, deren Mittelpunkt in C ist, und kommen nach s und t nach der Drehung zu liegen. Die vertikalen Projektionen dieser Punkte werden also (nach §. 70.) in s' und t', und die Tangenten des die Berührungspunkte (p, p') und (p, p'') enthaltenden Meridianschnittes in die Geraden (h's', p s) und (t'p'', t p) fallen. Da nun die Punkte s und t die horizontalen Spuren dieser Tangenten sind, so ziehe man die Geraden s T_1 und t T_2 senkrecht auf M N, so werden diese die horizontalen Spuren der beiden gesuchten Tangentialebenen sein. Die vertikalen Spuren werden erhalten, wenn man die Geraden $S_1 v'_1$ und $S_2 v'_2$ zieht. Ohne die Punkte S_1 und S_2 zu benützen hätte man diese vertikalen Spuren bestimmen können, wenn man die vertikalen Spuren N' und s_3 der beiden Tangenten des Meridians bestimmt und die Geraden s_3 v', und N'v'_2 gezogen hätte. —

§. 299.

Es wurde schon (§. 279.) erwähnt, dass wenn sich eine Hyperbel, deren imaginäre Axe in der Rotationsaxe liegt, um diese bewegt, das Rotationshyperboloid beschrieben wird. Nimmt man wieder die horizontale Tafel so an, dass dieselbe senkrecht auf der Rotationsaxe steht, und lässt um diese eine Gerade, welche mit dieser Axe nicht in einerlei Ebene liegt, bewegen, so dass alle Punkte derselben ihre anfänglichen Entfernungen von der Drehungsaxe behalten, so wird dasselbe Hyperboloid mit einem Fache beschrieben, von welchem (§. 289.) Erwähnung geschehen ist. Bei der Bewegung dieser geradlinigen Erzeugenden beschreibt jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe steht, und mithin wird die horizontale Spur der Erzeugenden einen Kreis beschreiben, der die horizontale Spur des Rotationshyperboloides ist. Bestimmt man nun die kürzeste Entfernung der Erzeugenden von der Drehungsaxe, so wird diese der Halbmesser des Kreises sein, welchen der Punkt beschreibt, der am nächsten an der Generatrix liegt. Dieser Kreis, welchen die kürzeste Entfernung der Generatrix von der Rotationsaxe beschreibt, wird K e h l k r e i s der Fläche genannt. Da nun die Ebene dieses Kehlkreises senkrecht auf der Drehungsaxe, also parallel zur horizontalen Tafel liegt, so wird die vertikale Projektion des Kehlkreises eine auf der vertikalen Projektion der Drehungsaxe senkrecht stehende Gerade sein, welche mit dem Durchmesser des Kehlkreises gleiche Länge hat, und die horizontale Projektion desselben die wahre Grösse dieses Kreises sein, der seinen Mittelpunkt in der horizontalen Spur der Rotationsaxe hat. Hierdurch ist man also im Stande die Projektionen des Kehlkreises anzugeben. — Nun wird die Generatrix in allen ihren Lagen den Kehlkreis treffen, folglich wird durch jeden Punkt des Kehlkreises eine Lage der Erzeugenden des Umdrehungshyperboloides gehen müssen. Denkt man sich den Kehlkreis als Direktrix eines Cylinders, von welchem die Generatrix senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, und durch einen beliebigen Punkt des Kehlkreises eine Lage der Erzeugenden dieses Cylinders und eine Erzeugende des Hyperboloides gezogen, sodann durch diese beiden Geraden eine Ebene gelegt, so wird diese eine Tangentialebene des Cylinders sein. Die horizontale Spur dieser Tangentialebene muss aber Tangente der horizontalen Spur des Kehlkreises sein, und wird, weil jene Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, die horizontale Projektion der angenommenen Erzeugenden des Hyperboloides enthalten. Da also die horizontale Spur jener Tangentialebene durch die horizontale Projektion des angegebenen Punktes geht, und Tangente der horizontalen Projektion des Kehlkreises ist; so folgt hieraus der erste Satz, welcher für das Rotationshyperboloid gilt, nämlich:

> D i e h o r i z o n t a l e P r o j e k t i o n e i n e r b e l i e b i g e n E r z e u g e n d e n d e s R o t a t i o n s - H y p e r b o l o i d e s i s t T a n g e n t e a n d e r h o r i z o n t a l e n P r o j e k t i o n s e i n e s K e h l k r e i s e s.

Zieht man nun eine beliebige Meridianebene, so wird diese von allen Lagen der Erzeugenden nach und nach geschnitten, und die erhaltenen Durchschnittspunkte gehören dem Meridiane dieser Ebene an. (Fig. 168. a.) In dieser Meridianebene sei B ein Punkt der Meridiancurve, $Z_1 Z_2$ die Rotationsaxe, A C B eine auf dieser Axe senkrechte Ebene, Z_2 die horizontale Spur der Rotationsaxe, $Z_2 z_2 = r$ der Halbmesser des Kehlkreises, b z_2 senkrecht auf $Z_2 z_2$, also eine Tangente dieses Kreises, und durch z_2 gehen die beliebige Gerade $A_2 A_1$ und dann noch die Erzeugende $B B_1$, so ist vor Allem, wenn noch b die horizontale Projektion von B ist, Bb senkrecht auf bz_2, also $\frac{Bb}{bz_2} = $ tang. $\sphericalangle$ ($Bz_2 b$) oder gleich der Tang. des Winkels, welchen die Erzeugende des Hyperboloides mit der horizontalen Tafel bildet. Ist nun $\frac{Bb}{bz_2} = m$, ferner $Bb = z$, $bz_2 = x$, so hat man

$$m = \frac{z}{\sqrt{x^2 - r^2}} \text{ also}$$

$$z = m\sqrt{x^2 - r^2}$$

Da aber diese Eigenschaft nur einem Punkte eigen ist, welcher auf einer Hyperbel ist, deren halbe reelle Axe $= r$, von welcher ferner x und z die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, und zwar x die mit der reellen Axe parallele und z die Ordinate, die mit der imaginären Axe gleiche Richtung hat, so folgt hieraus, dass ein beliebiger Punkt eines Meridians unserer Fläche einer Hyperbel angehört, deren imaginäre Axe die Drehungsaxe jener Fläche ist; folglich haben wir einen zweiten Satz:

Ein beliebiger Meridian des Rotationshyperboloides ist eine Hyperbel, deren reelle Axe der Halbmesser des Kehlkreises jener Fläche ist.

Nimmt man nun an, dass $z_1 z_2 \neq Z_1 Z_2$ und $\sphericalangle A z_2 z_1 \doteq \sphericalangle B z_2 z_1$ ist, so wird auch aus der Congruenz der Dreiecke $A z_1 z_2$ und $B z_2 z_1$: $A z_1 = B z_1$, folglich hat man $CA = CB$, und mithin liegt der Punkt A auf dem von B während der Umdrehung von BB_1 beschriebenen Parallelkreise, und es gehört also der Punkt A dem Hyperboloide an. Man kann aber auf dieselbe Weise zeigen, dass jeder Punkt der Geraden AA_1 dieser Fläche angehört, und es folgt hieraus, dass man durch Fortbewegung der Geraden AA_1 dasselbe Hyperboloid erzeugen kann, welches die Gerade BB_1 erzeugt. Daraus folgt also drittens:

Ein Rotationshyperboloid hat zweierlei Erzeugende, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, und welche mit der durch diesen Punkt gehenden und mit der Rotationsaxe parallelen Geraden gleiche Winkel bilden.

Man nennt die erste Erzeugende die des ersten und die zweite die des zweiten Systems, und es lässt also das Hyperboloid zwei Erzeugungsarten zu. Denkt man sich nun den Kehlkreis wieder horizontal projicirt, und den projicirenden Cylinder gezogen, sodann durch einen Punkt des Kehlkreises eine Erzeugende des ersten und sodann eine Erzeugende des zweiten Systems gelegt, so werden diese beiden Geraden mit der durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Erzeugenden des projicirenden Cylinders in einer auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Ebene liegen. Diese Ebene ist mithin die horizontal projicirende Ebene jeder der beiden Geraden, und da schon am Anfange dieses §. erwähnt wurde, dass die horizontale Spur dieser Ebene Tangente des Kehlkreises ist, so wird von jeder jener beiden Erzeugenden die horizontale Projektion als Tangente des Kehlkreises erscheinen. Wenn man daher an letzteren eine Tangente zieht, so kann diese entweder die horizontale Projektion einer Erzeugenden des ersten, oder die horizontale Projektion einer Erzeugenden des zweiten Systems sein.

Wenn man mehrere solche Tangenten des Kehlkreises zieht, so kann man erst dann entscheiden, welche die horizontalen Projektionen von Erzeugenden des einen oder des andern Systemes sind, sobald die horizontalen Spuren dieser Erzeugenden bekannt sind. — Ausser diesen genannten Eigenschaften ist nun noch leicht einzusehen, dass jede Erzeugende des einen Systems alle Erzeugende des andern schneiden muss, dass aber ferner die Erzeugenden eines und desselben Systems sich weder schneiden noch parallel sein können. —

Vermittelst aller dieser hier entwickelten Eigenschaften des Rotationshyperboloides wird man nun auch im Stande sein, dasselbe zu konstruiren. —

§. 300.

Aufgabe 35. Es ist die horizontale Spur eines Rotationshyperboloides und sein Kehlkreis gegeben, man soll

1. diese Fläche konstruiren,
2. für einen auf der Fläche angegebenen Punkt eine Tangentialebene an jene legen.

Auflösung. (Fig. 168.) Es sei $M'N'$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, $'k_1 k'_2$ sei die vertikale und $k_1 e k_2 e_1$ die horizontale Projektion des Kehlkreises, ferner sei die Linie $D H B_1 A$, welche (§. 286.) eine Kreislinie sein muss, die horizontale Spur des Hyperboloides, so theile man diese Spur in gleiche (hier in 14) Theile, und ziehe durch die Punkte A, B, C, D etc. etc. die Tangenten des Kehlkreises Aa, Bb, Cc etc. etc., und es werden diese (nach vor. §.) die horizontalen Projektionen von Erzeugenden einerlei Systems sein, von welchen die Punkte A, B, C, D etc. etc. die horizontalen Spuren sind. Bestimmt man nun die vertikalen Projektionen a', b', c' etc. etc. der Punkte, deren horizontale Projektionen in a, b, c etc. etc. sind, gibt sodann auch die vertikalen Projektionen A', B', C' etc. etc. der Punkte A, B, C, etc. etc. an, und zieht die Geraden $'Ga'$, $'Fb'$, $'Ec'$ etc. etc., so werden diese die vertikalen Projektionen der Erzeugenden unserer Fläche sein, und mithin kann letztere bestimmt werden. Um die Curve ($D'k'_1 D''$, $'B_1 k'_2 {}''B_1$), welche der Meridian der Ebene $D M B_1$ ist, zu bestimmen, bestimme man die Durchgangspunkte einer Erzeugenden in verschiedenen ihrer Lagen mit dieser Meridianebene, so werden die vertikalen Pro-

jektionen dieser Durchgangspunkte auch die vertikale Projektion jedes Meridians bestimmen. — Um nun für einen beliebigen Punkt dieser Fläche, eine Tangentialebene an diese zu legen, ziehe man durch diesen Punkt zwei Generatricen verschiedenen Systems, lege durch dieselbe eine Ebene, so erhält man die gesuchte Tangentialebene.

§. 201.

Aufgabe 36. Parallel mit einer gegebenen Ebene an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Die Tangentialebene einer Rotationsfläche hat mit dieser bloss den Berührungspunkt gemeinschaftlich, und kann mithin noch die Bedingung erfüllen, mit einer Ebene parallel zu sein, so dass noch der Berührungspunkt auf derselben enthalten ist. Man lege nun vor Allem wieder die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel, und verfahre dann auf folgende Weise:

1. Ziehe man von der horizontalen Spur der Rotationsaxe aus auf die horizontale Spur der gegebenen Ebene eine Senkrechte, so wird diese die horizontale Spur jener Meridianebene sein, welche den Berührungspunkt enthält, weil (§. 295.) die horizontale Spur der Tangentialebene einer Rotationsfläche senkrecht auf der horizontalen Spur der Meridianebene ist, welche den Berührungspunkt enthält.
2. Bestimme man die Communsektion dieser Meridianebene mit der gegebenen Ebene, so wird diese Durchschnittslinie parallel zu derjenigen Tangente des Meridians*) sein, welche durch den Berührungspunkt der zu suchenden Tangentialebene geht. Denn da diese Tangente in der gesuchten Tangentialebene sowohl, als auch in der gegebenen Meridianebene liegt, so ist dieselbe die Communsektion dieser beiden Ebenen. Die Meridianebene schneidet aber die gegebene Ebene und die Tangentialebene nach Geraden, die unter sich parallel sein müssen, folglich ist die Communsektion der Meridianebene und der gegebenen Ebene parallel zu der Tangente des Meridians für den gegebenen Berührungspunkt.
3. Drehe man die Meridianebene (welche den Berührungspunkt enthält) parallel zur vertikalen Tafel, suche die neue Lage jener (in 2. bestimmten) Communsektion, und ziehe mit dieser an den Haupt-Meridian Parallele, so werden diese die vertikalen Projektionen der Parallelkreise angeben, auf welchen sich der Berührungspunkt befindet, und zu diesen Parallelkreisen können die horizontalen Projektionen bestimmt werden.
4. Suche man die horizontalen Spuren dieser Tangenten, und bestimme die Lagen dieser Punkte in der wahren Lage der Meridianebene, ziehe durch diese Spuren parallele Gerade mit der horizontalen Spur der gegebenen Ebene, so erhält man die horizontalen Spuren der zwei Tangentialebenen, welche die angegebene Bedingung erfüllen. Die vertikalen Spuren dieser Ebenen können nach §. 297. angegeben werden.

Beispiel. (Fig. 167.) Es sei ABCD die horizontale und $'AM_1B'M_2$ die vertikale Projektion einer Rotationsfläche, die hier eine Kugel ist, $(M'_1M'_2, M)$ sei die Rotationsaxe, ESE' sei eine Ebene, man soll an die Fläche eine Tangentialebene parallel zu ESE' legen. Man ziehe die Gerade MN senkrecht auf E, so erhält man die horizontale Spur der Meridianebene, welche den Berührungspunkt der zu suchenden Tangentialebene enthält, und der Punkt (a, a') gehört der Communsektion dieser beiden Ebenen an. Um noch einen zweiten Punkt dieser letzteren zu erhalten, ziehe man $bc \neq E$, ferner cc' senkrecht auf X, und von dem Durchschnittspunkte c' der letzteren mit E' eine Parallele c'b' mit X, durchschneide sodann c'b' von der durch b auf X gezogenen Senkrechten, so erhält man den Punkt b', dessen horizontale Projektion in b ist. Bringt man nun die Ebene MN in die Lage MN_1, so beschreiben die Punkte a und b Kreisbögen von den Halbmessern Ma und Mb, und kommen nach a_1 und b_1 zu liegen, ihre vertikalen Projektionen aber werden nach a'_1 und b'_1 zu liegen kommen. Zieht man nun die Gerade $a'_1b'_1$, so wird diese die vertikale Projektion der Communsektion von der Meridianebene MN_1 und Ebene ESE' sein. Zieht man nun $m'_1s'_1 \neq n'_1s'_2 \neq a'_1b'_1$, und zieht s'_1s_1 sowohl, als s'_1s_2 senkrecht auf X, so werden die Punkte s_1 und s_2 die horizontalen Spuren jener Geraden sein, welche parallel mit $(a'_1b'_1, a_1b_1)$ sind und den Meridian $'AM_1'BM_2$ tangiren. Bringt man nun die Punkte s_1 und s_2 in die Meridianebene MN, so kommeu dieselben nach s_3 und s_4 zu liegen, während die Punkte (m_1, m'_1) und (n_1, n'_1) nach (m, m') und (n, n') zu liegen kommen, und die Berührungspunkte der zwei Tangentialebenen sind, welche parallel zur

*) Anmerk. Es ist hier bloss von dem Meridiane der Rotationsfläche die Rede, auf welchem sich der Berührungspunkt der gesuchten Tangentialebene befindet.

gegebenen Ebene sind. Zieht man nun durch s_3 und s_4 die Geraden T_1 und $T_2 \neq E$, und durch die Punkte S_1 und S_2 die Geraden T'_1 und $T'_2 \neq E'$, so erhält man die Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen. —

§. 302.

Aufgabe 37. Durch einen gegebenen Punkt eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, wenn ein Parallelkreis gegeben ist, auf welchem sich der Berührungspunkt befinden soll.

Auflösung. Es ist aus §. 292. bekannt, dass eine Rotationsfläche als Umhüllung eines Kegels betrachtet werden kann, dessen Direktrix ein Parallelkreis ist. Zieht man daher jenen Conus, welcher den gegebenen Parallelkreis zur Direktrix hat, so wird dieser die gegebene Fläche nach diesem Parallelkreise tangiren. Legt man nun durch den gegebenen Punkt an diesen umhüllten Kegel eine Tangentialebene, so wird letztere eine Erzeugende des Kegels enthalten. Da aber diese Erzeugende den Parallelkreis treffen muss, so wird der Punkt, den der Parallkreis und diese Erzeugende gemeinschaftlich haben, auf der Tangentialebene liegen, und da diese Ebene bloss diesen Punkt und keinen zweiten mit der Rotationsfläche gemeinschaftlich hat, so wird dieselbe die gesuchte sein. Es ist mithin die Tangentialebene, welche durch den gegebenen Punkt an die erwähnte Umhüllte der Rotationsfläche gelegt werden kann, die gesuchte. (Fig. 169.) Ist $M_1 M_2$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, ferner A B C D die horizontale und $'AM_1 B' M_2$ die vertikale Projektion der Rotationsfläche, welche hier wieder eine Kugel sein soll, und man soll durch den Punkt (a, a') an diese Fläche eine Tangentialebene legen, deren Berührungspunkt auf dem Parallelkreise ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) liegt, so ziehe man de Tangenten α' m'_1 und β' n'_1 für den Meridian $'AM_1 B' M_2$, so erhält man die vertikalen Projektionen zweier Erzeugenden des umhüllten Conus, von welchen die horizontalen Projektionen in $m_1 n_1$ liegen. Sucht man die horizontale Spur n_1 von ($\beta' n'_1$, β n), und beschreibt aus M mit dem Halbmesser M n_1 einen Kreis, so erhält man die horizontale Spur $m_1 P_2 n_1 P_1$ jenes Kegels. Um nun an letzteren durch (a, a') eine Tangentialebene zu legen, rücke man die horizontale Tafel, bis dieselbe durch den Punkt (a, a') geht, also X nach X' zu liegen kömmt, so wird die neue horizontale Spur des Kegels s_1 n s_2 m sein. Zieht man an diese die Tangenten a m und a n, so werden letztere die horizontalen Projektionen zweier Geraden sein, mit welchen die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen parallel sein müssen, und deren vertikale Projektionen in a' s'_1 liegen. Zieht man nun M P_1 und M P_2, so erhält man die horizontalen Projektionen der Berührungserzeugenden, und durch P_1 und P_2 Tangenten an die horizontale Spur des umhüllten Conus gezogen, so erhält man die horizontalen Spuren der zwei Tangentialebenen, zu welchen die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ nach den frühern Regeln angegeben werden können.

§. 303.

Aufgabe 38. Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn sich der Berührungspunkt auf einem gegebenen Meridiane befinden soll.

Auflösung. (Fig. 170.) Ist $M_1 M_2$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, die senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, ferner A C B D die horizontale Projektion des Aequators (folglich dieser selbst) und $'AM_1 B' M_1$ der Hauptmeridian, endlich a und a' die Projektionen eines Punktes, man soll eine Tangentialebene an die Fläche ($'AM_1 B' M_2$, A C B D) legen, deren Berührungspunkt auf dem Meridiane sich befindet, von welchem die horizontale Spur seiner Ebene die Gerade M N ist. — Wir wissen, dass die gegebene Fläche Umhüllung eines Cylinders sein kann, dessen Direktrix der gegebene Meridian und von welchem die Generatrix senkrecht auf der Ebene dieser Curve ist. Wenn wir daher auf MN senkrechte Linien ziehen, so werden diese mit der horizontalen, und auf $M_2 M_1$ senkrechte Gerade gezogen, so werden letztere mit der vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix des umhüllten Cylinders parallel sein. Da also die Erzeugende dieses Cylinders senkrecht auf der Meridianebene, also parallel mit der horizontalen Tafel ist, so ist der Cylinder auch mit dieser Tafel parallel. Legen wir nun durch den Punkt (a, a') eine Tangentialebene an diesen Cylinder, so wird dieselbe die gegebene Rotationsfläche nicht schneiden können, weil keine Erzeugende des Cylinders jene Fläche schneidet, und die Tangentialebene bloss eine Erzeugende mit dem Cylinder gemein hat. Diese Ebene wird vielmehr den Punkt, in welchem ihre Berührungserzeugende mit dem Cylinder den gegebenen Meridian trifft, mit der Rotationsfläche nur gemein haben, und folglich wird diese Fläche von der Tangentialebene, die man durch den gegebenen Punkt an den umhüllten Cylinder legt, tangirt. Geben wir daher jene Tangentialebene an, so wird dieselbe die gesuchte sein. Da wir aber das in (§. 261.) angegebene Verfahren nicht so, wie es dort erklärt wurde, anwenden können, weil die horizontale Spur

des umhüllten Cylinders fehlt, so betrachten wir die gegebene Meridianebene als Projektionstafel für den Cylinder, und lösen in Bezug auf diese die Aufgabe ebenso, wie in §. 261. gezeigt wurde, und zwar auf folgende Weise:

1. Legt man die Gerade ad senkrecht auf MN, a'n senkrecht auf $M_1 M_2$, so ist in d die horizontale und in d' die vertikale Projektion des Durchgangspunktes dieser Geraden (ad, a'd') mit Ebene MN.
2. Von diesem Punkte (d, d') haben wir eine Tangente an den Meridian, nämlich an die Direktrix des Cylinders zu legen, so wird diese die Gerade sein, nach welcher Ebene MN von der gesuchten Tangentialebene geschnitten wird. Um aber diese Tangente zu erhalten, bringen wir MN in die Lage von MN_1, so wird der Meridian mit dem gegebenen Hauptmeridiane $AM_1B'M_2$ zusammenfallen. Durch diese Drehung der Ebene MN kömmt aber der Punkt (d, d') nach (d'_1, d_1) zu liegen, und ziehen wir daher d'_1p', so wird diese die vertikale und d_1M die horizontale Projektion der Communsektion der gesuchten Tangentialebene und des Hauptmeridians sein. Bestimmen wir nun die horizontale Spur dieser Tangente, und bringen wir MN_1 wieder nach MN, so kömmt s nach s_1 zu liegen, und da dieser letztere Punkt in der gesuchten Tangentialebene liegen muss, so haben wir nur s_1S_1 senkrecht auf MN zu ziehen, und wir erhalten hierdurch (§. 295.) die horizontale Spur E der gesuchten Tangentialebene. Die vertikale Spur E'_1 kann nun leicht bestimmt werden, weil man den Berührungspunkt (p_1, p'_1) bestimmt hat, und es ist mithin $E_1SE'_1$ die gesuchte Tangentialebene. — Da man noch die zweite Tangente $d'_1p'_3$, an den Hauptmeridian ziehen kann, so ist auch noch eine zweite Tangentialebene möglich, welche den Punkt (a, a') enthält; diese kann aber ebenso, wie die Ebene $E_1S_1E'_1$ bestimmt werden. —

§. 304.

Aufgabe 39. Parallel einer gegebenen Geraden eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, wenn der Parallelkreis gegeben ist, auf welchem sich der Berührungspunkt befindet.

Auflösung. Betrachten wir den gegebenen Parallelkreis als Direktrix eines Kegels, (§. 292.) so wird dieser die gegebene Rotationsfläche tangiren. Legen wir daher an diesen umhüllten Conus eine Tangentialebene parallel zur gegebenen Geraden, so wird diese Ebene mit dem Conus bloss eine Erzeugende, also mit der Rotationsfläche auch nur den Punkt gemein haben, in welchem diese Erzeugende den gegebenen Parallelkreis trifft. Die Tangentialebene also, welche wir parallel zur gegebenen Geraden an den Conus legen, dessen Direktrix der angegebene Parallelkreis ist, wird die gesuchte sein. Dass hier wieder zwei solche Ebenen möglich sind, ist aus §. 271. bekannt. Man kann bei der Bestimmung einer jeden dieser Tangentialebenen entweder das in §. 275. angegebene Verfahren anwenden, oder den Kegel so weit abwärts schieben, bis sein Centrum auf den Tafeln erhalten wird, und sodann das in §. 271. angegebene Verfahren anwenden, nach der Aufsuchung einer Geraden, die der Tangentialebene angehört oder welche eine ihrer Spuren bestimmt, wieder den Conus in seine vorige Lage bringen. — In Fig. 171. ist ein Beispiel hiezu, in welchem die Construktionen leicht einzusehen sind. —

§. 305.

Aufgabe 40. Parallel zu einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn der Berührungspunkt sich auf einem gegebenen Meridiane befindet.

Auflösung. Zieht man den Cylinder, der zur Direktrix den gegebenen Meridian hat, und dessen Generatrix senkrecht auf der gegebenen Meridianebene steht, legt sodann an diesen umhüllten Cylinder parallel zur gegebenen Geraden zwei Tangentialebenen nach den früher angegebenen Regeln, so werden diese die gesuchten sein. Die Punkte, in welchen der Meridian von den Berührungserzeugenden (der Tangentialebene und des umhüllten Cylinders) getroffen werden, sind die Berührungspunkte beider Tangentialebenen mit der Rotationsfläche. — Hierzu ist ein Beispiel in Fig. 172. —

Siebentes Kapitel.

Tangirende Flächen.

§. 306.

Aufgabe 41. Durch einen gegebenen Punkt einen Conus zu legen, welcher eine angegebene Rotationsfläche tangirt, und die Berührungscurve zu bestimmen.

Auflösung. Nimmt man einen beliebigen Parallelkreis an, und zieht durch den gegebenen Punkt eine Ebene, welche die gegebene Fläche nach einem auf diesem Parallelkreise liegenden Punkte tangirt, sucht sodann diesen Punkt auf, und verbindet diesen mit dem gegebenen durch eine Gerade, so erhält man eine Erzeugende des verlangten Conus, und jener Berührungspunkt gehört der Berührungscurve dieses Conus und der Fläche an. Um daher diesen Conus zu bestimmen, nehme man mehrere Parallelkreise an, und suche auf diesen die Berührungspunkte jener Ebenen (§. 302.) auf, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die Rotationsfläche tangiren, verbinde diese einzelnen Berührungspunkte durch eine stätige Curve, so wird diese die Berührungscurve des verlangten Conus mit der gegebenen Fläche sein. Einzelne Punkte dieser Curve mit dem gegebenen Punkte durch Gerade verbunden, so erhält man auch Erzeugende des berührenden Conus. —

§. 307.

Aufgabe 42. Parallel mit einer gegebenen Geraden einen tangirenden Cylinder an eine Rotationsfläche zu legen, und die Berührungscurve zu suchen.

Auflösung. Nimmt man einzelne Meridiane der Rotationsfläche an, betrachtet diese als Direktricen von Cylindern, welche von jener Fläche umhüllt werden, und legt an jeden dieser Cylinder eine Tangentialebene, die parallel zur gegebenen Geraden ist, zieht sodann durch den Berührungspunkt einer jeden dieser Tangentialebenen eine Gerade parallel zur gegebenen, so erhält man eine Erzeugende des gesuchten Cylinders. Die Berührungspunkte aller dieser Tangentialebenen durch eine stätige Curve verbunden, geben die Berührungscurve des tangirenden Cylinders mit der gegebenen Rotationsfläche. —

§. 308.

Die in den beiden vorigen Paragraphen gelösten Aufgaben können sogleich angewendet werden, um durch eine gegebene Gerade an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen. Hätten wir nämlich diese Ebene, so könnten wir durch ihren Berührungspunkt eine Gerade L in derselben ziehen, die parallel zur gegebenen Geraden ist. Legen wir daher parallel zur gegebenen Geraden einen tangirenden Cylinder an die Rotationsfläche (nach §. 306.), so wird eine der Erzeugenden dieses tangirenden Cylinders die Gerade L sein. Ziehen wir nun von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Gerade L_1 nach dem Berührungspunkte der gesuchten Tangentialebene, so wird in dieser die Linie L_1 liegen müssen. Wenn wir also durch einen Punkt der gegebenen Geraden einen tangirenden Conus an die Rotationsfläche legen, so wird eine der Erzeugenden dieses Conus die Gerade L_1 sein. Suchen wir daher den Durchschnittspunkt der Direktrix des tangirenden Conus mit der des tangirenden Cylinders, so wird dieser Punkt auf der gesuchten Tangentialebene liegen und der Berührungspunkt dieser Ebene sein. Da aber zwei solche Punkte erhalten werden, so haben wir zwei Tangentialebenen der Rotationsfläche, welche die gegebene Gerade enthalten. Da nun die Berührungspunkte dieser Ebenen angegeben werden können, so können auch diese zwei Tangentialebenen bestimmt werden. —

§. 309.

Ist ein Punkt auf irgend einer Fläche gegeben, so kann man für diesen an die Fläche eine Tangentialebene legen. Wenn nun die gegebene Fläche abwickelbar ist, so geschieht die Tangirung nach einer Lage der Erzeugenden dieser Fläche, mit einer jeden andern Fläche hat aber eine Tangentialebene derselben nur einen Punkt gemeinschaftlich. Soll daher eine Tangentialebene an eine Fläche gelegt werden, so kann dieselbe noch andere Bedingungen erfüllen, ohne dass sie aufhört, Tangentialebene der gegebenen Fläche zu sein, und zwar kann die Tangentialebene entweder noch eine oder auch noch eine zweite Fläche tangiren. Es können nämlich folgende Fälle statt finden:

1. Kann eine Ebene eine entwickelbare Fläche tangiren, und zugleich Tangentialebene einer unentwickelbaren Fläche sein; denn jene wird nach einer Geraden und diese nach einem Punkte von der Ebene tangirt, folglich ist diese Ebene möglich und der Lage nach völlig bestimmt.
2. Kann eine Ebene zwei unabwickelbare Flächen tangiren und zugleich noch durch einen gegebenen Punkt gehen, oder auf einer gegebenen Ebene senkrecht stehen.
3. Kann eine Ebene drei nicht entwickelbare Flächen zugleich tangiren.

Anmerk. Ist ausser der Bedingung, dass eine Ebene zwei nicht entwickelbare Flächen tangiren soll, keine andere gegeben, so ist die Tangentialebene unbestimmt, und kann daher noch tangirend an beiden Flächen fortbewegt werden. Da aber hierdurch eine Fläche beschrieben wird, so kann man für zwei unenwickelbare Flächen eine tangirende Fläche bestimmen. Diese Fläche wird entwickelbar sein. —

§. 310.

Aufgabe 43. Es sind zwei nicht abwickelbare Flächen gegeben; man soll an diese Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht.

Auflösung. Ist die gegebene Ebene durch E bezeichnet, so ziehe man zwei Cylinder, von welchen der eine die erste und der andere die zweite Fläche tangirt, und deren Generatricen auf E senkrecht, also unter sich parallel sind. Die Berührungscurve des einen Cylinders sei c_1, die des andern c_2. Nun suche man die Durchschnittscurven beider Cylinder mit der Ebene E, und lege an diese beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente t, so kann diese Tangente als eine in der für beide Cylinder gemeinschaftliche Tangentialebene liegende Gerade betrachtet werden. Geben wir nun diese Tangentialebene an, bestimmen ihre Berührungspunkte und die Erzeugenden mit beiden Cylindern, von welchen die eine g_1, die andere g_2 sein soll, so wird c_1 von g_1 und c_2 von g_2 geschnitten, und zwar in Punkten, die der gesuchten Tangentialebene angehören, wodurch also letztere bestimmt ist.

§. 311.

Aufgabe 44. Durch einen gegebenen Punkt an zwei nicht entwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Man nehme beliebige Ebenen an, und ziehe auf diese senkrecht solche Ebenen, welche die beiden gegebenen Flächen tangiren (§. 310.), so werden die auf einander folgenden Lagen aller dieser Tangentialebenen eine entwickelbare Fläche bilden, welche die beiden gegebenen nicht entwickelbaren Flächen tangirt. Legt man nun an jene Fläche eine Tangentialebene, welche durch den gegebenen Punkt geht, so erhält man die gesuchte.

§. 312.

Aufgabe 45. Es sind drei unentwickelbare Flächen gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Tangentialebene angeben.

Auflösung. Es sei M die erste, N die zweite und P die dritte der gegebenen Flächen. Legen wir an M und N die gemeinschaftliche tangirende Fläche P_1, sodann auch für M und P eine solche Fläche P_2, und es sei nun m_1 die Curve, welche P_1 mit M und m_2 die Curve, die P_2 mit M gemeinschaftlich hat, so werden sich m_1 und m_2 schneiden. Ziehen wir nun durch den erhaltenen Durchschnittspunkt eine Erzeugende g_1 von P_1 und sodann eine Erzeugende g_2 von P_2, und legen durch g_1 und g_2 eine Ebene, so ist diese die gesuchte. —

§. 313.

Aufgabe 46. Für drei Kugeln eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu finden. —

Auflösung. Ist A die erste, B die zweite und C die dritte dieser Kugeln; so suchen wir für A und B ihre tangirende Fläche (welche hier ein Conus ist) k_1, sodann bestimmen wir für A und C die Tangentialfläche k_2. Nun soll A von k_1 nach a und von k_2 nach b berührt werden, so schneiden sich a und b nach zwei Punkten. Zieht man durch jeden dieser Punkte für k_1 und k_2 die Erzeugende, und legt durch jede dieser Erzeugenden eine Berührungsebene an den entsprechenden Conus, so erhält man zwei Ebenen, welche jede der drei Kugeln zugleich berühren. Da aber für P und B sowohl, als auch für A und C nicht eine, sondern zwei tangirende Flächen möglich sind, und je zwei Berührungscurven sich auf A schneiden, so erhalten wir acht Berührungspunkte, und mithin gibt es auch für drei Kugeln acht gemeinschaftliche Tangentialebenen. —

Vierte Abtheilung.

Erzeugung und Tangirung der windschiefen Flächen.

Achtes Kapitel.

§. 314.

Bewegt sich eine Gerade so, dass nie zwei auf einander folgende Lagen derselben in einer Ebene liegen, so entsteht hierdurch eine Fläche, die man windschiefe Fläche nennt.

Da in einer solchen Fläche nie zwei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden in einer Ebene liegen, so hat dieselbe auch kein ebenes Flächenelement. —

Es bewege sich nun

1. die Erzeugende so, dass sie stets drei in verschiedenen Ebenen liegende Curven A, B, C trifft, so entsteht hierdurch eine Fläche, die windschief ist. Um eine beliebige Lage der Erzeugenden zu erhalten, nehme man auf A einen Punkt an, lege durch diesen und die Curve C einen Conus, und suche die Durchschnittspunkte dieser konischen Fläche mit der Linie B, so werden die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden des Conus einzelne Lagen jener Generatrix sein. Auf dieselbe Weise müsste man verfahren, um noch mehrere Lagen der Erzeugenden zu erhalten, wenn man die Fläche selbst darstellen wollte. — Zieht man für die Durchschnittspunkte der Linien A, B, C mit einer Erzeugenden die Tangenten, so liegen diese in verschiedenen Ebenen, und da diese als Direktricen für ein Flächenelement dienen können, so wird also dieses Flächenelement nicht eben sein. Ist jede dieser drei Direktricen eine Gerade, so entsteht durch Bewegung einer Geraden an diesen Direktricen eine windschiefe Fläche, welche Hyperboloid mit einem Fache genannt wird, und schon früher erwähnt wurde. Eine beliebige Lage der Erzeugenden dieses Hyperboloides wird erhalten, wenn man durch einen Punkt der Direktrix A und die Direktrix C eine Ebene legt, und den Durchgangspunkt von B mit dieser Ebene sucht. Zieht man von dem in A angenommenen Punkte nach diesem Durchgangspunkte eine Gerade, so wird von dieser die Direktrix C getroffen, und man erhält folglich eine Lage der Generatrix. Bestimmt man beliebig viele Lagen dieser letzteren, so kann man hierdurch die Fläche sich vorstellen. — Es können zwei Direktricen noch Curven sein, z. B. A und C, und B eine Gerade, und ferner kann nur eine Direktrix eine Curve, jede der übrigen aber eine Gerade sein.
2. Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets zwei Curven trifft, und parallel zu einer angegebenen Ebene bleibt, so entsteht wieder eine windschiefe Fläche. Ist eine der gegebenen Direktricen eine Gerade, so entsteht hierdurch das Conoid. Steht die geradlinige Direktrix senkrecht auf der Direktionsebene, so entsteht das senkrechte Conoid. Sind endlich beide Direktricen gerade Linien, so geht das Conoid in ein hyperbolisches Paraboloid über.

§. 315.

Nimmt man auf einem Flächenelemente einen solchen kleinen Theil an, der als eben betrachtet werden kann, und verlängert diesen ebenen Theil, so erhält man eine Tangentialebene. Legt man nun durch einen gegebenen Berührungspunkt eine Generatrix der Fläche, so erhält man eine der Tangentialebene angehörende Gerade; legt man ferner durch jenen Punkt eine Curve, die der Fläche angehört, und an diese durch den gegebenen Berührungspunkt eine Tangente, so wird diese auch in der Tangentialebene liegen, und es ist mithin diese ganz und gar der Lage nach bestimmt. Von allen anderen nicht durch den Berührungspunkt gehenden Generatricen werden auch manche die Tangentialebene treffen, und zwar alle jene, die mit ihr nicht parallel sind. Wir ersehen also hieraus, dass die Tangentialebene einer windschiefen Fläche diese in einem Punkte berührt, in allen übrigen aber schneiden kann.

§. 316.

Für die Erzeugung der windschiefen Flächen sind noch einige Sätze zu erwähnen nöthig.

1. (Fig. 173.) Es seien die Seiten des △ ABC in den Punkten a, b, c von einer Geraden getroffen, so ist, wenn Cf ≠ AB gezogen wird:
aB : Cf = Bb : bC, ferner
Cf : Aa = Cc : Ac,
und hieraus hat man
Aa × Bb × Cc = aB × bC × Ac
d. h. schneidet man die drei Seiten eines Dreieckes durch eine Gerade, so werden die Produkte aus den nicht an einander hängenden Stücken der Seiten einander gleich sein. —

2. (Fig. 174.) Es sei das Viereck ABCD ein windschiefes; dasselbe ist von einer Ebene so geschnitten, dass die Durchgangspunkte seiner Seiten mit dieser Ebene a, b, c und d sind. Zieht man nun die Diagonale BD, und legt durch A, B und D eine Ebene, so wird diese von der ersten Ebene nach der Geraden baS geschnitten, und legt man durch B, C und D eine Ebene, so wird diese von der Ebene der Punkte a, b, c, d in cdS geschnitten, wobei die Geraden ba und cd in einem Punkte S der Diagonale BD zusammen kommen müssen, weil letztere von der am Anfange angenommenen Ebene nur in einem Punkte getroffen werden kann. Es ist nun (nach 1.)
Aa × DS × Bb = aD × BS × bA und
Dd × BS × cC = Cd × Ds × Bc
folglich
Aa × Bb × cC × dD = Ab × Bc × Cc × Dd
d. h. Schneidet man die Seiten eines Viereckes durch eine Ebene, so müssen die Produkte aus den nicht an einander liegenden Stücken derselben einander gleich sein.

3. Ist (Fig. 174.)
Ab × Bc × Cd × Da = aA × bB × cC × dD,
und man zieht die Geraden BDS, cdS, bas, so wird (nach 1.)
aA × bB × sD = Da × Ab × Bs und
cC × Dd × SB = Bc × Cd × DS,
daher erhält man durch Multiplikation dieser drei Gleichungen:
Ds × BD + Ds × DS = DS × BD + DS × Ds
oder
Ds = DS
Da aber in diesem Falle a mit S zusammenfällt, so liegen die Punkte a, b, c und d in einer Ebene.

§. 317.

Hat man nun ein Hyperboloid mit einem Fache, dessen Direktricen (Fig. 175.) A_1, A_2 und A_3 sind, und B_1, B_2, B_3 sind drei Lagen der Generatricen, so schneiden diese die drei Direktricen in den Punkten a, b, c, h, r, g, f, e und d, und es liegen h, b, g und e in einer Ebene, weil A_2 und B_2 sich schneiden. Lässt man nun B_1, B_2 und B_3 fest liegen, und eine Gerade an diese fortbewegen, so entsteht ein zweites Hyperboloid, von welchem ks eine Lage der Generatrix sein soll; mithin werden die Punkte h, k, g und s in einer Ebene liegen, weil hg und ks sich schneiden, nämlich in l. Nimmt man eine Generatrix mq des ersten Hyperboloides an, so werden die Punkte m, b, q und e in einer Ebene liegen, weil mq und A_2 sich schneiden, nämlich in p. Nun hat man (nach 2. des vor. §.):
fh × ab × cg × de = fe × ha × bc × dg, ferner
ha × kc × dg × fs = fh × ak × cg × ds und
ma × bc × qd × fe = fm × ab × cq × de,
daher durch Multiplikation dieser Gleichungen:
am × ck × dq × sf = fm × ak × cq × ds
Hieraus folgt (nach 3. des vor. §.), dass die Punkte m, k, q und s in einer Ebene liegen. Es müssen sich also die Geraden mq und ks schneiden, und es schneidet also eine beliebige Generatrix des ersten Hyperboloides eine jede des zweiten, oder alle Generatricen des ersten werden von denen des zweiten Hyperboloides geschnitten. Es ist also das zweite Hyperboloid dasselbe, wie das erste, und es kann mithin ein Hyperboloid auf zweierlei Weise erzeugt werden. —

Anmerk. Nimmt man einen beliebigen Punkt auf einem Hyperboloide an, so kann man durch denselben zwei Generatricen verschiedenen Systems legen, und legt man durch diese eine Ebene, so erhält man eine Tangentialebene des Hyperboloides für diesen Punkt. — Es ist leicht aus den obigen Betrachtungen zu ersehen, wie man ein Hyperboloid mit einem Fache konstruiren kann, wenn seine drei Direktricen bekannt, und wie man eine Generatrix des zweiten Systems erhält, wenn drei Lagen der Generatrix des ersten Systems bekannt sind.

§. 318.

(Fig. 176.) Ist D_1 die eine und D_2 die zweite Direktrix eines hyperbolischen Paraboloides, ferner ac und df zwei Lagen der Erzeugenden desselben, so kann man diese letztere als zwei Lagen

der Direktionsebene oder der Ebene ansehen, mit welcher dieselben parallel bleiben. Zieht man nun durch den beliebigen Punkt m die Geraden $D'_1 \neq D_1$ und $D'_2 \neq D_2$, lässt ac und df fest liegen, und eine Gerade an diesen fortbewegen, die parallel zur Ebene $D'_1 m D'_1$ bleibt, so entsteht ein zweites Paraboloid. Ist nun von diesem die Gerade b e eine beliebige Lage der Generatrix und von dem ersteren die Gerade g h eine beliebige Lage der Erzeugenden, so ist (nach §. 39.), weil die Geraden ac, gk und df als die Stellungen der Direktionsebene des ersten Paraboloides betrachtet werden können:

$$ag : ck = gd : kf \text{ oder}$$

$$ag \times kf = ck \times gd \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Man kann aber auch die Geraden D_1, be und D_2 als drei parallele Stellungen der Direktionsebene $D'_2 m D'_1$ betrachten, und deshalb ist wieder (§. 39.):

$$bc : fe = ab : de, \text{ und daher auch}$$

$$bc \times de = ab \times fe \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Durch Multiplikation von (1 und 2) ergibt sich:

$$ag \times bc \times kf \times de = ab \times ck \times ef \times dg,$$

daher liegen (nach §. 316., 3.) die Punkte g, b, k und e in einer Ebene, oder die beliebige Generatrix gk des ersten Paraboloides muss die beliebig angenommene Erzeugende be des zweiten Paraboloides schneiden. Da nun auf dieselbe Weise gezeigt werden kann, dass jede Generatrix des ersten eine Lage der Generatrix des zweiten Paraboloides schneiden muss, so liegen alle Punkte des ersten auch auf allen Punkten des zweiten Paraboloides, oder das auf die erste Weise erzeugte Paraboloid ist dasselbe, als das auf die zweite Weise erzeugte. Es lässt also auch ein hyperbolisches Paraboloid zweierlei Erzeugungsarten zu.

Anmerk. Aus diesem folgt, dass man durch einen Punkt eines Paraboloides eine Erzeugende des ersten und eine des zweiten Systems legen kann. Legt man durch zwei solche Erzeugende eine Ebene, so erhält man für den angenommenen Punkt eine Tangentialebene des Paraboloides.

§. 319.

Aufgabe 47. Die Direktricen eines Paraboloides sind parallel zur vertikalen Tafel, und die Generatrix desselben soll stets parallel zur horizontalen Tafel bleiben; man soll das Paraboloid konstruiren.

Auflösung. (Fig. 177.) Ist (D_1, D'_1) die eine, (D_2, D'_2) die andere Direktrix, so nehme man die Geraden $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$, $a'_3 b'_3$, $a'_4 b'_4$, $a'_5 b'_5$ etc. etc. parallel zur Axe an, so werden diese die vertikalen Projektionen einzelner Lagen der Generatrix sein, zu welchen die horizontalen Projektionen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ etc. etc. gehören. Durch eine gehörige Anzahl von Lagen der Generatrix wird die Form der Fläche bestimmt sein. — Ist der Punkt (m_1, m'_1) gegeben, durch welchen eine Generatrix der Fläche gezogen werden soll, so ziehe man $m'_1 m'_2$ parallel X, bestimme die horizontale Projektion des Punktes, dessen vertikale in m'_2 ist, so wird man m_2 erhalten. Zieht man also $m_1 m_2$, so ist diese die horizontale Projektion der verlangten Generatrix.

Nun lasse man die Generatricen (G_1, G'_1) und (G_2, G'_2) fix liegen, und an diese eine Gerade so fortbewegen, dass sie parallel zur vertikalen Tafel bleibt, so wird hierdurch (nach vor. §.) dasselbe Paraboloid erzeugt. Ist daher $m_1 n$ die horizontale Projektion einer Generatrix des zweiten Systems, so wird die zugehörige vertikale Projektion in D'_3 gefunden, wie die Construktion zeigt. — Sollte man durch (m_1, m'_1) eine Tangentialebene legen, so würde man diese erhalten, wenn man durch die Geraden (G_1, G'_1) und (D_3, D'_3) eine Ebene legt. —

§. 320.

Bewegt sich eine Gerade so, dass sie beständig eine fixe Gerade und eine Curve trifft, und dabei stets mit einer Ebene parallel bleibt, auf welcher die fixe Gerade senkrecht steht, so erhält man das senkrechte Conoid.

Nimmt man die horizontale Tafel als Direktionsebene und eine auf derselben senkrechte Gerade als Direktrix an, so nehme man verschiedene Ebenen parallel zur horizontalen Tafel an, und es werden sodann ihre vertikalen Spuren die vertikalen Projektionen von Lagen der Generatrix sein, deren horizontale Projektionen leicht angegeben werden können, und wodurch also auch das senkrechte Conoid verzeichnet werden kann —

§. 321.

Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets horizontal bleibt, und dabei eine Kugel berührt, so erhält man das Kugelkonoid. Die Berührungscurve des letzteren mit der Kugel ist ausser jener Geraden die Direktrix. Nimmt man zur horizontalen Tafel parallele Ebenen an, sucht die Parallelkreise, nach welchen die Kugel von jenen Hülfsebenen geschnitten wird, und zieht an diese von den Durchgangspunkten der geraden Direktrix mit den Hülfsebenen Tangenten, so erhält man Generatricen des Conoids und mithin auch dieses selbst.

Fünfte Abtheilung.

Durchdringung der Flächen unter sich.

Achtes Kapitel.

Durchdringung entwickelbarer Flächen unter sich.

§. 322.

Diese allgemeine Aufgabe enthält auch die besondere: den Durchschnitt einer Fläche mit einer Ebene zu bestimmen. Das allgemeine Verfahren der letzteren Aufgabe besteht darin, dass man die Durchgangspunkte der Erzeugenden der Fläche und der Durchschnittsebene aufsucht, und die erhaltenen Punkte durch eine Curve verbindet, so wird diese der gesuchte Durchschnitt sein. Man kann aber auch zur Aufsuchung dieses Durchschnittes Ebenen zu Hülfe nehmen, welche die Fläche entweder nach Erzeugenden oder nach bekannten Curven schneiden. Diese Durchschnittscurven sowohl, als auch die Communsektionen der Hülfsebenen mit der Schnittebene müssen bestimmt werden, und man erhält sodann in den Durchschnitten jener Curven mit diesen Communsektionen einzelne Punkte der gesuchten Durchschnittslinie. — Das zuletzt hier angegebene Verfahren wird auch eingeschlagen, um die Durchschnittslinie zweier Flächen anzugeben. Man schneidet nämlich beide Flächen durch Hülfsebenen, welche mit jeder derselben einfache und leicht zu konstruirende Curven gemein haben, sucht die Durchschnittspunkte dieser Curven auf, so werden diese dem gesuchten Durchschnitte angehören. Zu Hülfsebenen wird man zur horizontalen Tafel parallele, auf dieser senkrechte, zur vertikalen Tafel parallele oder auf dieser senkrecht stehende Ebenen etc. etc. wählen, je nachdem die eine oder die andere Lage der Hülfsebenen leicht konstruirbare Schnitte gibt. —

§. 323.

Aufgabe 48. Es sind zwei Cylinderflächen gegeben, man soll ihre Durchschnittslinie aufsuchen.

Auflösung. Man schlage hier dasselbe Verfahren ein, welches für den Durchschnitt zweier Prismen (§. 186. und §. 187.) angegeben wurde, indem man jeden Cylinder als Prisma von unendlich vielen Seitenebenen betrachten kann, wenn man auf die Anzahl dieser Seitenebenen nicht Rücksicht nimmt.

Beispiel. (Fig. 178.) Hier ist $ADGKb_1p_1s_1$ die horizontale, $A'Fs'_1p'_1$ die vertikale Projektion des einen, $A_1B_1D_1M_1p_2$ die horizontale, $A_1H'_1s'_2p'_2$ die vertikale Projektion des andern Cylinders, deren Durchdringungslinie bestimmt werden soll. Diese Cylinder haben eine Eintritts- und eine Austrittscurve, deren Projektionen $(\alpha_1\beta_1\delta_1\varepsilon_1,\ \alpha'_1\beta'_1\delta'_1\varepsilon'_1)$ und $(\alpha_2\beta_2\delta_2\varepsilon_2,\ \alpha'_2\beta'_2\delta'_2\varepsilon'_2)$ sind. — Für einen Punkt einer der Curven erhält man eine Tangente derselben, indem man durch diesen Punkt an jeden der Cylinder eine Tangentialebene legt, so wird die Communsektion dieser beiden Tangentialebenen die gesuchte Tangente sein. —

§. 324.

Soll die Durchdringungslinie zweier Kegel, oder eines Cylinders und eines Kegels bestimmt werden, so verfährt man ganz und gar nach den in den §§. 189, 190. und 191. angegebenen Regeln, und hiernach wurden auch die in den Figg. 179., 180. und 181. gezeichneten Aufgaben behandelt, von welchen die erste die Durchdringung zweier Cylinder darstellt, von denen der eine parallel mit der horizontalen Tafel und der andere senkrecht auf dieser Tafel steht, die zweite in Fig. 180. die Durchdringung eines Kegels mit einem Cylinder und die dritte in Fig. 181. die Durchdringung zweier Kegel zeigt. —

Neuntes Kapitel.

Durchdringung zweier Flächen überhaupt.

§. 325.

Aufgabe 49. Es ist ein Cylinder angegeben, dessen horizontale Spur ein Kreis ist, und derselbe ist von einer Rotationsfläche geschnitten; man soll die Durchdringungslinie bestimmen.

Auflösung. Gibt man die horizontale Spur des Cylinders an, und schneidet sodann beide Flächen durch Ebenen, die parallel zur horizontalen Tafel sind, so erhält man als Durchschnitte der Hülfsebenen mit der Rotationsfläche Parallelkreise und als Durchschnitte des Cylinders mit diesen Ebenen werden Figuren erhalten, die kongruent der horizontalen Spur des Cylinders sein müssen. Wenn man daher eine Hülfsebene parallel zur horizontalen Tafel legt, und den Durchschnitt des auf der Rotationsfläche erhaltenen Parallelkreises mit dem Durchschnitte der Hülfsebene und des Cylinders aufsucht, so erhält man Punkte der Durchschnittslinie.

In Fig. 182. ist ABDE die horizontale Spur eines Cylinders, ACKLE die horizontale und 'AK'L'D' die vertikale Projektion des letzteren, M_1 ist die horizontale und M'_1 die vertikale Projektion des Mittelpunktes einer Kugel, die von jenem geschnitten wird. Legt man z. B. Ebene $a_4 b_4$ parallel zur horizontalen Tafel, so schneidet diese den Cylinder nach einem Kreise, dessen Mittelpunkt in $(m_4 m'_4)$, und im Durchschnitte der Axe des Cylinders $(M M_1, M' M'_1)$ mit $a_4 b_4$ sein wird. Beschreibt man daher mit $m'_4 m''_4$ aus m_4 eine Kreislinie, so müssen auf dieser einzelne Punkte des Durchschnittes enthalten sein. Nun hat man noch aus M_1 mit dem Halbmesser, der gleich $M'_1 m'''_4$ ist, eine Kreislinie zu beschreiben, so wird diese die Durchschnittslinie der Hülfsebene $a_4 b_4$ und des Cylinders schneiden. Dieses geschieht nun in der horizontalen Tafel in dem Punkte s_1, wenn man daher die Gerade $s_1 s'_1$ senkrecht auf X zieht, so wird im Durchschnitte von $M'_1 s'_1$ mit $s_1 s'_1$ nämlich in s'_1 die vertikale Projektion eines Punktes der Durchschnittslinie erhalten. Auf dieselbe Weise bestimme man jeden der übrigen dieser Punkte, verbinde dieselben in gehöriger Ordnung, so erhält man die Projektionen der Durchschnittslinie. Die Linie $(c_1 d_1 g_1 k_1 s_1, c'_1 d'_1 k'_1 s'_1)$ ist die Eintritts- und die Linie $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1, \alpha_1 \beta'_1 \gamma'_1 \alpha'_1)$ die Austrittslinie.

§. 326.

Aufgabe 50. Ein Conus und eine Rotationsfläche durchdringen sich; man soll ihre Durchschnittscurve bestimmen.

Auflösung. Da die Punkte der Durchschnittscurve wieder beiden Flächen angehören, so müssen wir, um diese zu finden, Erzeugende oder andere Linien beider Flächen haben, die sich schneiden. Früher haben wir die gesucht, die immer in einer und derselben Ebene oder Fläche waren, von welch letzteren die beiden Flächen geschnitten wurden. Dieses wollen wir hier auch thun, und jetzt anstatt einer Hülfsebene eine Hülfsfläche nehmen; diese Hülfsfläche soll aber die beiden gegebenen Flächen aufs einfachste schneiden. Nehmen wir nun einen Conus zu Hülfe, so wird dieser den gegebenen Conus nach zwei Geraden aufs einfachste schneiden, welches der Fall sein wird, wenn beide Kegel einerlei Centrum haben. Um nun einen solchen bestimmten Conus zu erhalten, nehmen wir einen Parallelkreis der Rotationsfläche als Direktrix desselben, welchen wir noch beliebig annehmen können, so ist dieser zugleich der Schnitt, den der Hülfsconus mit der Rotationsoberfläche bildet. Um den Conus zu projiciren, wollen wir durch das Centrum des Conus und durch das Centrum des Parallelkreises (der Direktrix) eine Gerade legen, welche die Axe des Hülfsconus ist. Suchen wir von dieser die horizontale Spur, so ist diese das Centrum der Spur des Conus, der zu Hülfe genommen wurde. Diese Spur ist ein Kreis, von welchem nur noch der Radius gesucht werden darf. Um diesen zu erhalten, legen wir an die vertikale Projektion der Direktrix die Projektionen der äussersten Erzeugenden. Diese treffen die Axe, und die Durchschnitte der vertikalen Projektionen von den äussersten Erzeugenden mit der Axe X schliessen den Durchmesser der horizontalen Spur der Hülfsfläche ein, und wir können daher die horizontale Spur der letzteren verzeichnen. Letztere schneidet die horizontale Spur des gegebenen Conus, wodurch wir Punkte der gemeinschaftlichen Erzeugenden beider Kegel erhalten, und bestimmen wir diese, so werden sie den angenommenen Parallelkreis schneiden, wodurch wir Punkte der Durchschnittscurve erhalten. Durch genugsame Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir so viele Punkte der gesuchten Durchschnittslinie, als zur Bestimmung derselben nothwendig sind.

Anmerk. In Fig. 183. ist die Durchdringungslinie eines senkrechten Kreiskegels und einer Kugel aufgesucht, und zwar durch horizontale Hülfsebenen.

§. 327.

Aufgabe 51. Die Durchschnittscurve eines Cylinders mit einer Rotationsfläche zu bestimmen.

Auflösung. Da ein Cylinder nur ein specieller Fall vom Conus ist, so gilt hier wieder das vorige Verfahren. Der zur Hülfsfläche angenommene Kegel wird in einen Cylinder übergehen, weil er mit dem gegebenen sein Centrum in unendlicher Entfernung hat. Wir projiciren daher einen Cylinder vermittelst eines gegebenen Parallelkreises, der mit dem gegebenen parallel ist, suchen sodann die Axe dieses Cylinders, bestimmen ihre horizontale Spur, welche so gross als ihre angegebene Direktrix ist. Vermittelst des Durchschnittes der Spur des Hülfscylinders und der des gegebenen finden wir die Erzeugenden, welche beide gemein haden. Diese schneiden den Parallelkreis ab, wodurch wir Punkte der Durchschnittscurve, und diese selbst durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens erhalten.

§. 328.

Aufgabe 52. Es ist eine windschiefe Fläche und eine Rotationsfläche gegeben, welche Flächen sich durchdringen, man soll ihre Durchschnittscurve bestimmen.

Auflösung. Wir nehmen hier eine Ebene zu Hülfe, welche die Rotationsfläche nach einem Parallelkreise schneidet; und da wir die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel stellen können, so wird die horizontale Projektion des Schnittes immer ein Kreis sein, und die Hülfsebene senkrecht auf der vertikalen Tafel stehen. Nun muss man den Durchgang der Erzeugenden von der windschiefen Fläche in dieser Ebene suchen, um die Durchschnittscurve der windschiefen Fläche mit der Ebene zu erhalten. Da wo die vertikale Projektion einer Erzeugenden die vertikale Spur der Hülfsebene schneidet, ist immer die Projektion eines Punktes, welcher der Ebene und der windschiefen Fläche angehört, dessen horizontale Projektion bestimmt werden kann. Beide Curven schneiden sich, wodurch wir zwei Punkte des gesuchten Durchschnittes und diese selbst durch Wiederholung der Construktion, erhalten.

§. 329.

Aufgabe 53. Es durchdringen sich zwei Rotationsflächen, deren Axen parallel laufen; man soll ihren Durchschnitt bestimmen.

Auflösung. Wir stellen hier die horizontale Tafel senkrecht auf jede der beiden Axen, oder

umgekehrt. Nun müssen wir hier entweder eine Fläche oder Ebene zu Hülfe nehmen. Am einfachsten wird jede Rotationsfläche nach einer Ebene geschnitten, deren Schnitt ein Parallelkreis ist. Wollen wir also hier eine Ebene mit der horizontalen Tafel parallel zu Hülfe nehmen, so wird sie beide Flächen nach Parallelkreisen schneiden. Die beiden Parallelkreise schneiden sich, wodurch wir Punkte der Durchschnittscurve erhalten. In Fig. 184. ist dieses Verfahren an dem Durchschnitte zweier Kugeln gezeigt. —

§. 330.

Aufgabe 54. Zwei Rotationsflächen, die sich durchdringen, und deren Axen sich schneiden, sind gegeben; man soll ihre Durchschnittscurve bestimmen.

Auflösung. Wir können die horizontale Tafel senkrecht auf die Axe der einen Fläche stellen, und die vertikale Tafel parallel zu beiden Rotationsaxen, welches leicht geschehen kann; denn wenn die eine Axe senkrecht auf der horizontalen Tafel steht; so ist sie schon parallel zur vertikalen Tafel, und wir dürfen daher nur durch die horizontale Spur dieser Axe die horizontale Projektion der andern Axe parallel mit der Axe X ziehen, und die vertikale Projektion derselben bestimmen. Von der zweiten Fläche haben wir bloss den Meridian in der vertikalen Tafel anzugeben, welcher in seiner wahren Grösse in dieser Tafel erscheinen wird. — Um nun endlich zum Resultate zu gelangen, müssen wir entweder eine Ebene oder Fläche zu Hülfe nehmen. Eine Ebene kann wohl eine Fläche nach einem Parallelkreise schneiden, aber die andere nicht, wollen wir daher eine Fläche zu Hülfe nehmen. Diese, wenn sie eine Rotationsfläche ist, wird jede der Flächen nach einem Parallelkreise schneiden, wenn sie mit denselben einerlei Rotationsaxen hat. Da nun diese Hülfsfläche die Axe der einen sowohl als auch die Axe der andern Fläche zu ihrer Rotationsaxe haben soll, so kann dieselbe nur eine Kugel sein, weil diese beliebig viele Rotationsaxen haben kann. Das Centrum der Kugel muss aber in ihrer Rotationsaxe liegen, es muss daher sowohl in der Axe der einen, als auch in der Axe der andern Fläche liegen, und mithin im Durchschnitte beider Axen. Legen wir nun durch diesen Punkt als Centrum beliebig viele Hülfskugeln, so wird jede die beiden Flächen nach Parallelkreisen schneiden, welche in vertikalen Projektionen gerade Linien sein werden, indem sie senkrecht auf den Rotationsaxen, und diese parallel zur vertikalen Tafel sind. Die vertikalen Projektionen der beiden Parallelkreise geben in ihrem Durchschnitte Punkte der Curve an, die man nur noch horizontal zu projiciren hat. Zwei Punkte der Curve erhält man auch, wenn man die Durchschnitte beider Meridiane projicirt. —

§. 331.

Aufgabe 55. Es sind zwei Rotationsflächen gegeben, deren Axen sich nicht schneiden, man soll ihre Durchdringungscurve bestimmen.

Auflösung. Wir können die horizontale Tafel senkrecht auf eine der Rotationsaxen stellen, und die vertikale Tafel parallel zur andern Rotationsaxe, so ist sie zugleich zur ersten Axe parallel. Wir müssen also die horizontale Projektion der zweiten Axe parallel zur Projektionsaxe legen, so dass sie nicht durch die horizontale Projektion der ersten geht. Hier wird nun keine Ebene und keine Fläche beide Flächen zugleich aufs einfachse schneiden. Wir wollen daher eine Ebene zu Hülfe nehmen, welche die erste Fläche, deren Axe auf der horizontalen Tafel senkrecht steht, aufs einfachse, nämlich nach einem Parallelkreise schneidet, und von der andern Fläche (die blos durch den Meridian und die Axe angegeben ist) mehrere Parallelkreise projiciren. Von diesen Parallelkreisen suchen wir nun den Durchgang in die Hülfsebene. Um diesen zu erhalten, bestimmen wir zuerst die Communsektion zwischen der Ebene des Parallelkreises und der Hülfsebene (welche in der vertikalen Projektion ein Punkt, und in der horizontalen Projektion ein Perpendikel auf die Axe ist). Um den Durchschnitt der Communsektion und des Parallelkreises zu erhalten, drehen wir die Ebene desselben, bis sie parallel zur horizontalen Tafel ist, damit die horizontale Projektion ein Kreis wird, von welchem wir nur das Centrum bestimmen dürfen. Wo nun dieser Kreis die horizontale Projektion der Communsektion schneidet, sind Projektionen der Punkte des Durchganges eines Parallelkreises in die Hülfsebene. Bestimmt man auf diese Weise den Durchgang von mehreren Parallelkreisen in die Hülfsebene, so erhält man durch Verbindung aller Durchgangspunkte eine Curve, die sowohl in der zweiten Fläche als auch in der Hülfsebene liegt. Der Parallelkreis, nach welchem die Hülfsebene die erste Fläche schneidet, liegt nun auch in der Hülfsebene, daher schneidet die Curve den Parallelkreis, und man erhält hierdurch zwei Punkte der Durchschnittscurve. Durch Wiederholung der ganzen Operation, indem man eine zweite, dritte etc. etc. Hülfsebene annimmt, ist man im Stande die ganze Curve zu verzeichnen.

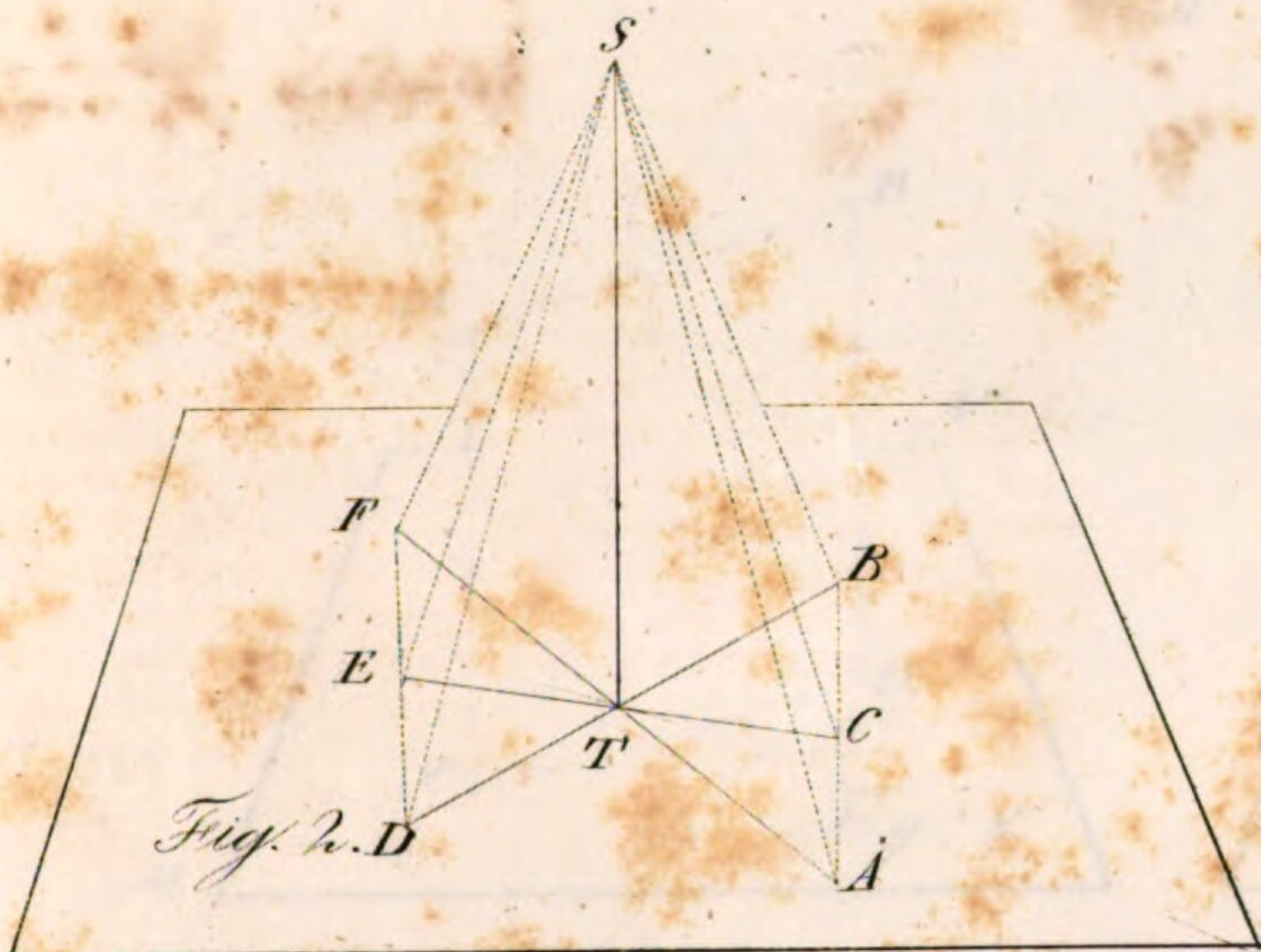
§. 332.

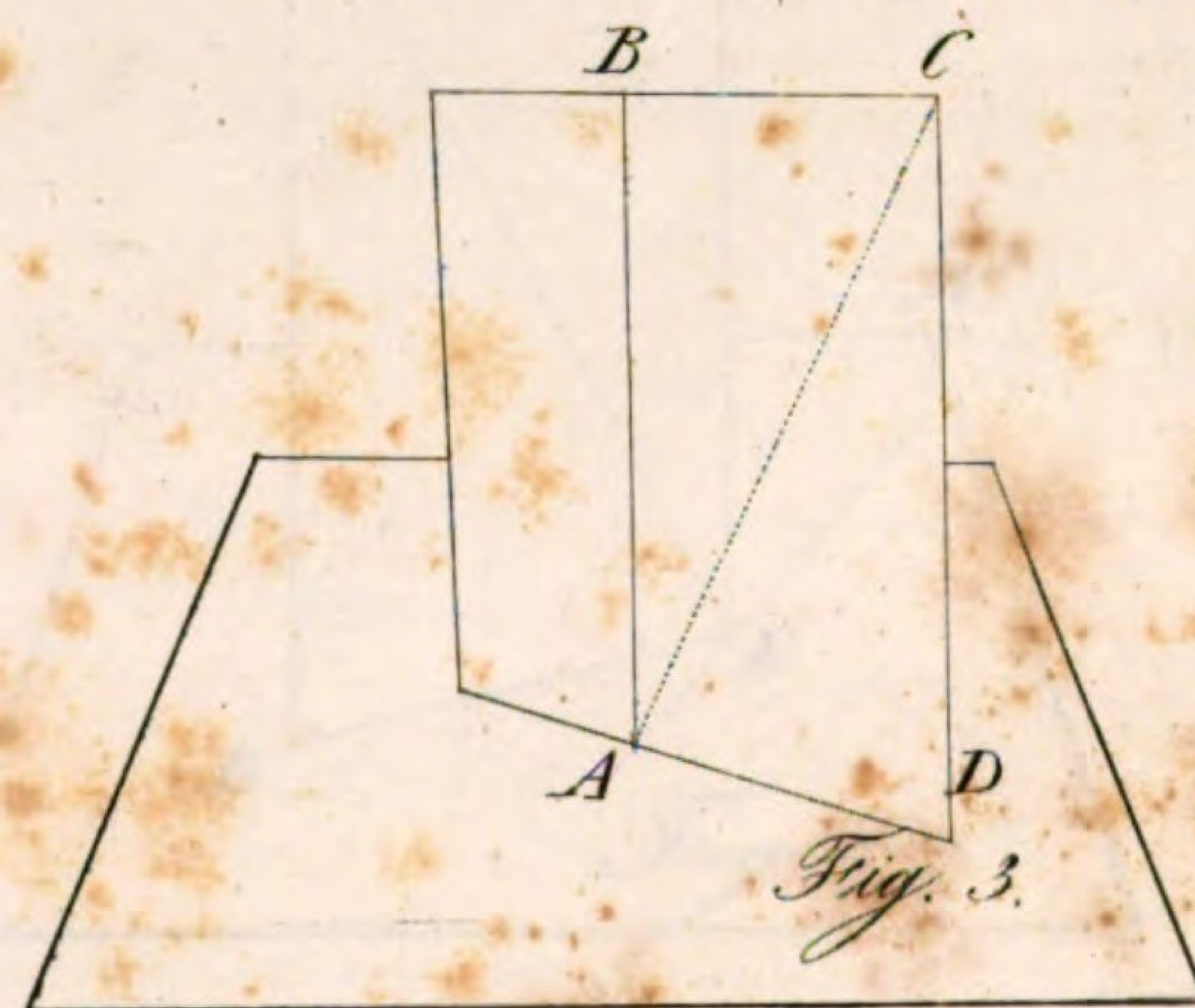
Aufgabe 56. Eine windschiefe Fläche und ein Cylinder durchdringen sich; man soll die Durchschnittscurve bestimmen.

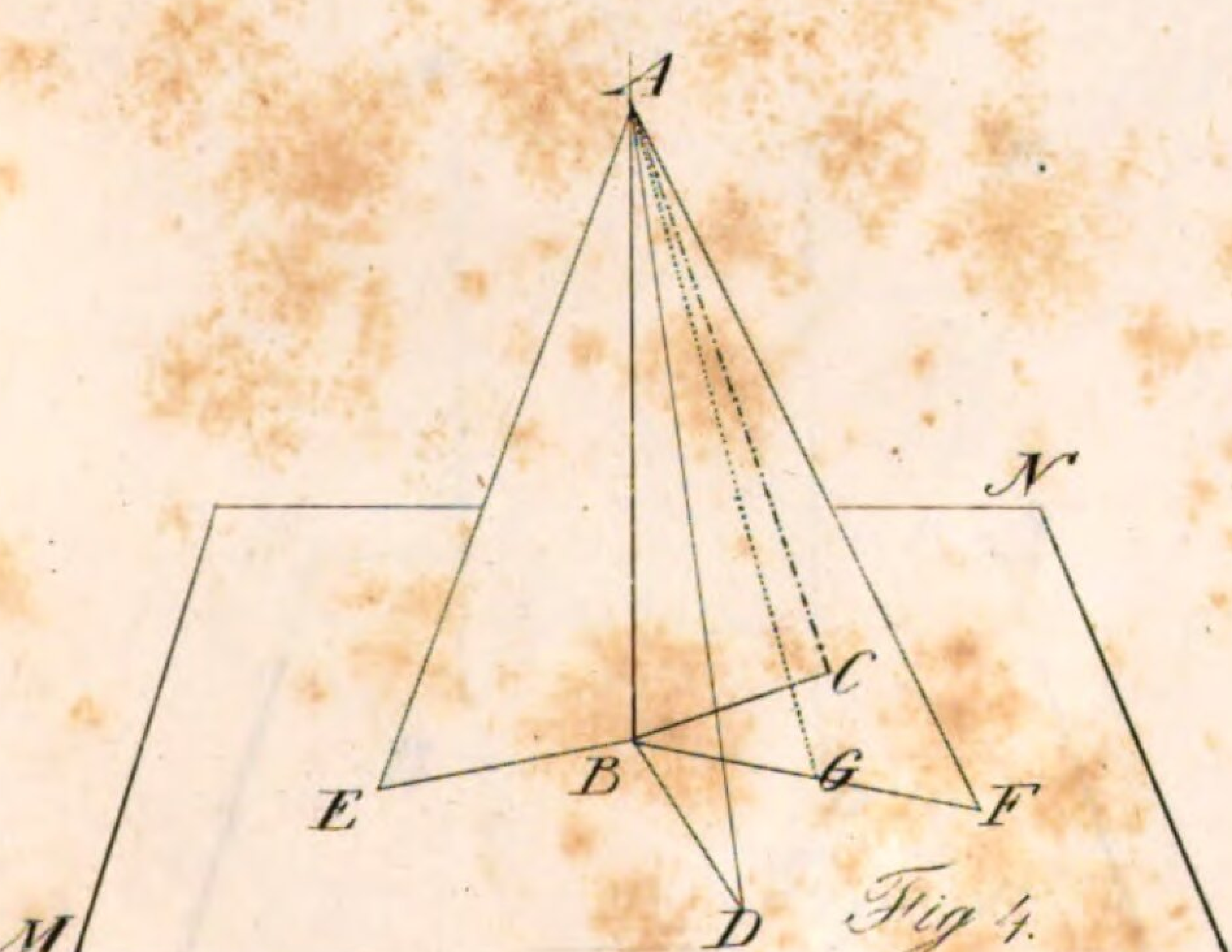
Auflösung. Wir nehmen hier eine Ebene zu Hülfe, die beide Flächen aufs einfachste schneidet. In Bezug auf die Lage der Hülfsebene, so muss diese mit dem Cylinder parallel sein, und daher eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders enthalten; sie muss auch ferner eine gerade Erzeugende der Windschiefen enthalten. Projiciren wir daher von der Windschiefen eine gerade Erzeugende, und legen durch einen Punkt derselben eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, durch beide Gerade eine Ebene, so wird sie die gewünschten Bedingungen erfüllen. Sie schneidet nämlich den Cylinder nach einer oder zwei geraden Erzeugenden, und ebenso auch die Windschiefe (nach Annahme) nach einer Erzeugenden. Die Erzeugenden des Cylinders und die Erzeugende der Windschiefen durchschneiden sich, wodurch wir Punkte der Curve erhalten. Um letztere selbst zu bestimmen, dürfen wir nur diese Operation genugsam wiederholen.

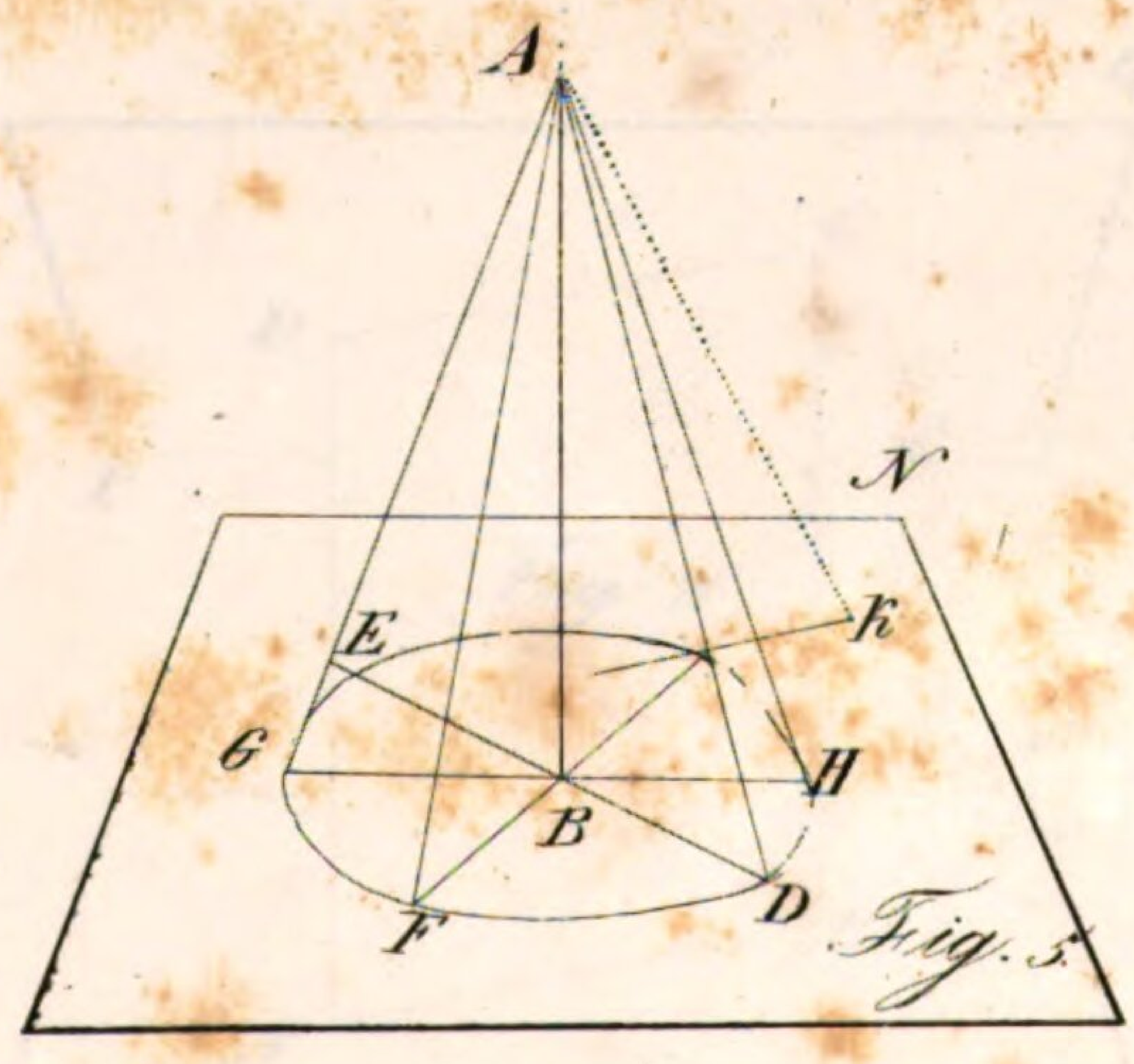
Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN











Litho: von Gottf. Schroeyerle ju.

gez. von Kuhn.

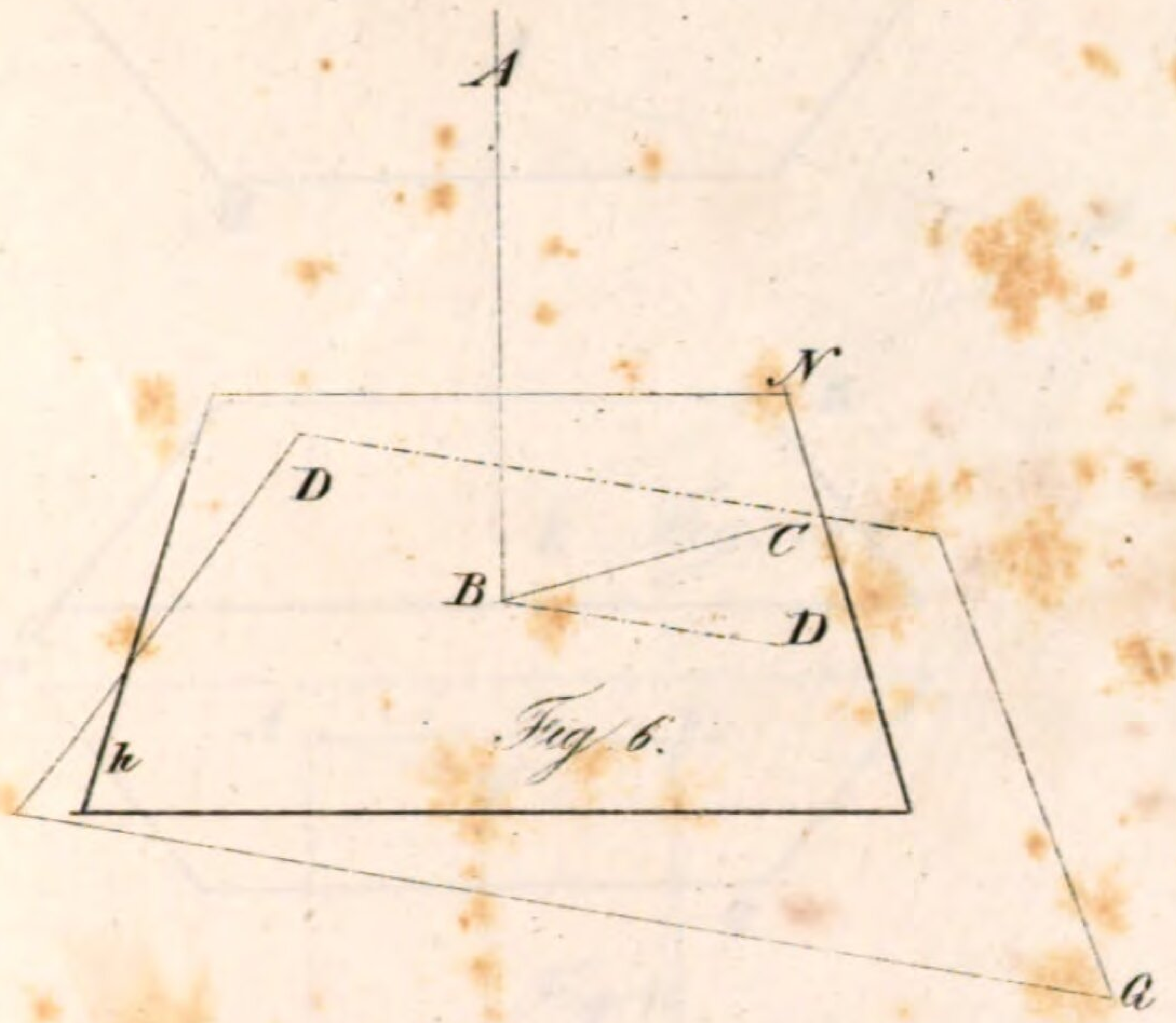


Fig. 6.

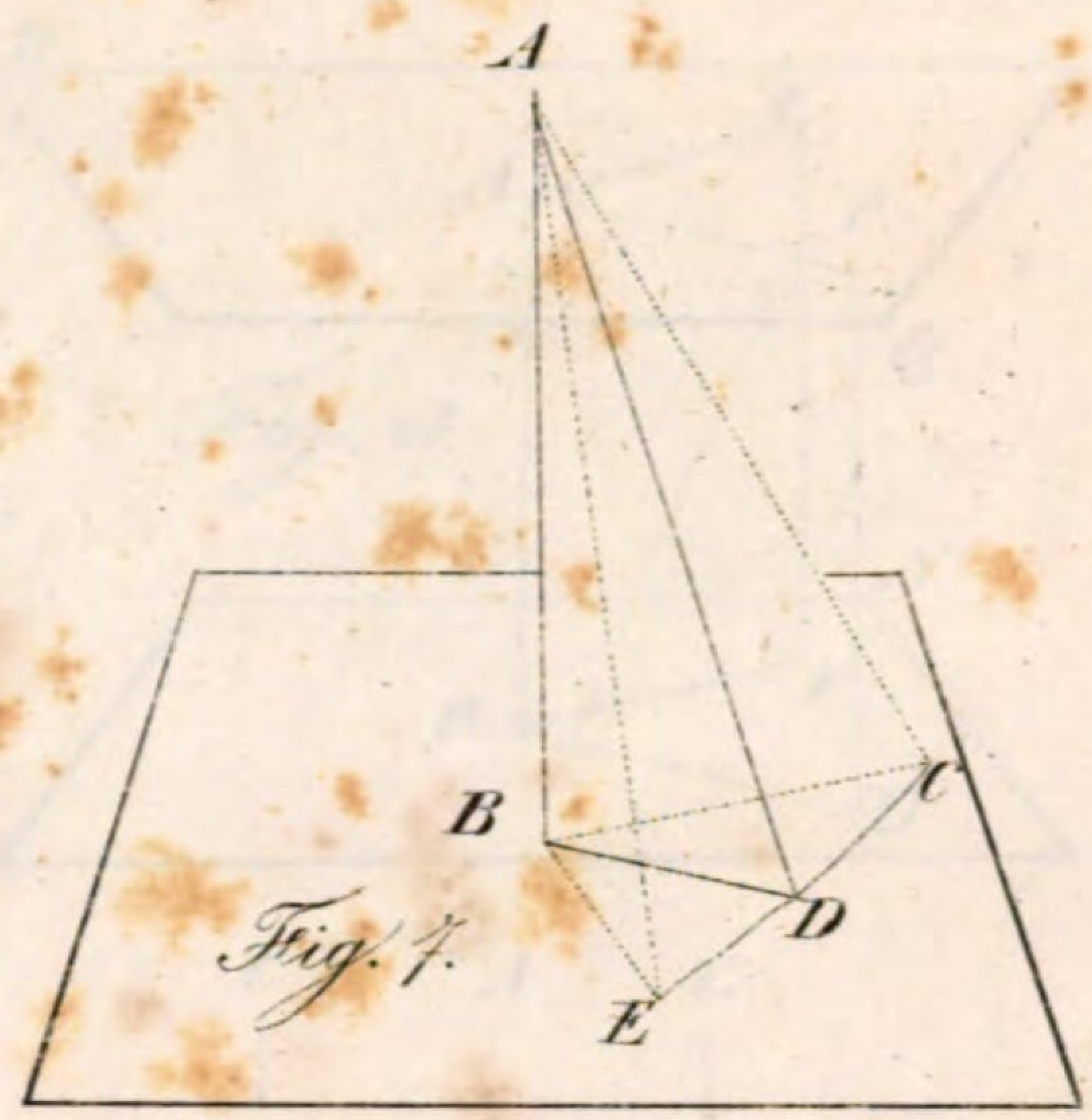


Fig. 7.

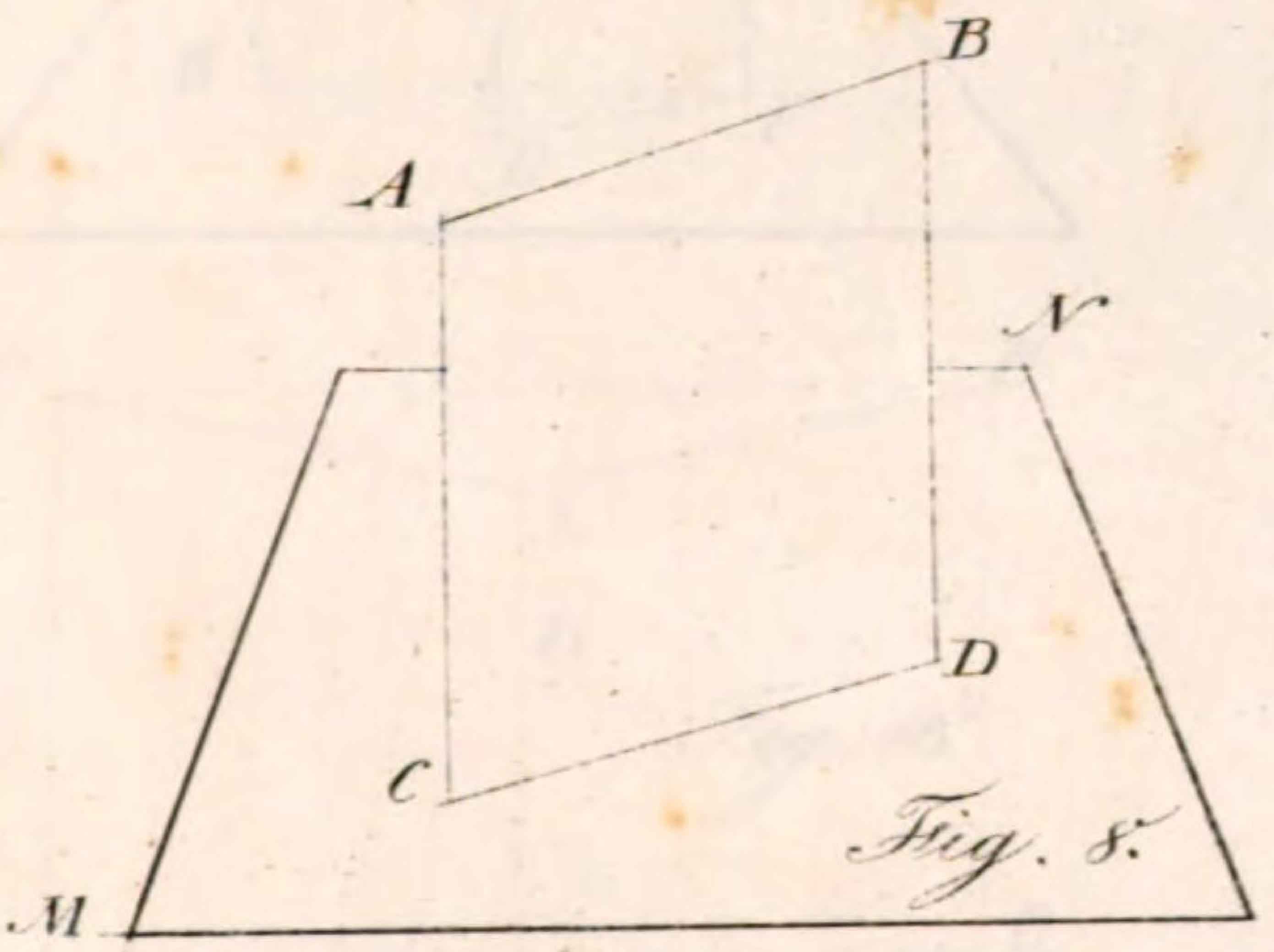


Fig. 8.

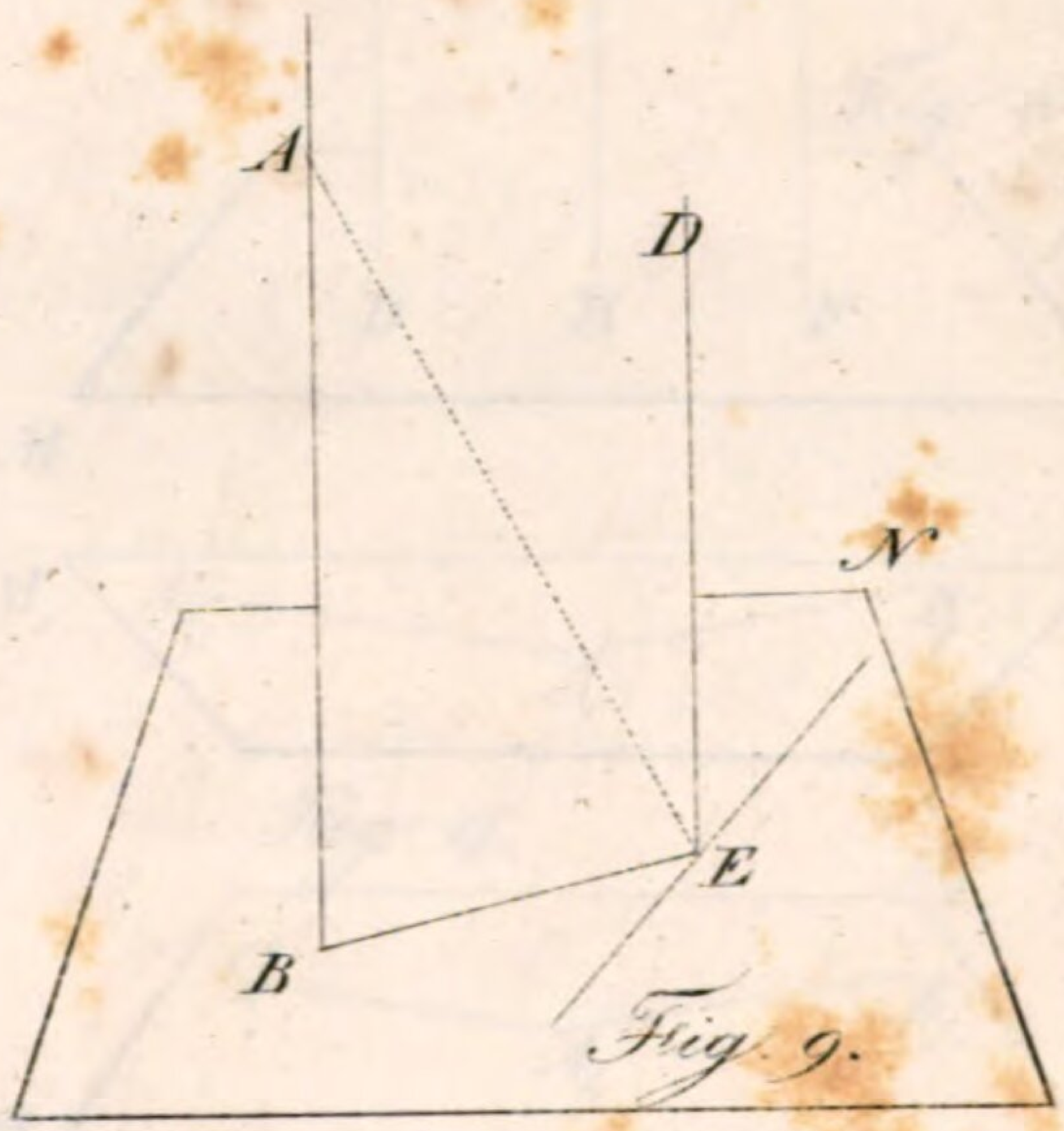


Fig. 9.

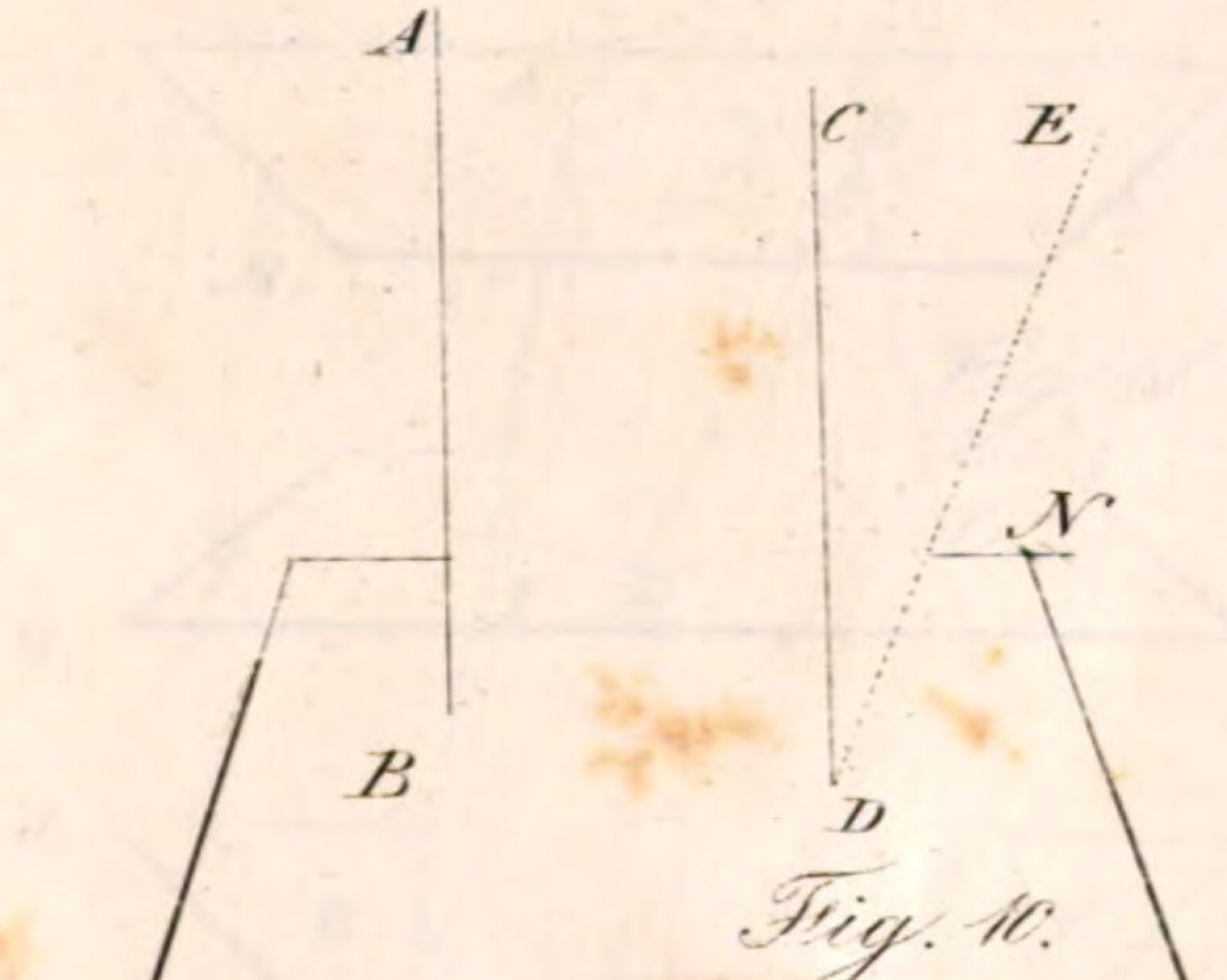


Fig. 10.

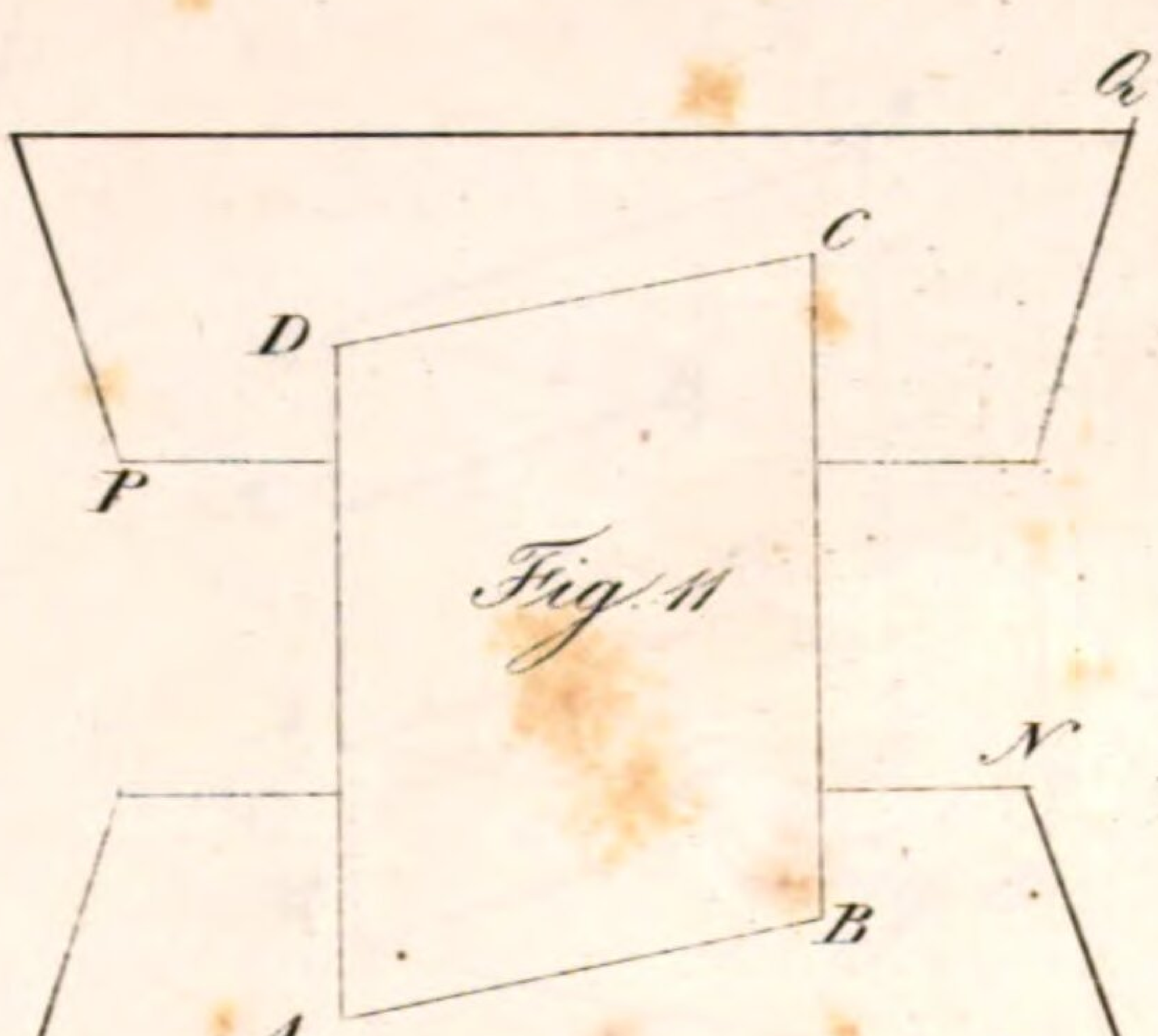
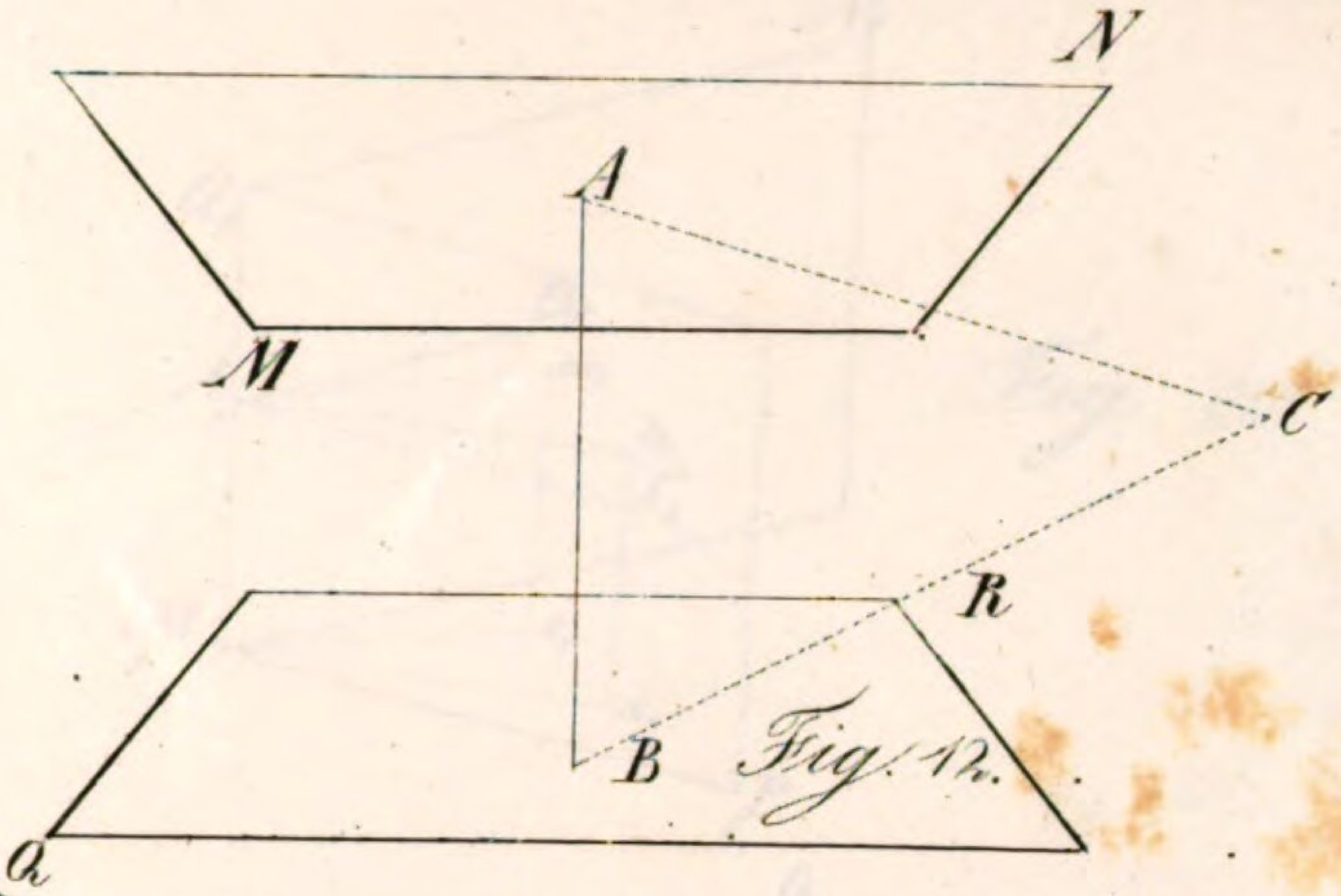
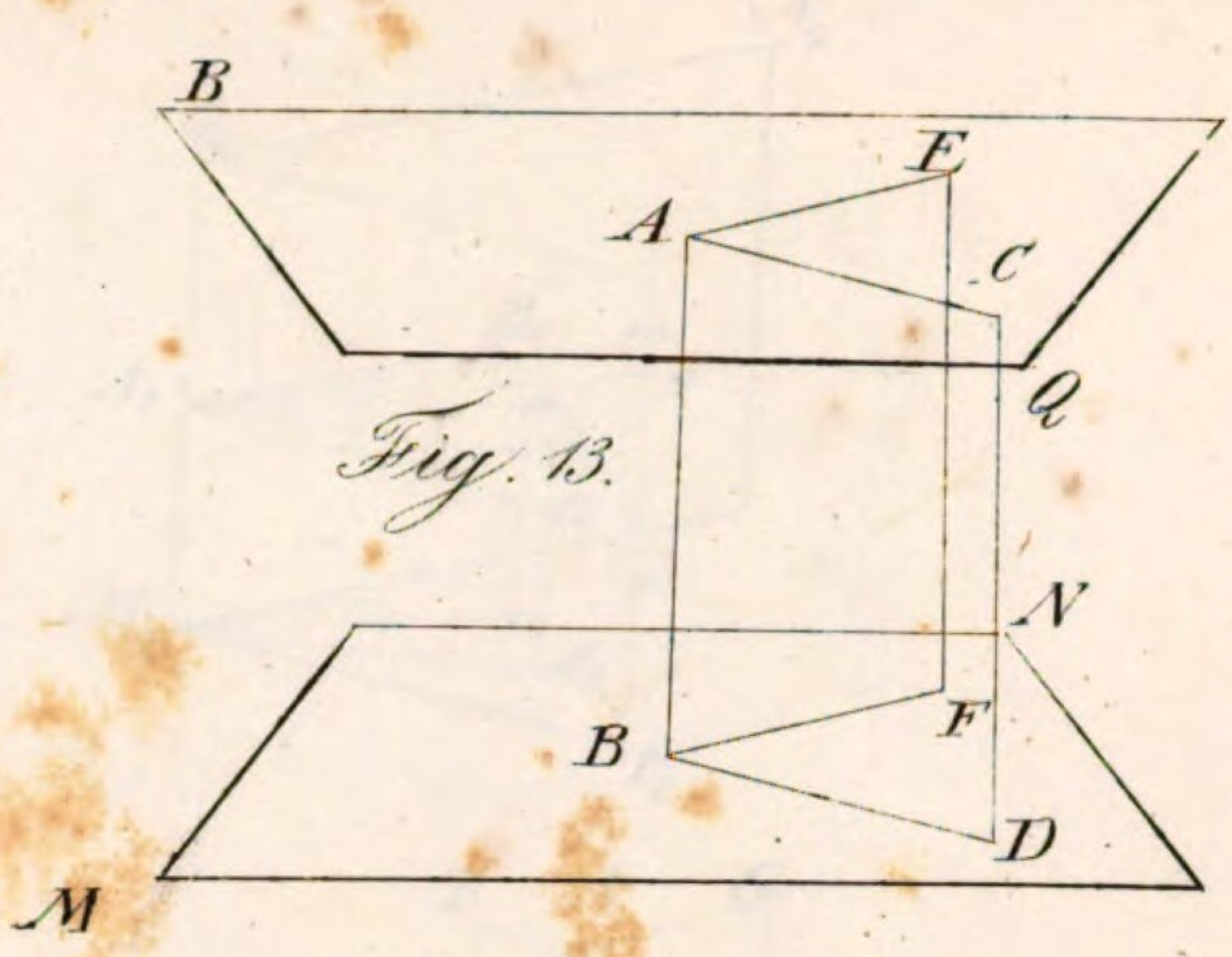
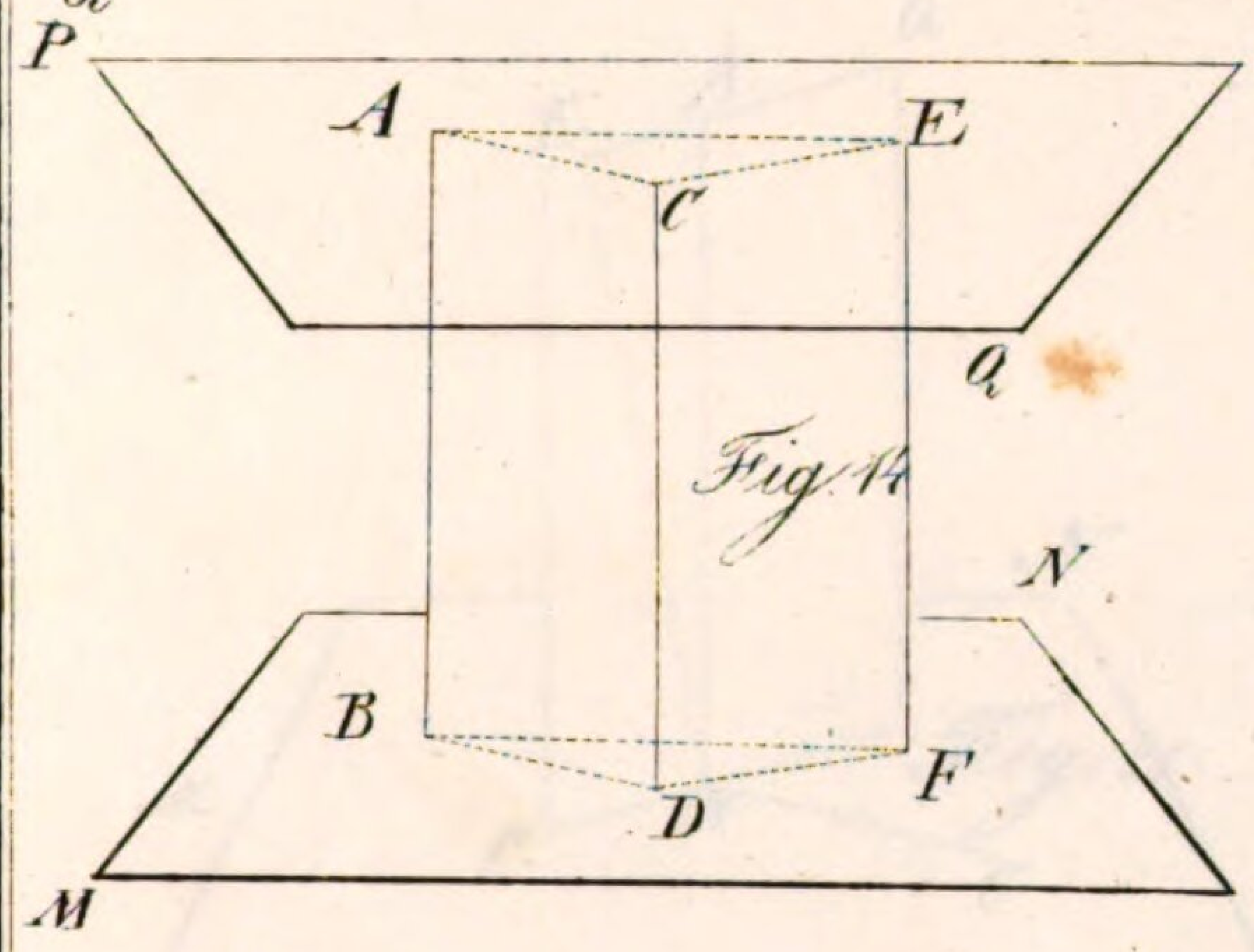


Fig. 11

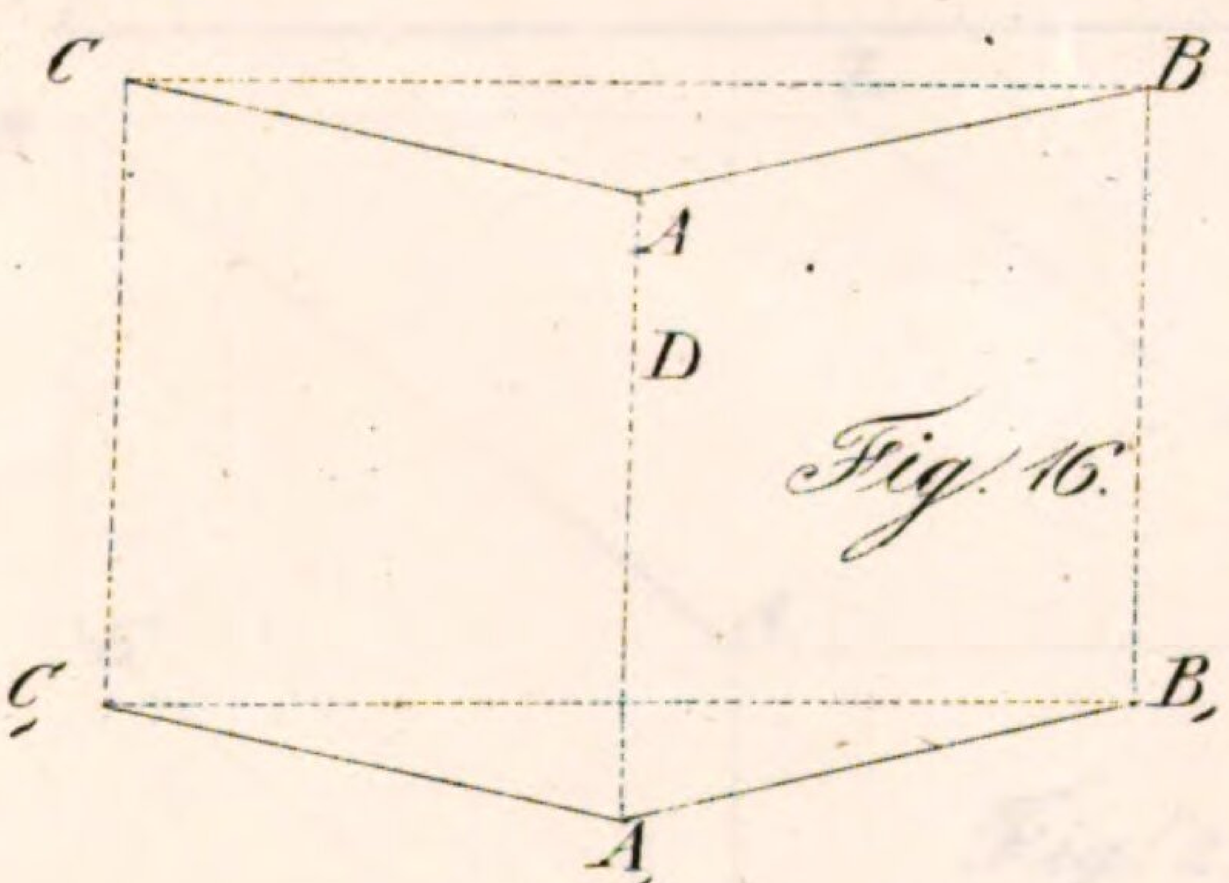
Lith. von Gottf. Schwegerle jun. gez. von Kuhn.

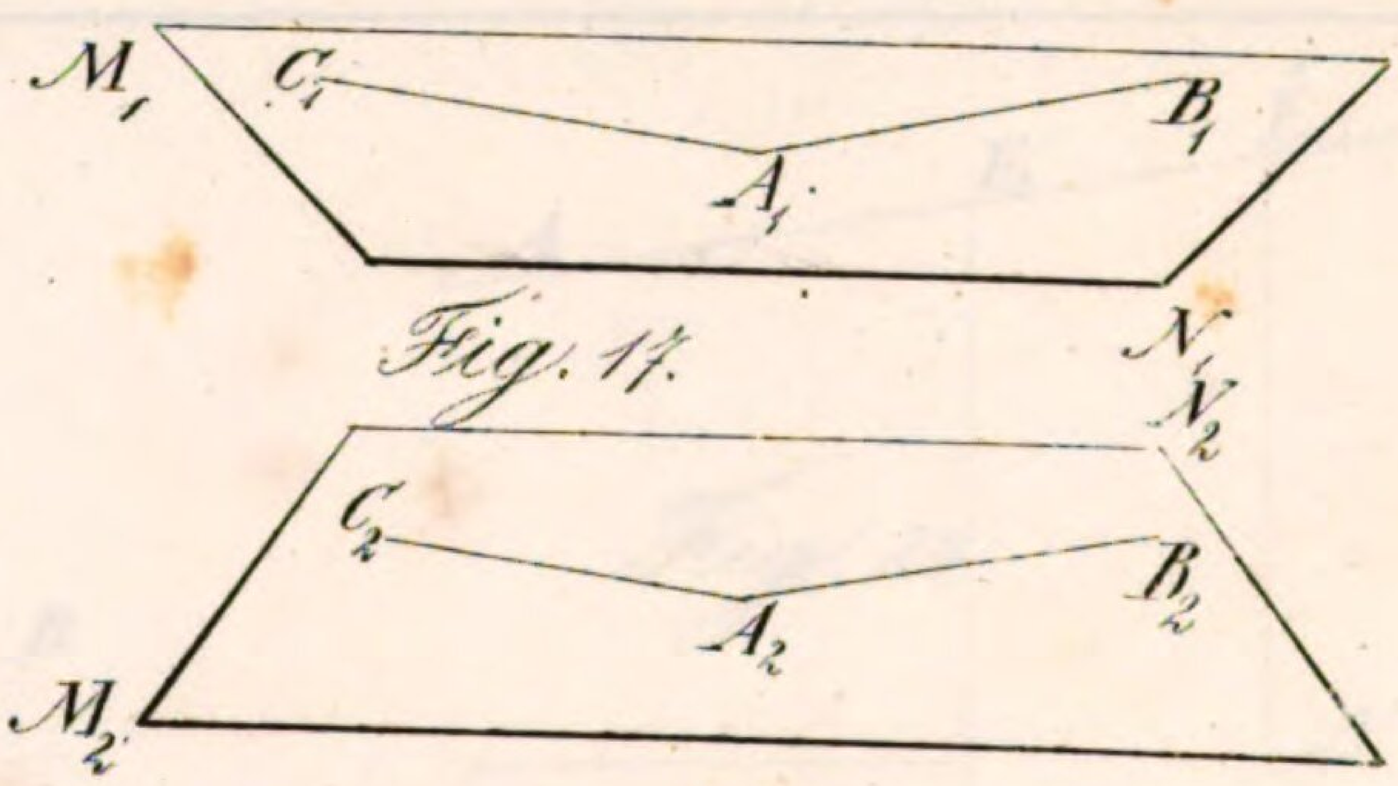


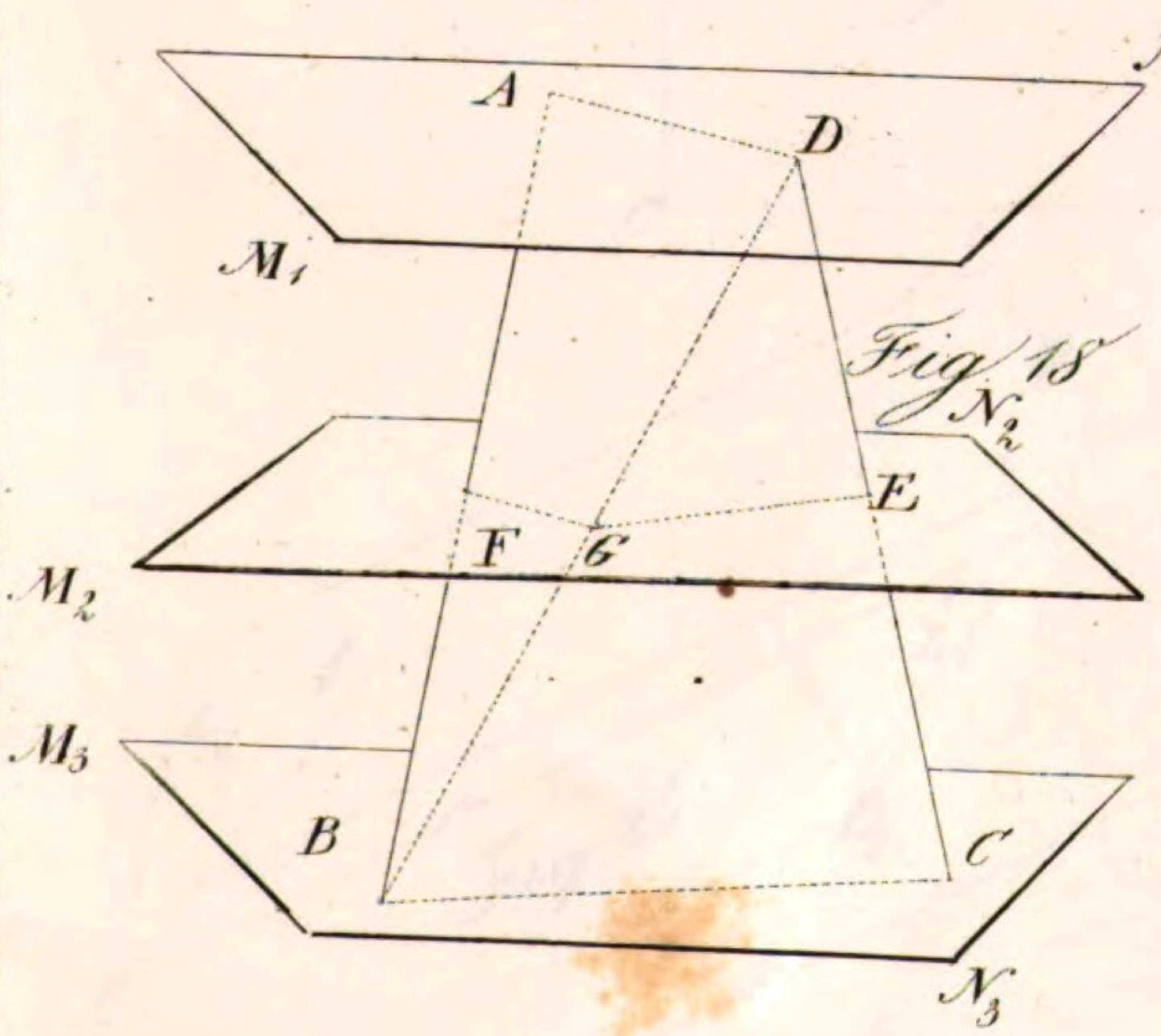


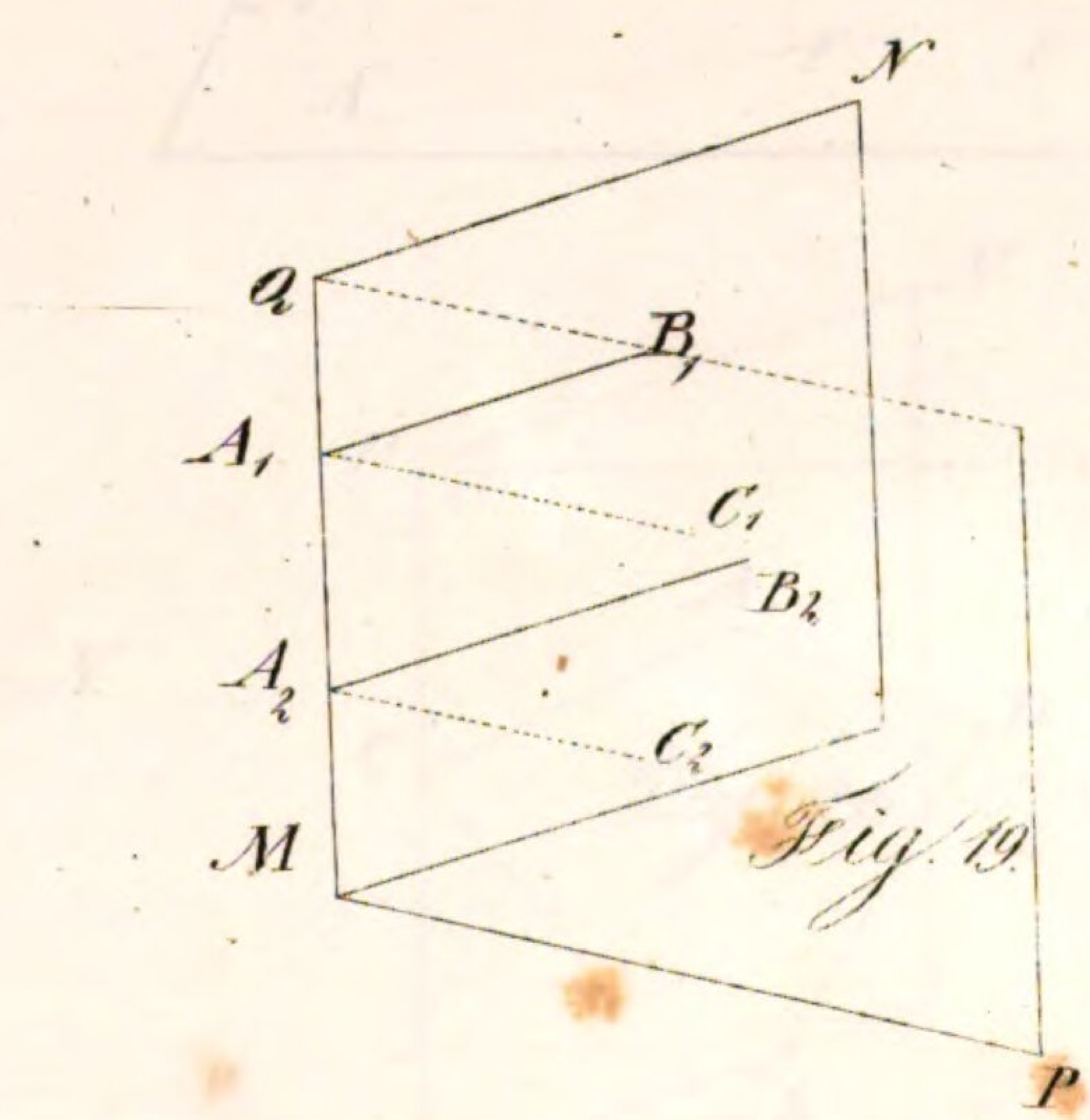












Lith. von: Gottf. Schwegerle jun.
gez. von ...

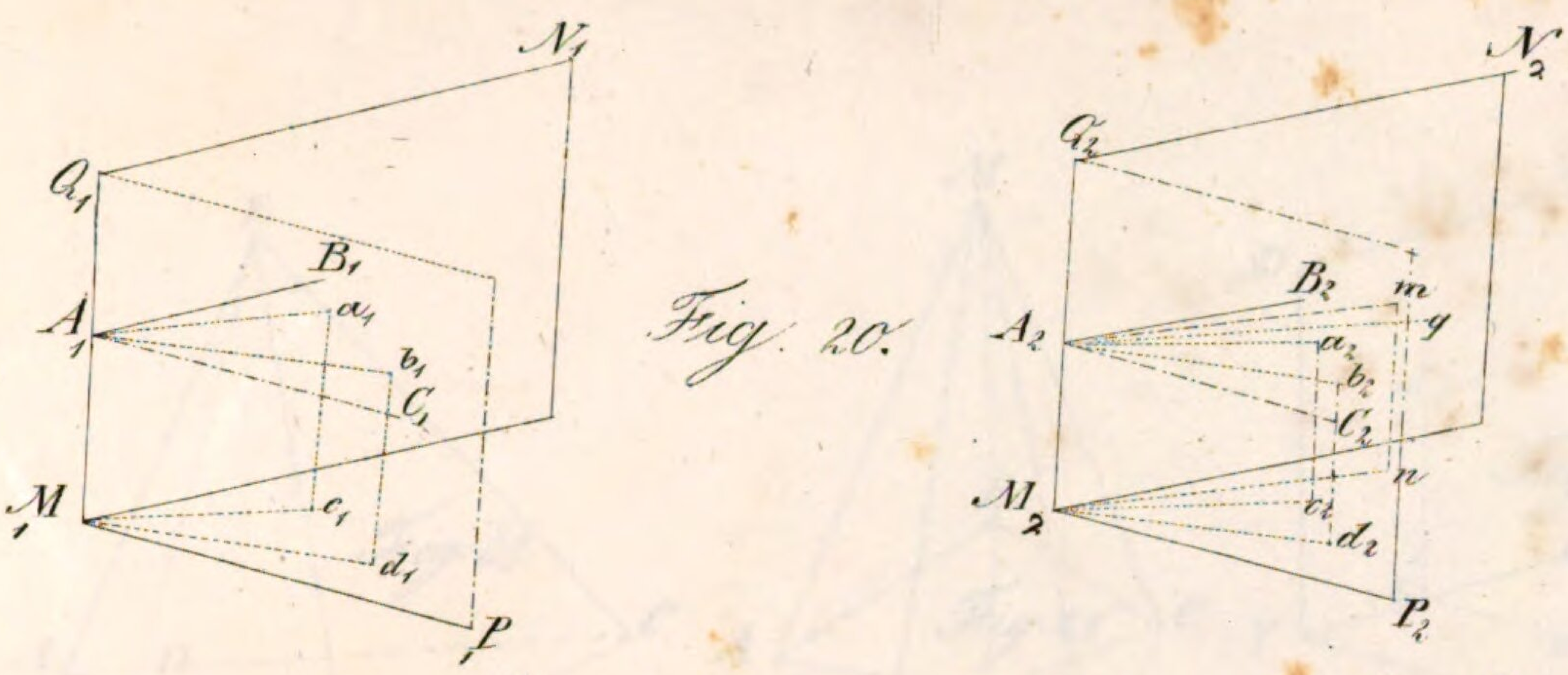


Fig. 20.

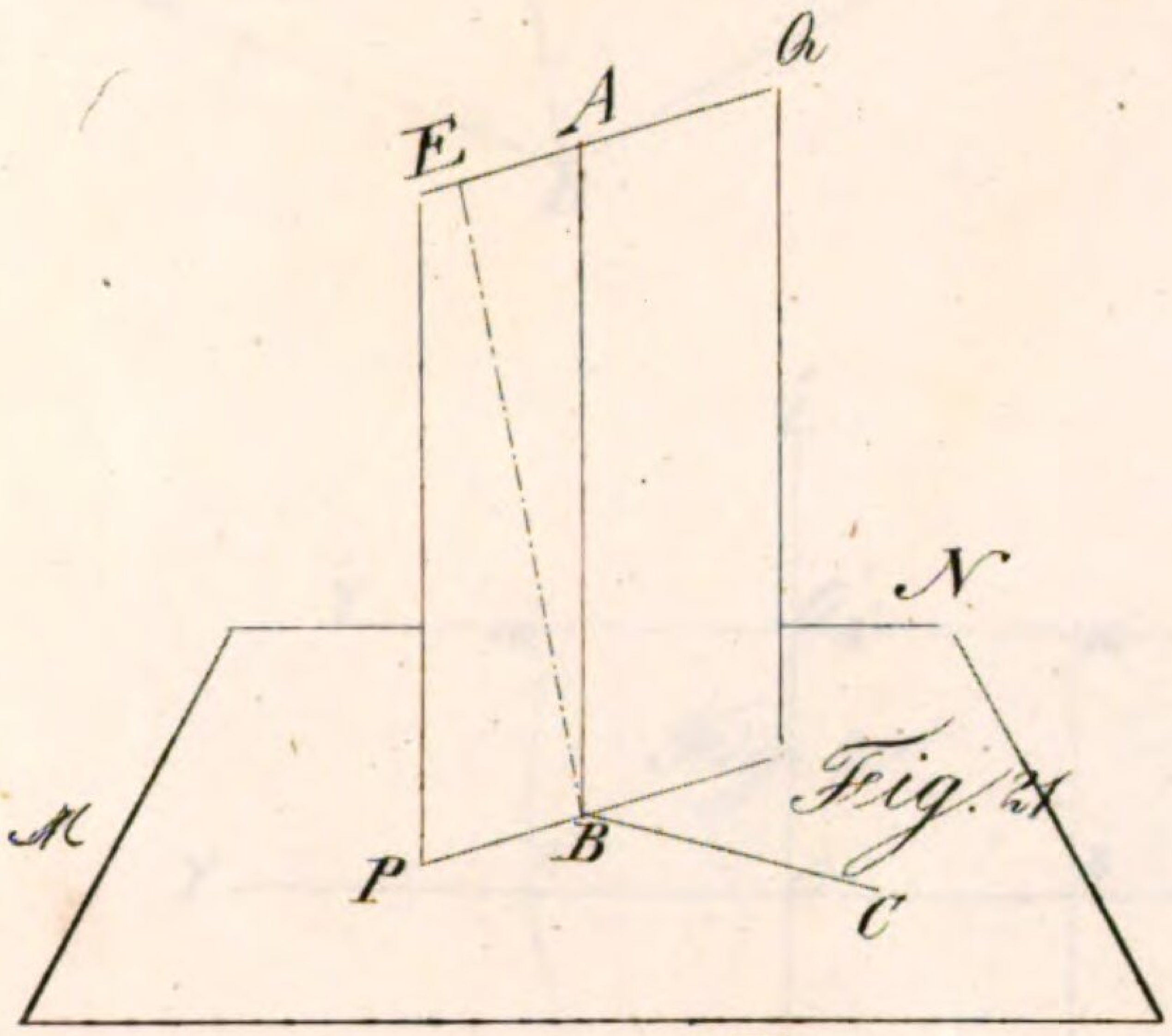


Fig. 21.

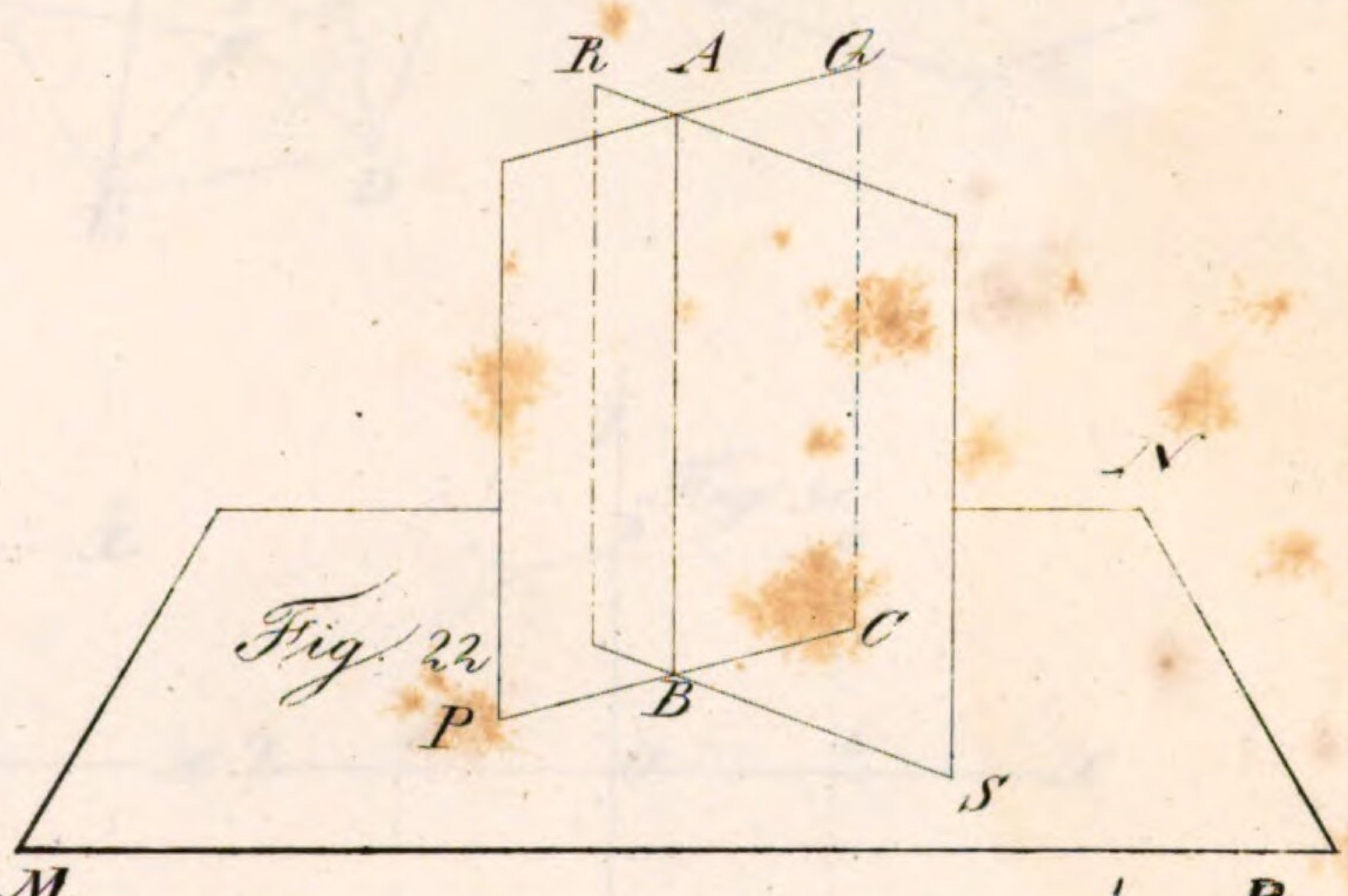


Fig. 22.

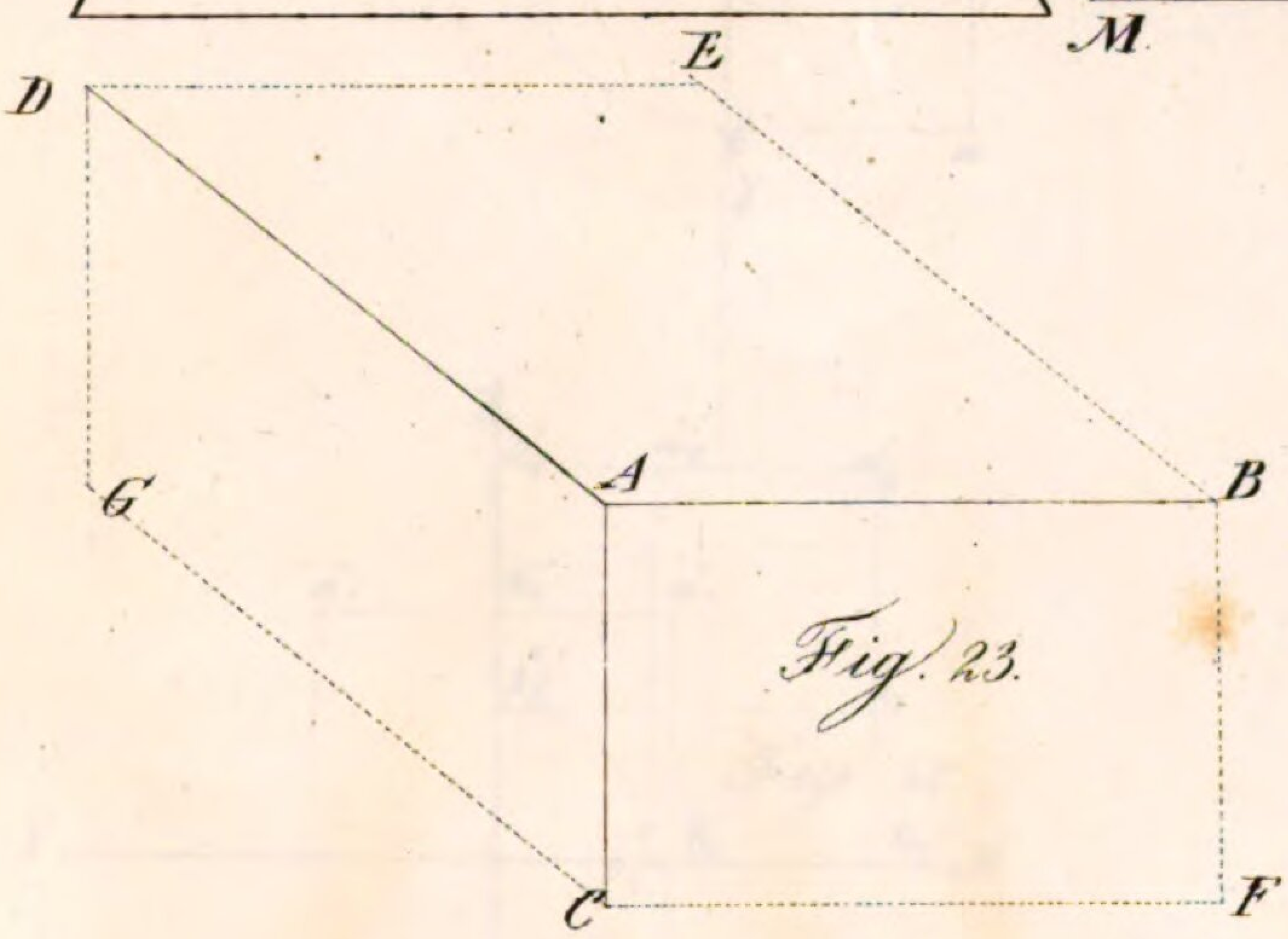


Fig. 23.

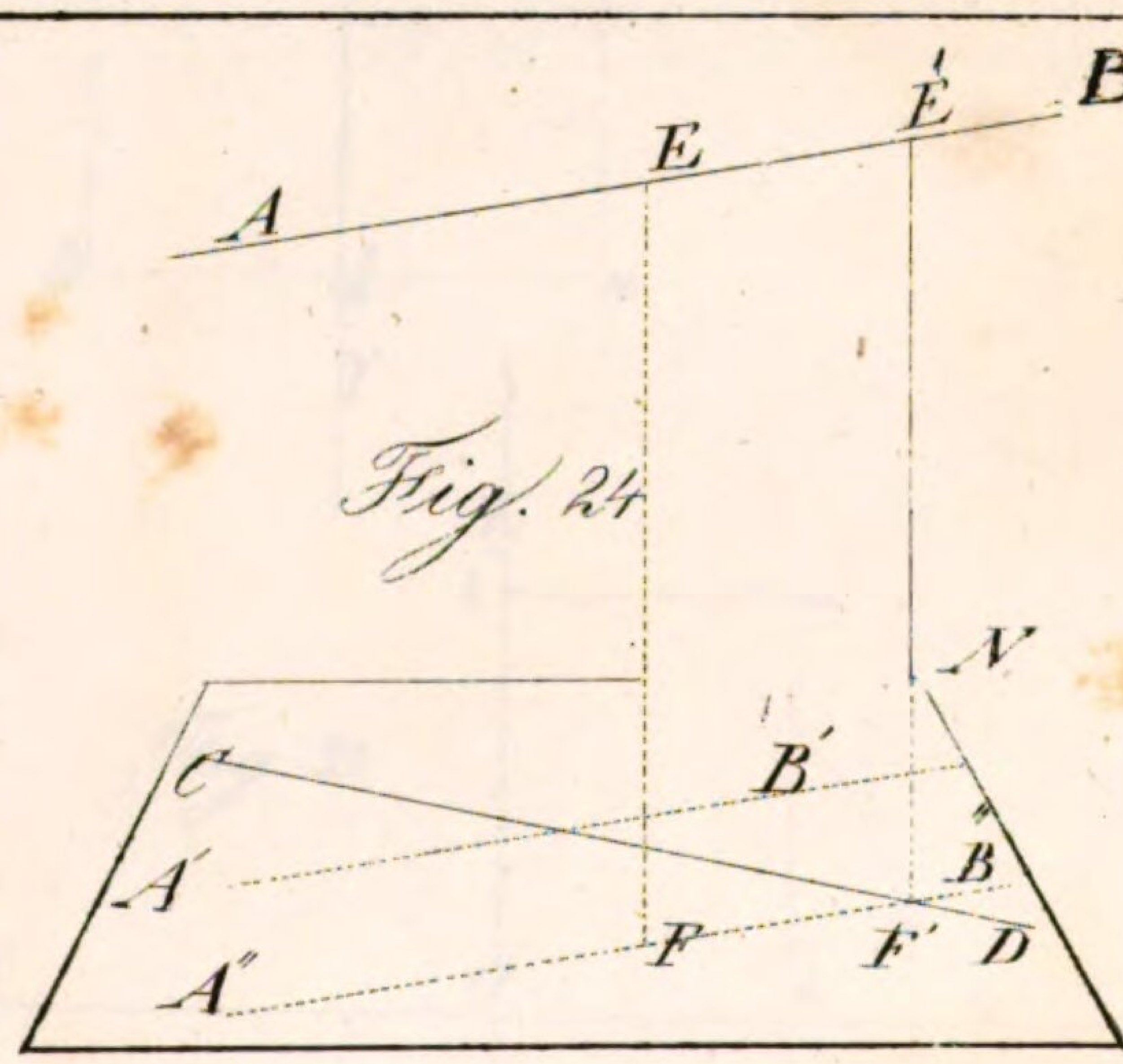


Fig. 24.

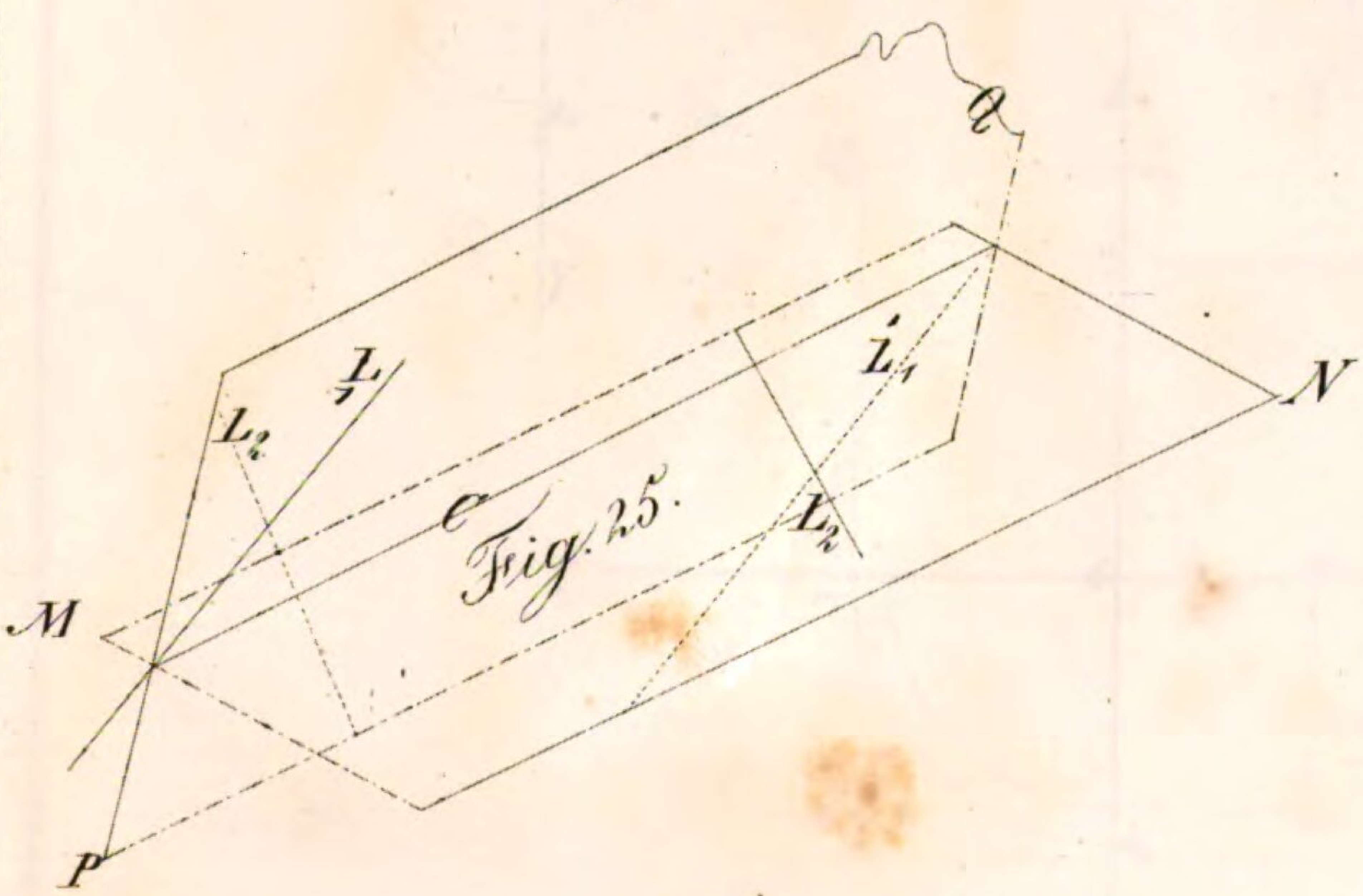


Fig. 25.

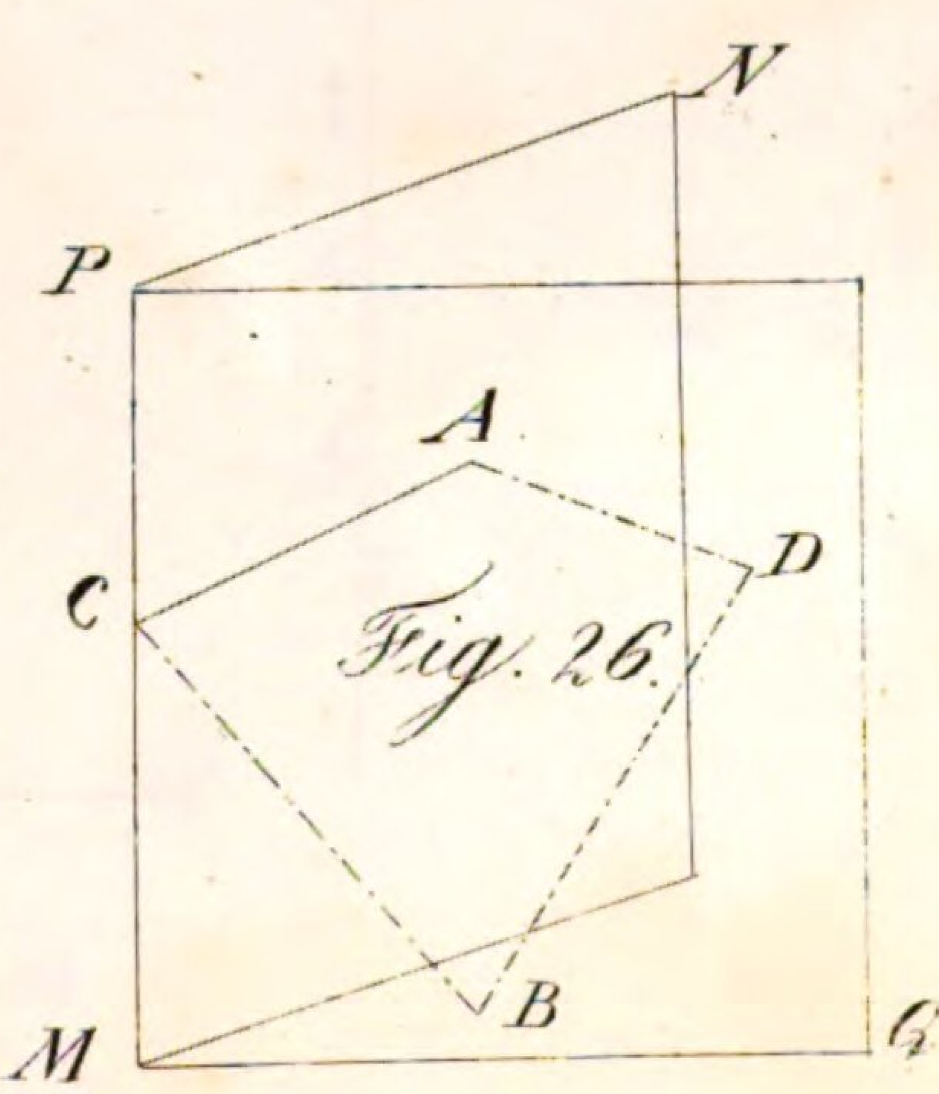
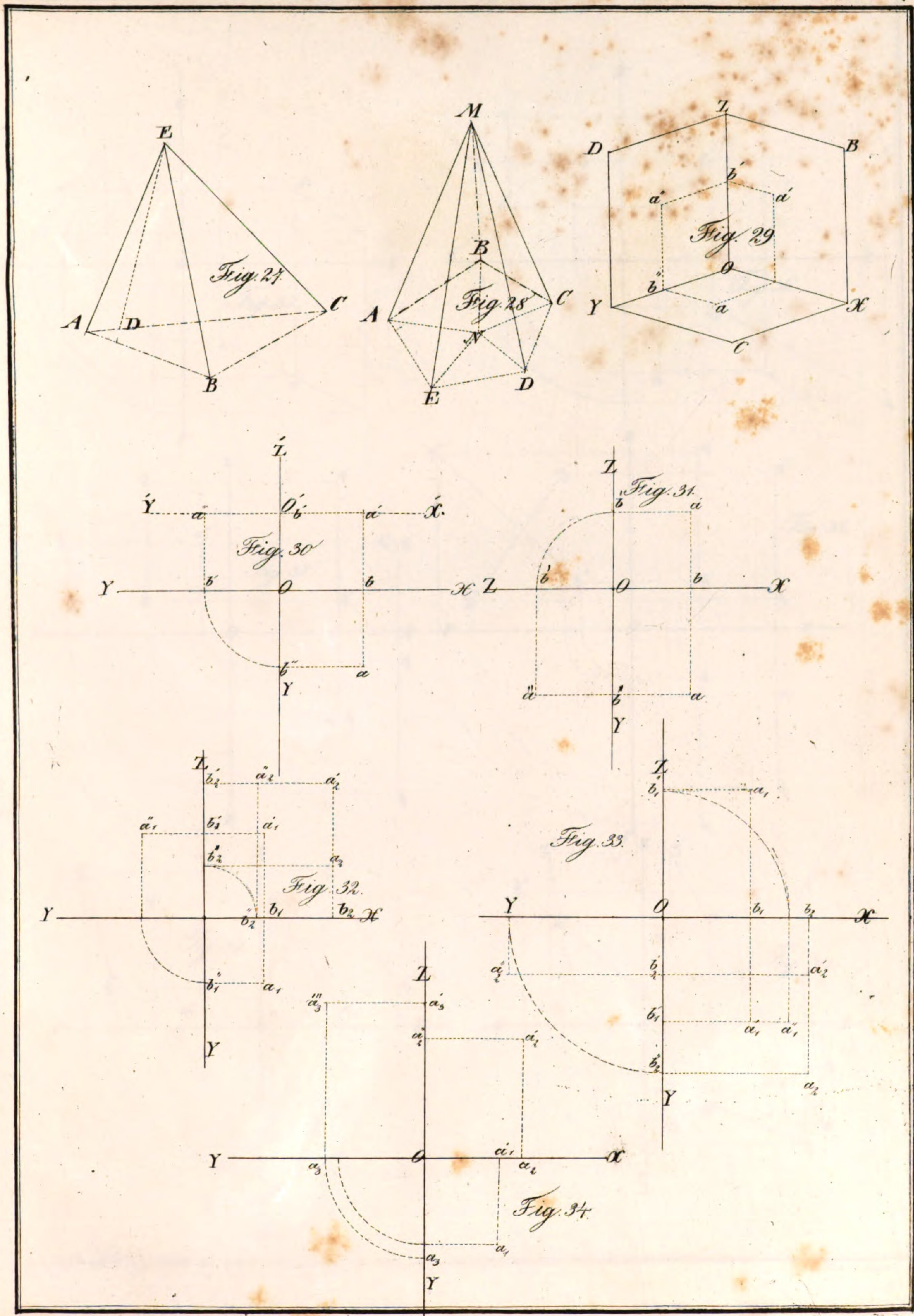


Fig. 26.



Lith. von Gottf. Schweyerle jun.
Lith. von Kuhn

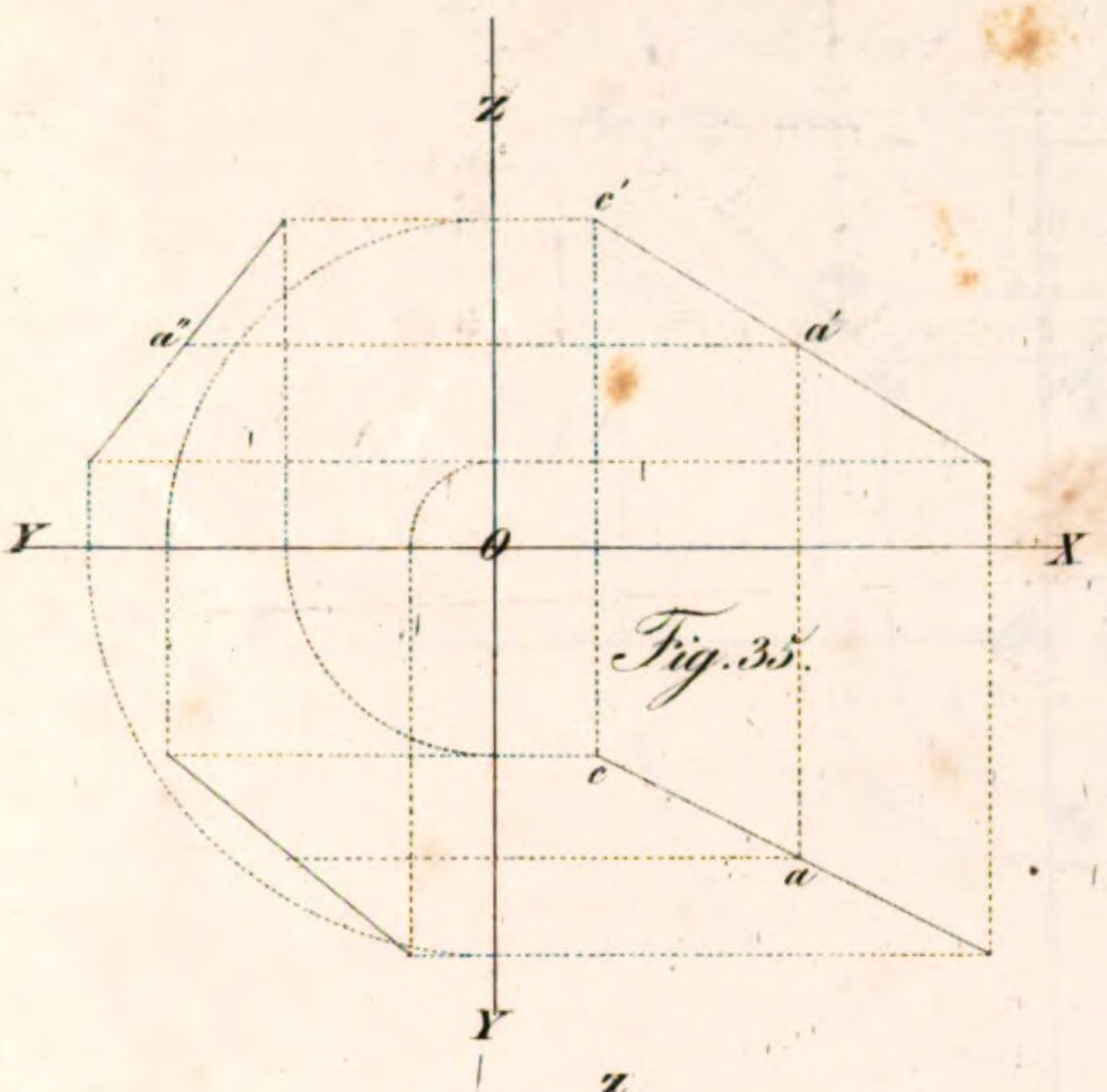


Fig. 35.

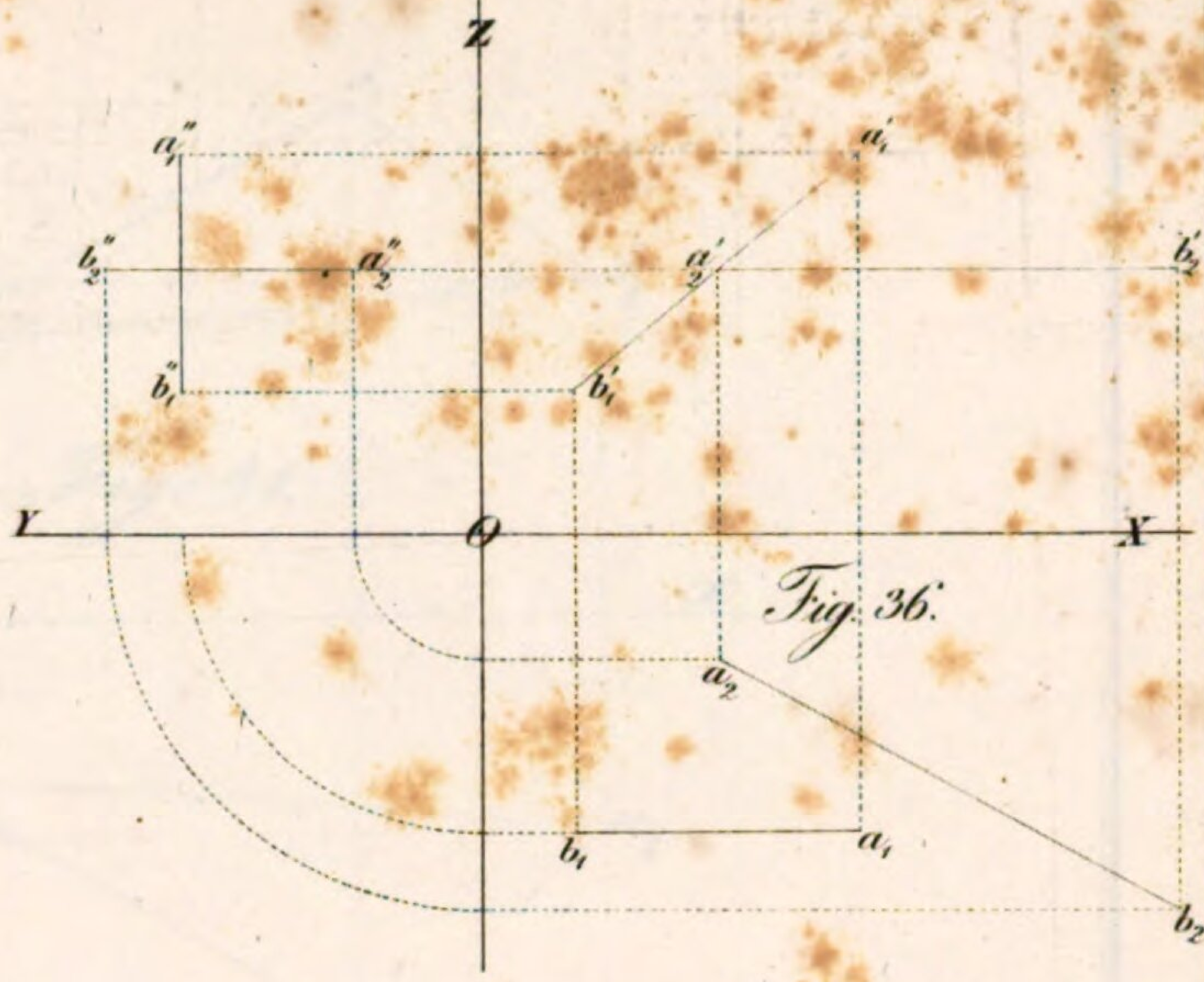


Fig. 36.

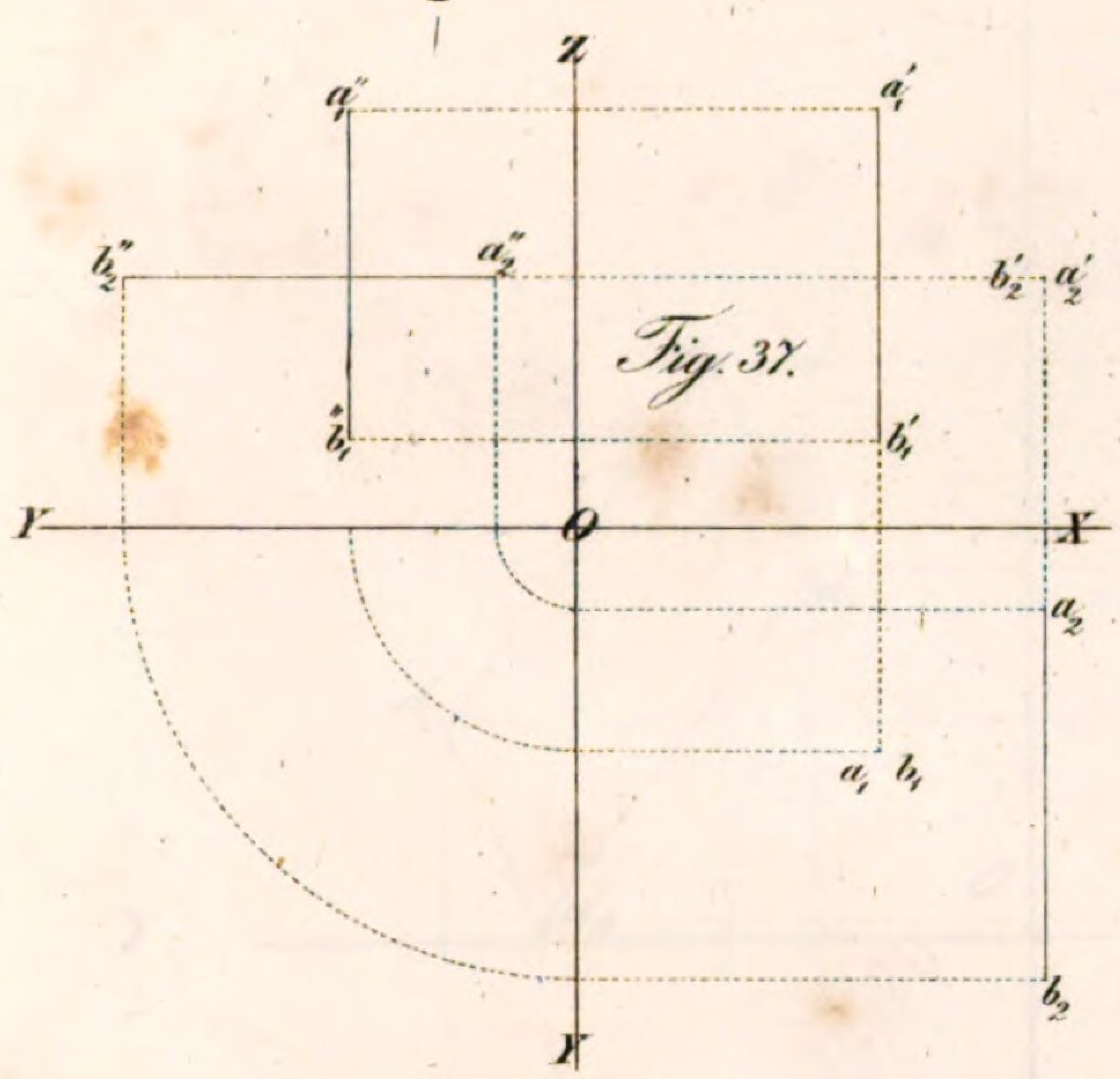


Fig. 37.

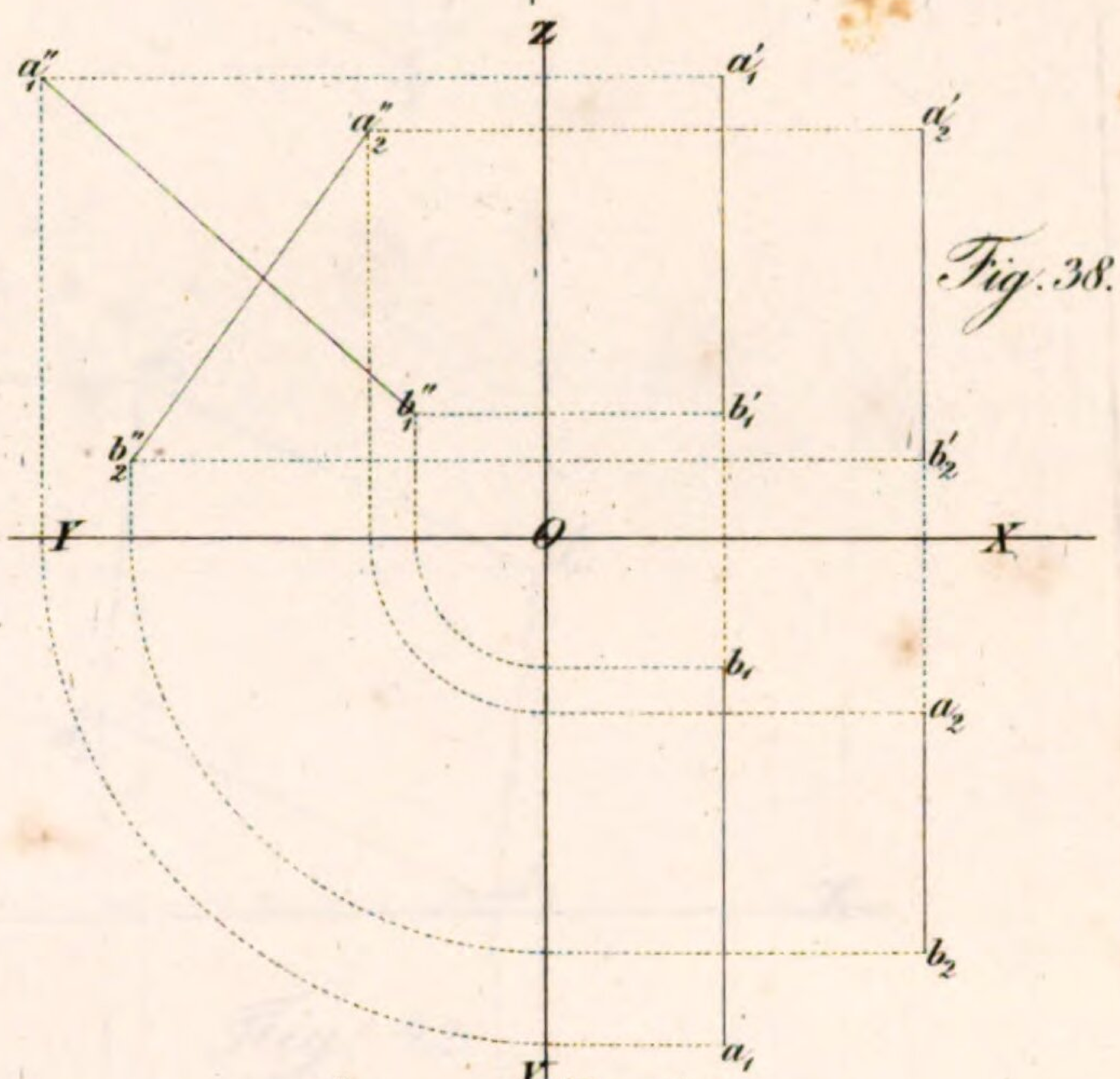


Fig. 38.

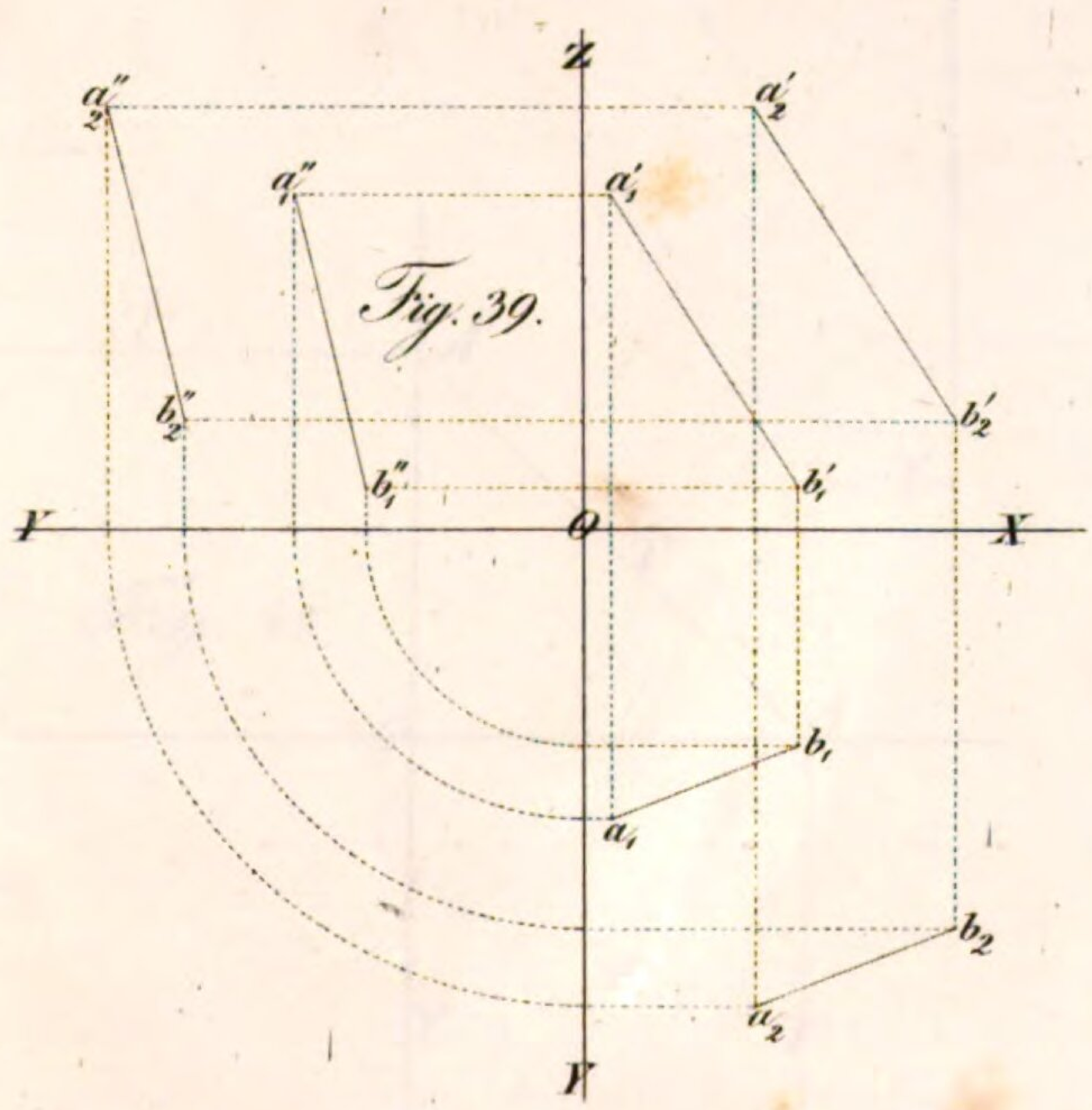


Fig. 39.

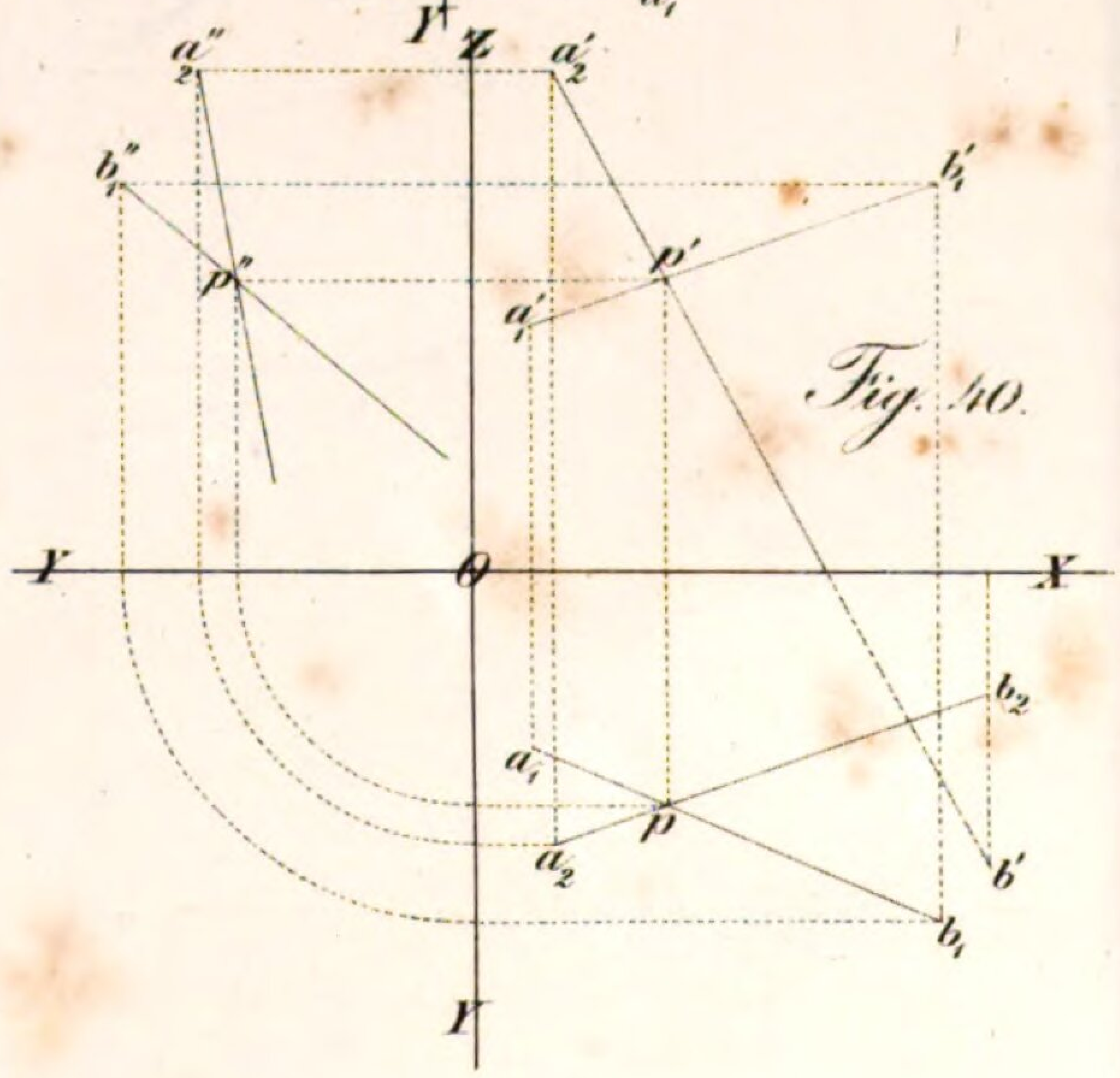


Fig. 40.

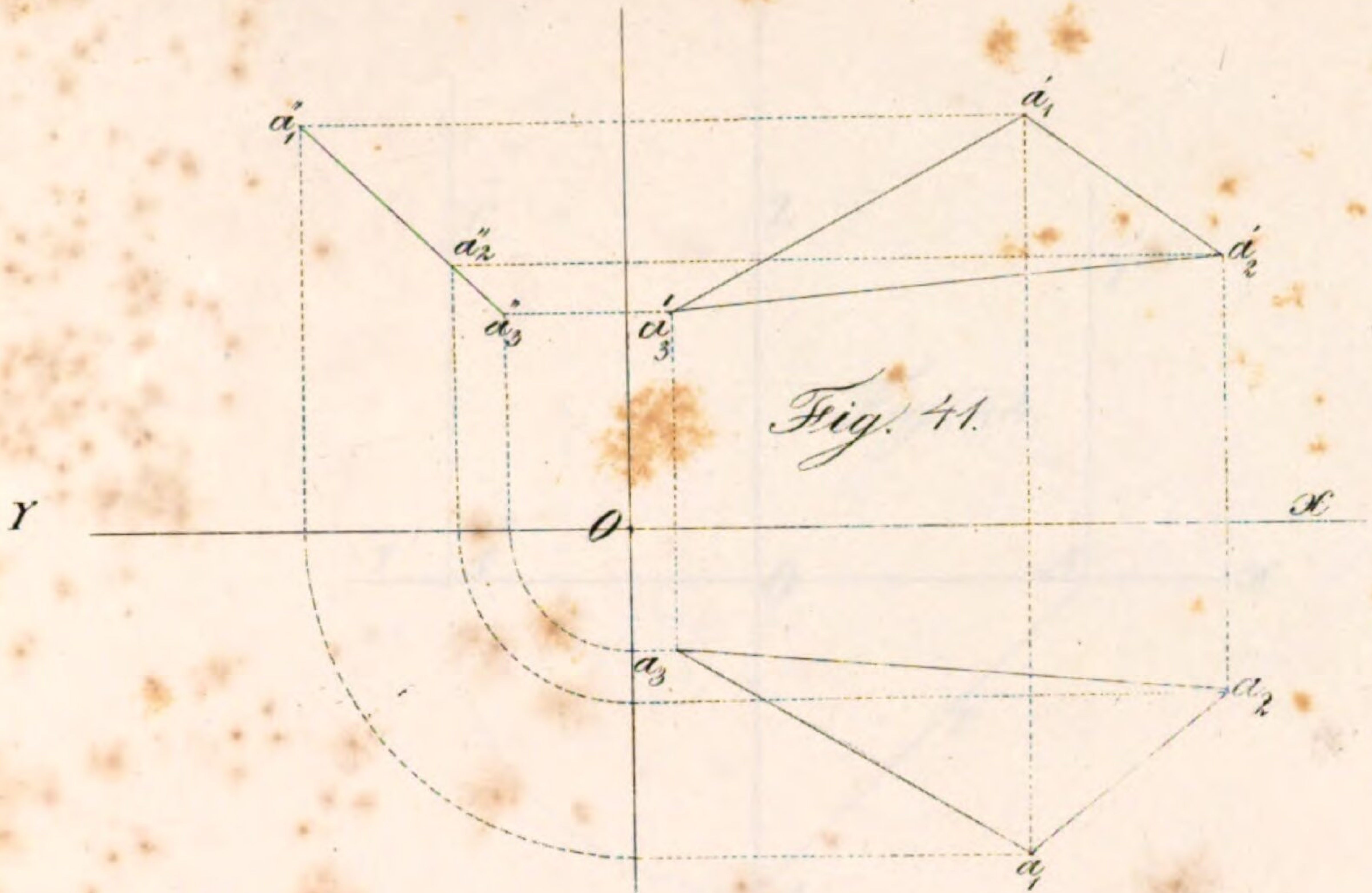


Fig. 41.

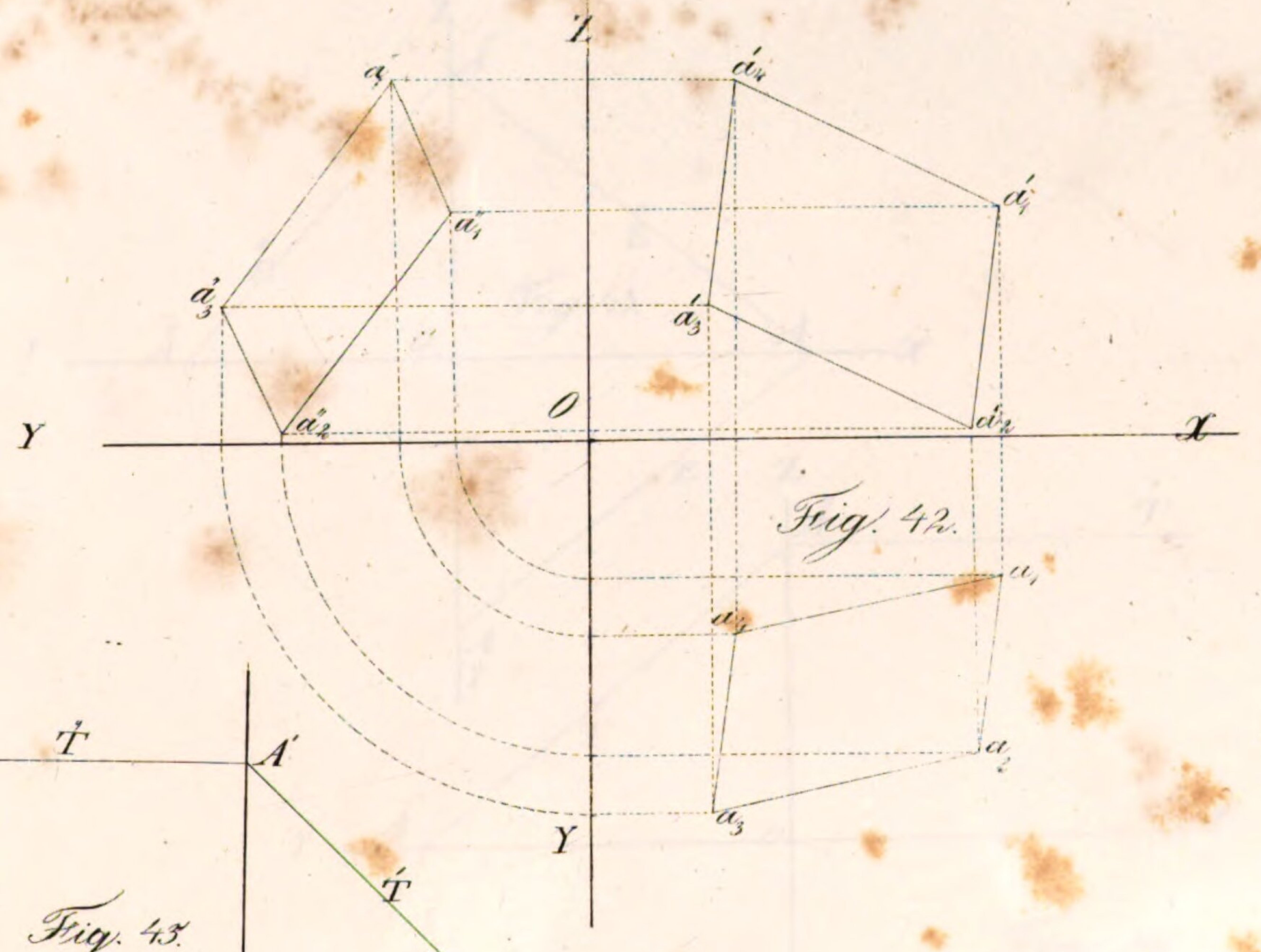


Fig. 42.

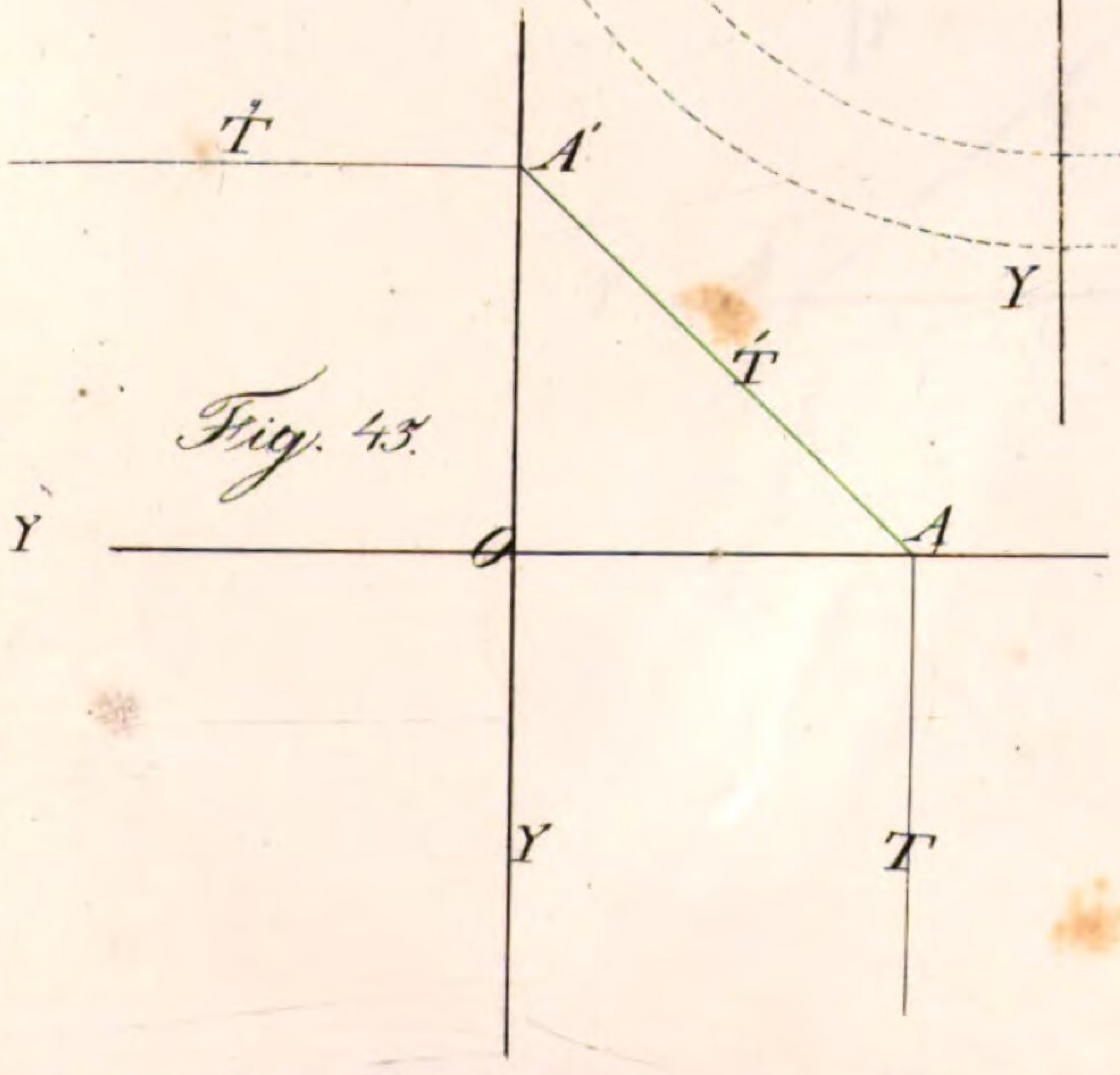
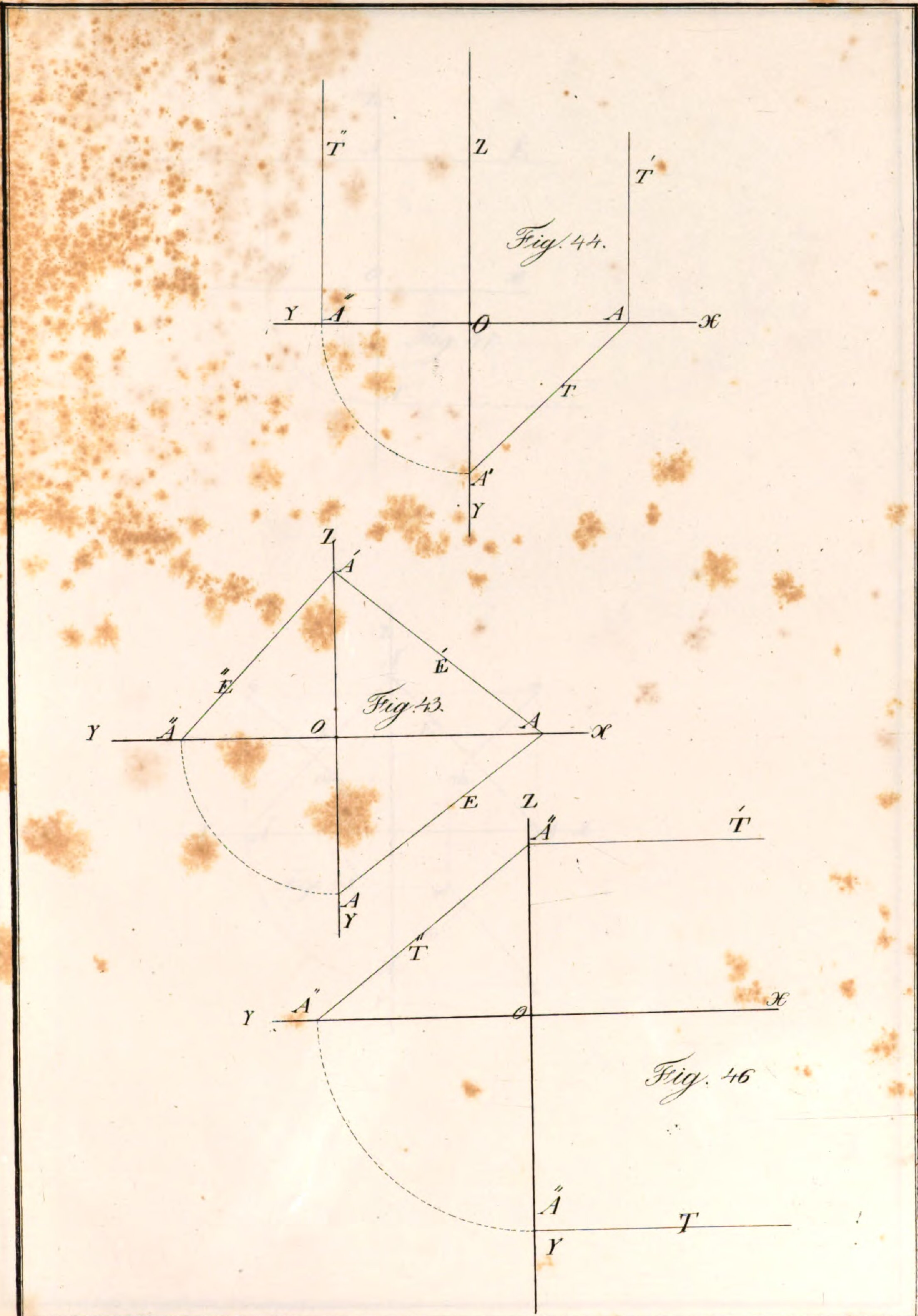


Fig. 43.

Lith. von Gottl. Schwegerle jun. gez. von Kuhn.



Lith. von G. Schweyerle, jun.
gez. von Kuhn.

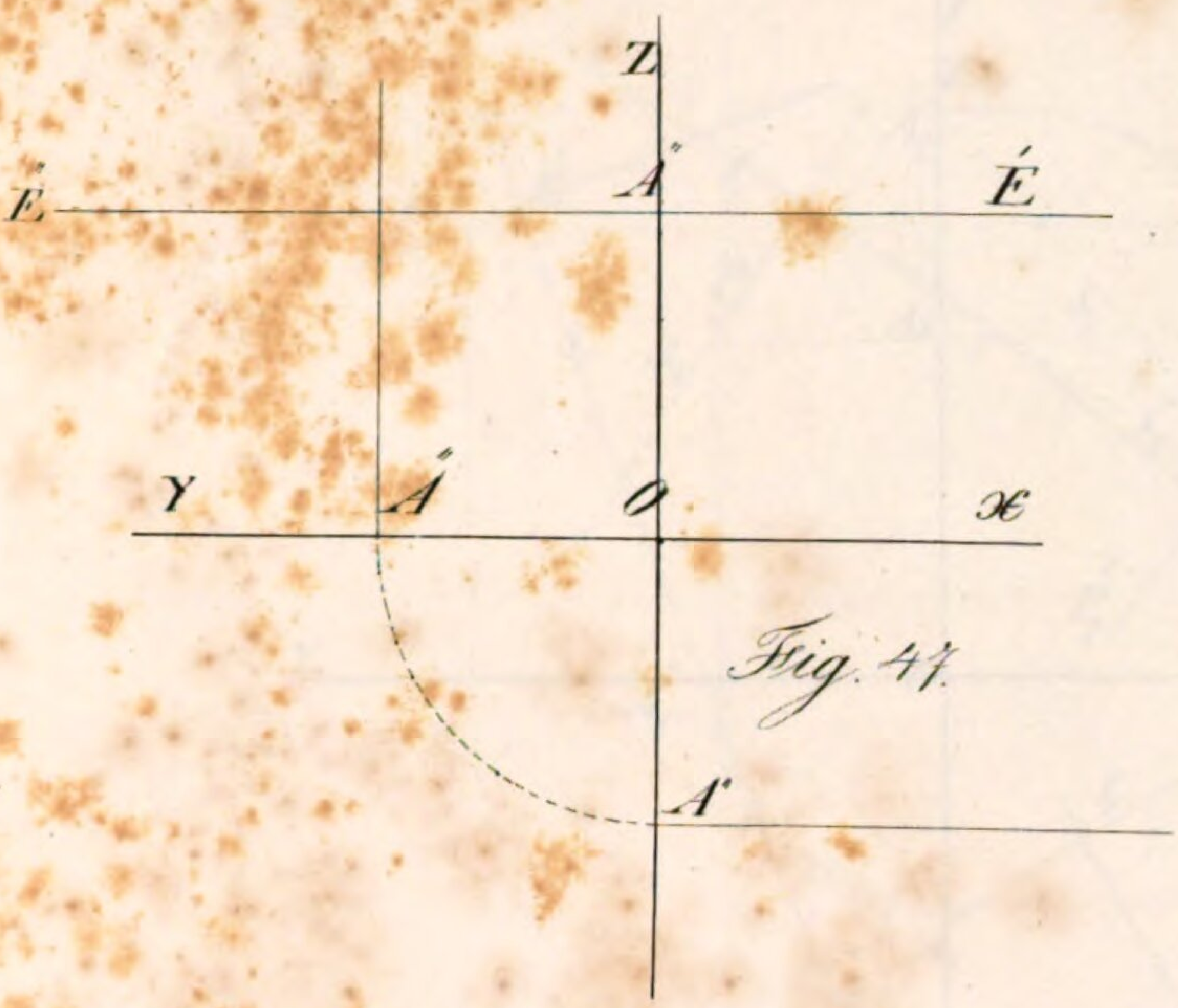


Fig. 47.

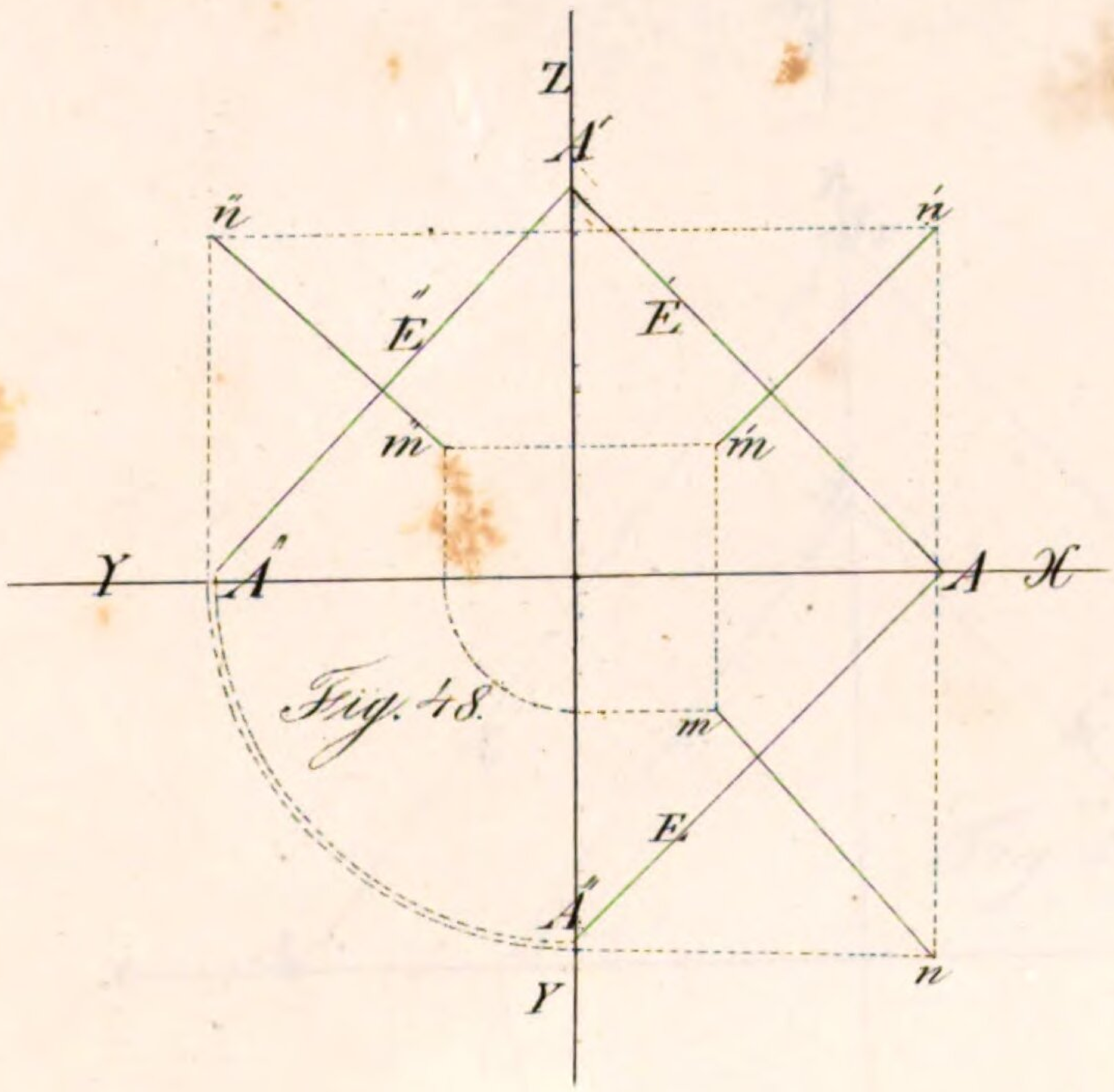
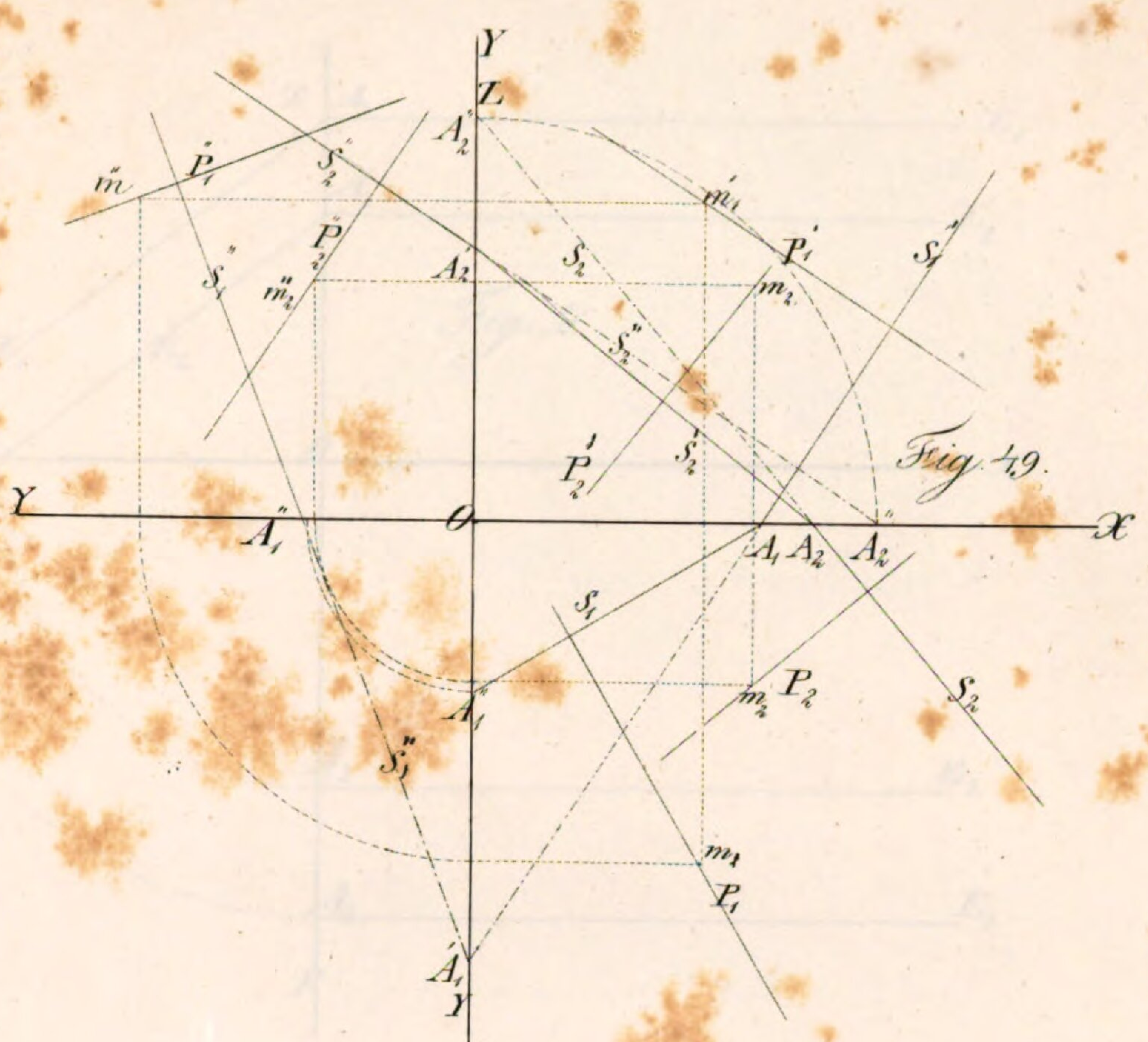
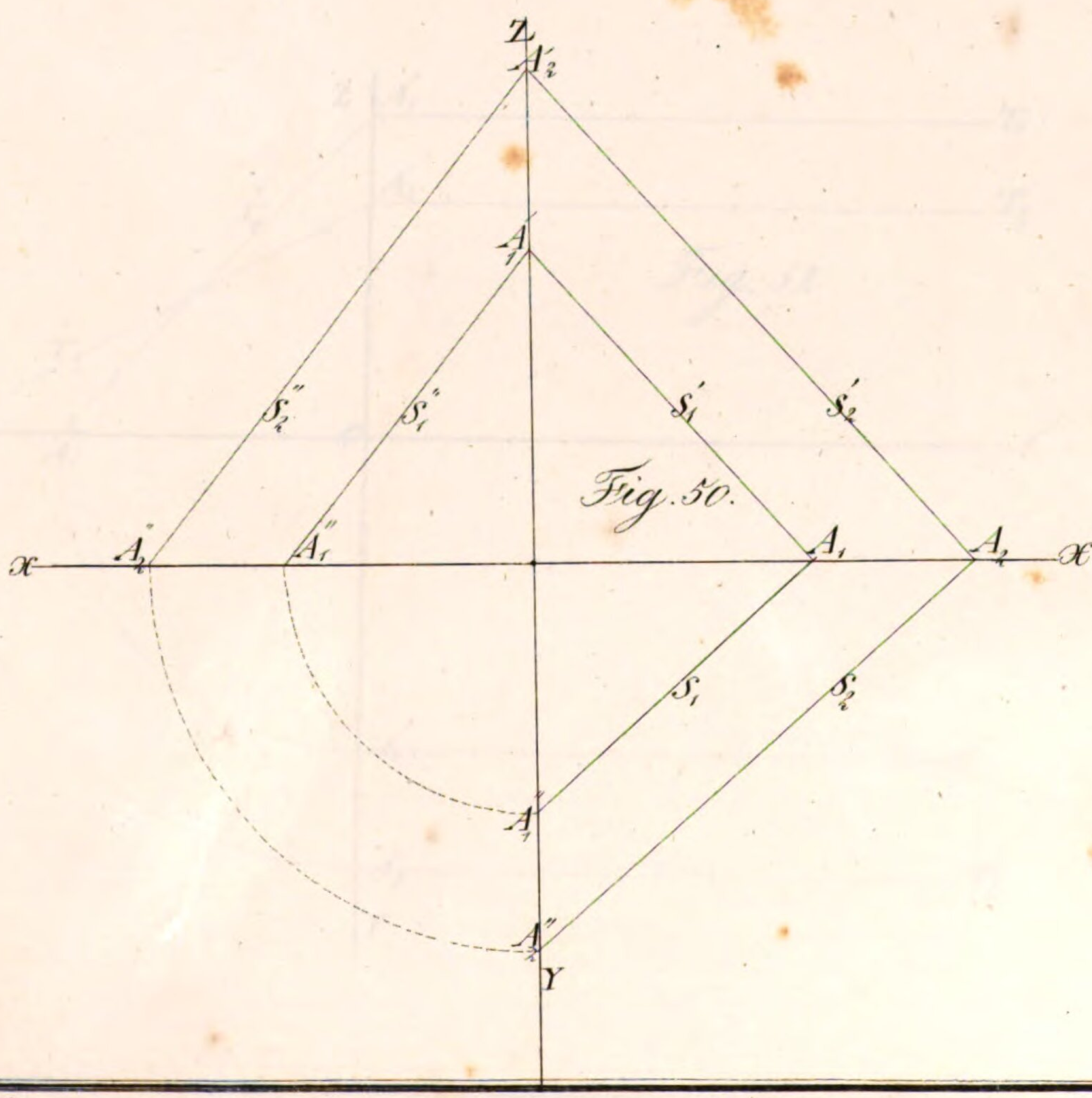


Fig. 48.





Lith. von G. Schroegerle.

gez. von Kuh. i

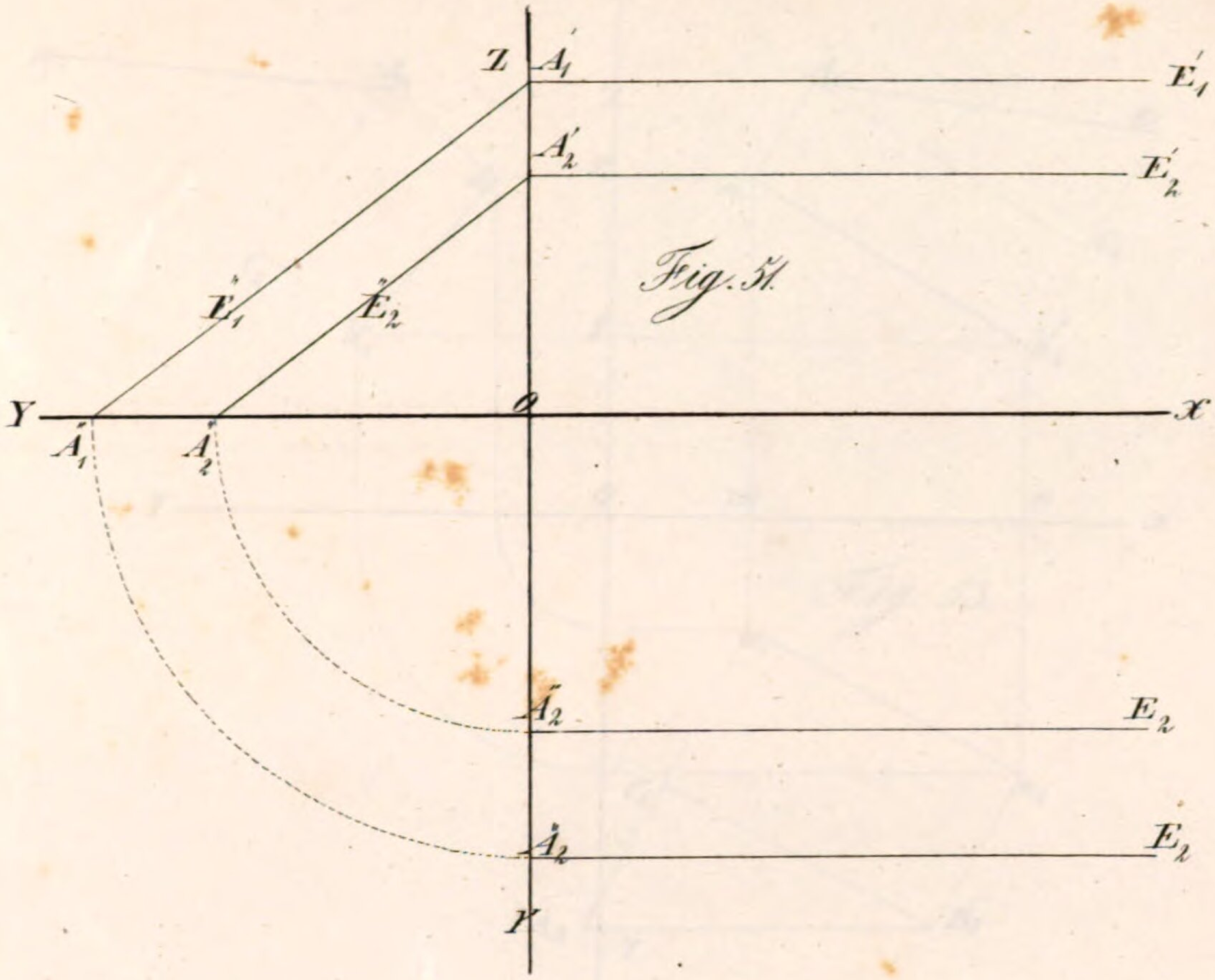

Z
A'₁
E'₁
A'₂
E'₂
E''₁
E''₂
Y
x
o
A''₁
A''₂
E₂
E₂
Y

Fig. 51.

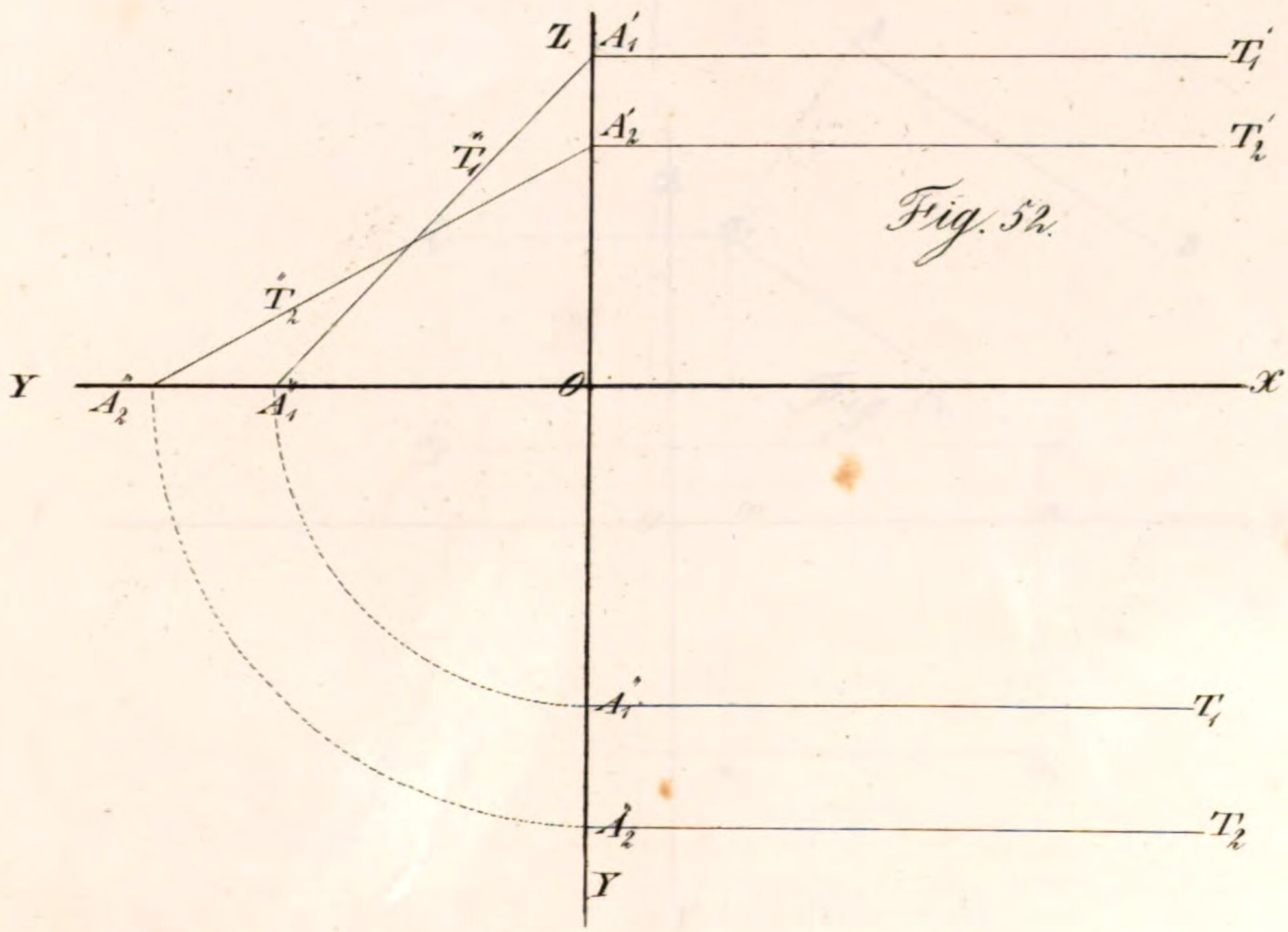

Z
A'₁
T'₁
A'₂
T'₂
T''₁
T''₂
Y
x
o
A''₂
A''₁
T₁
T₂
Y

Fig. 52.

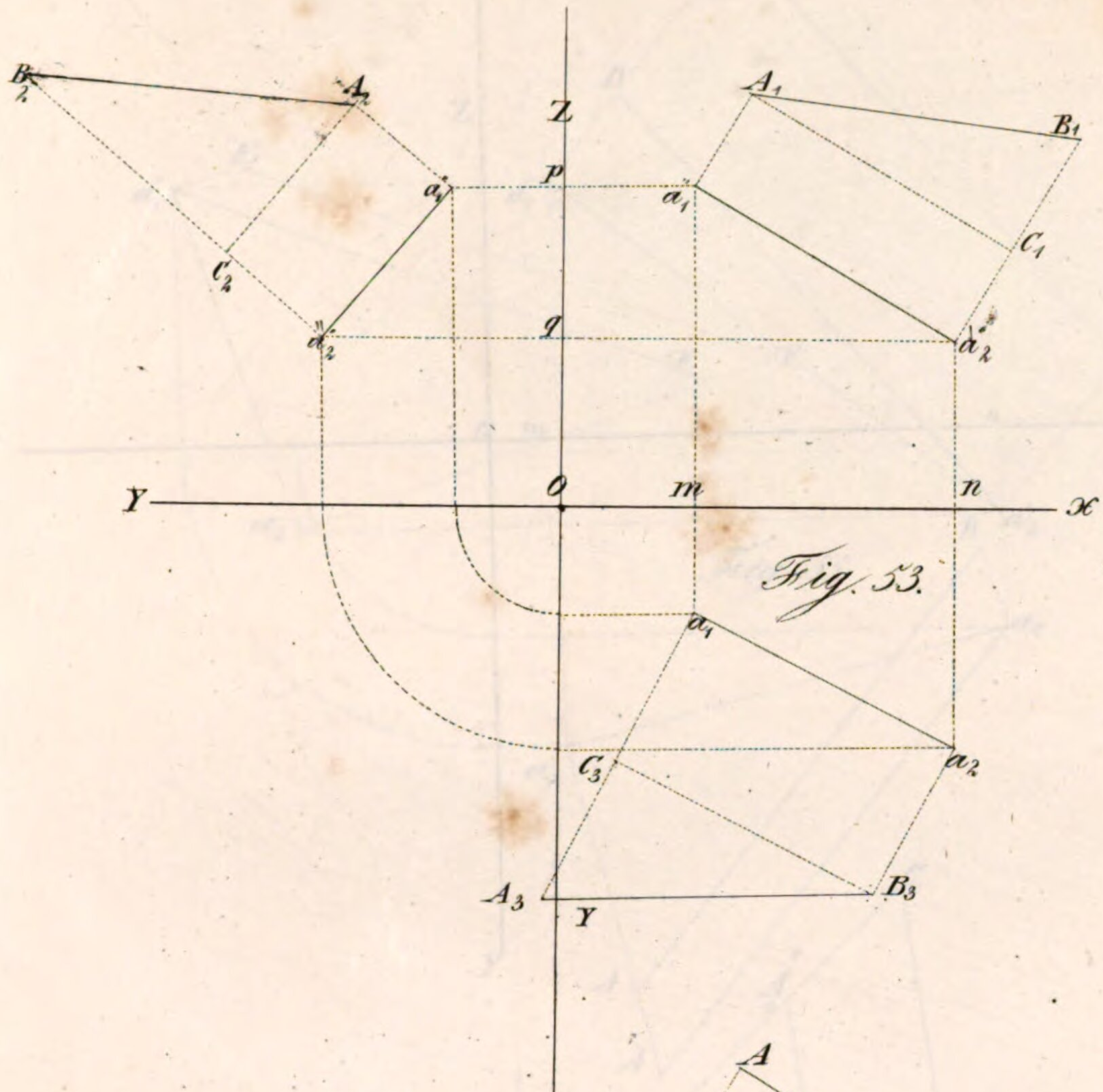


Fig. 53.

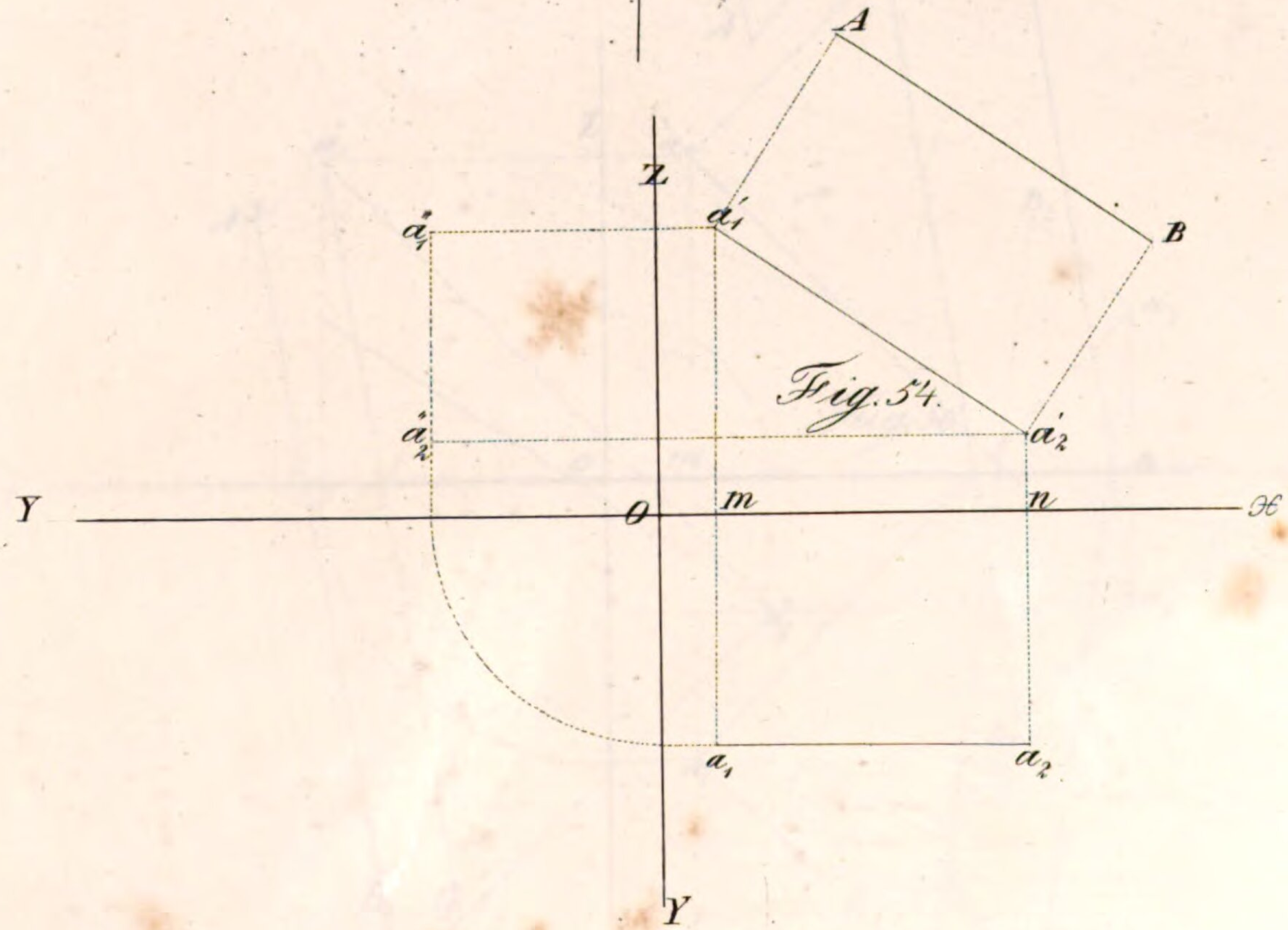


Fig. 54.

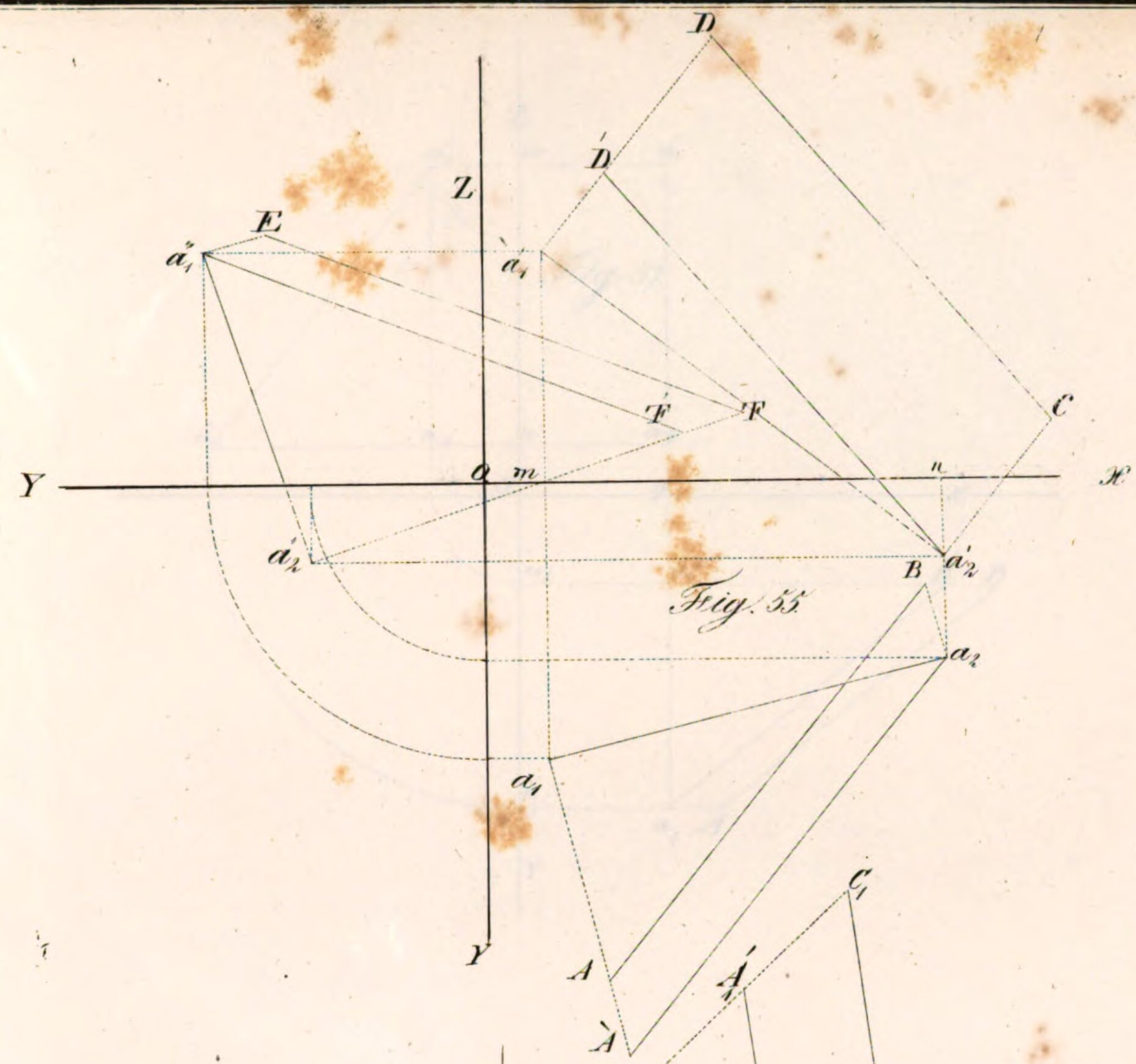


Fig. 55.

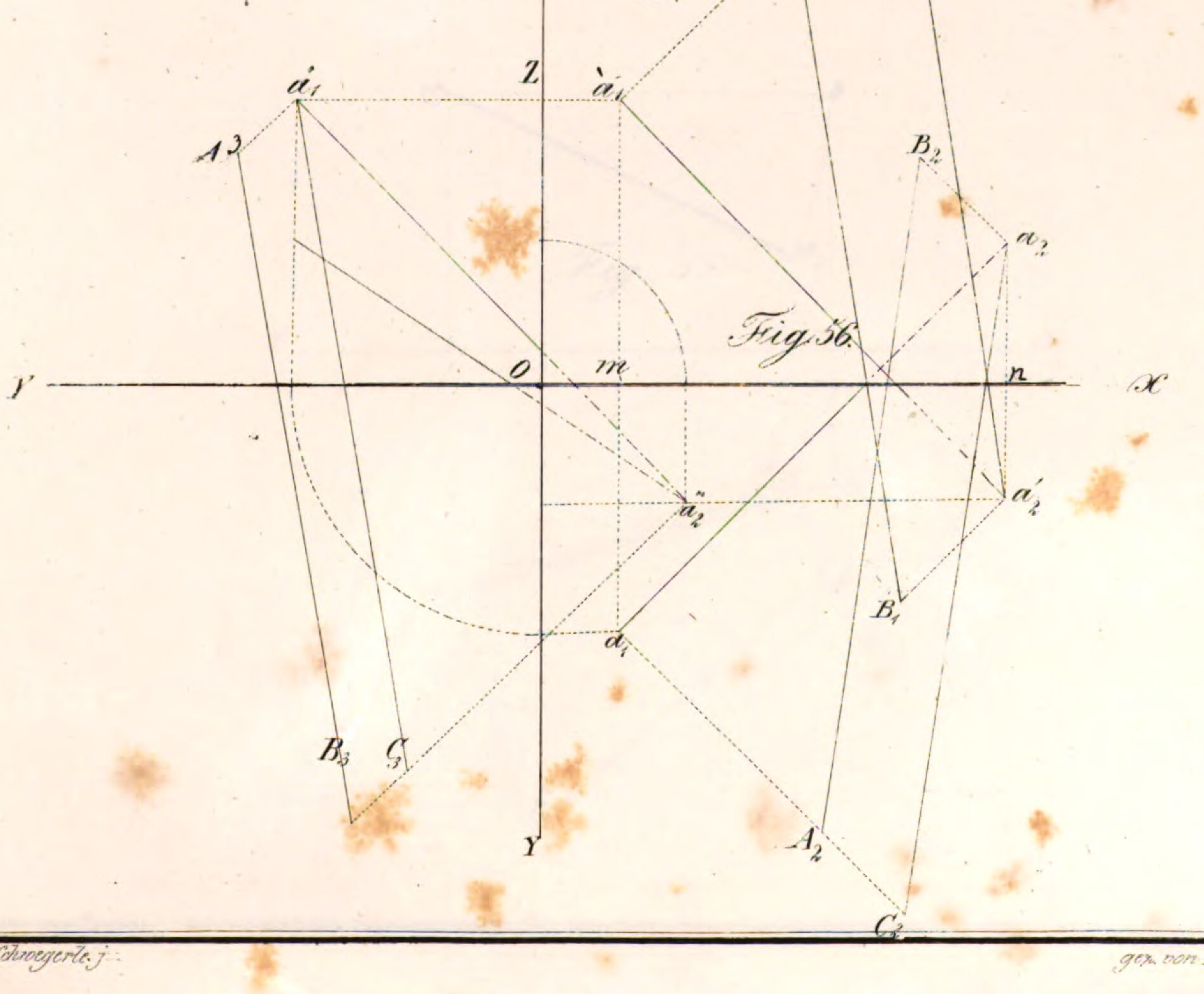


Fig. 56.

Lith. von Schwegerle j.

gez. von Tuhn.

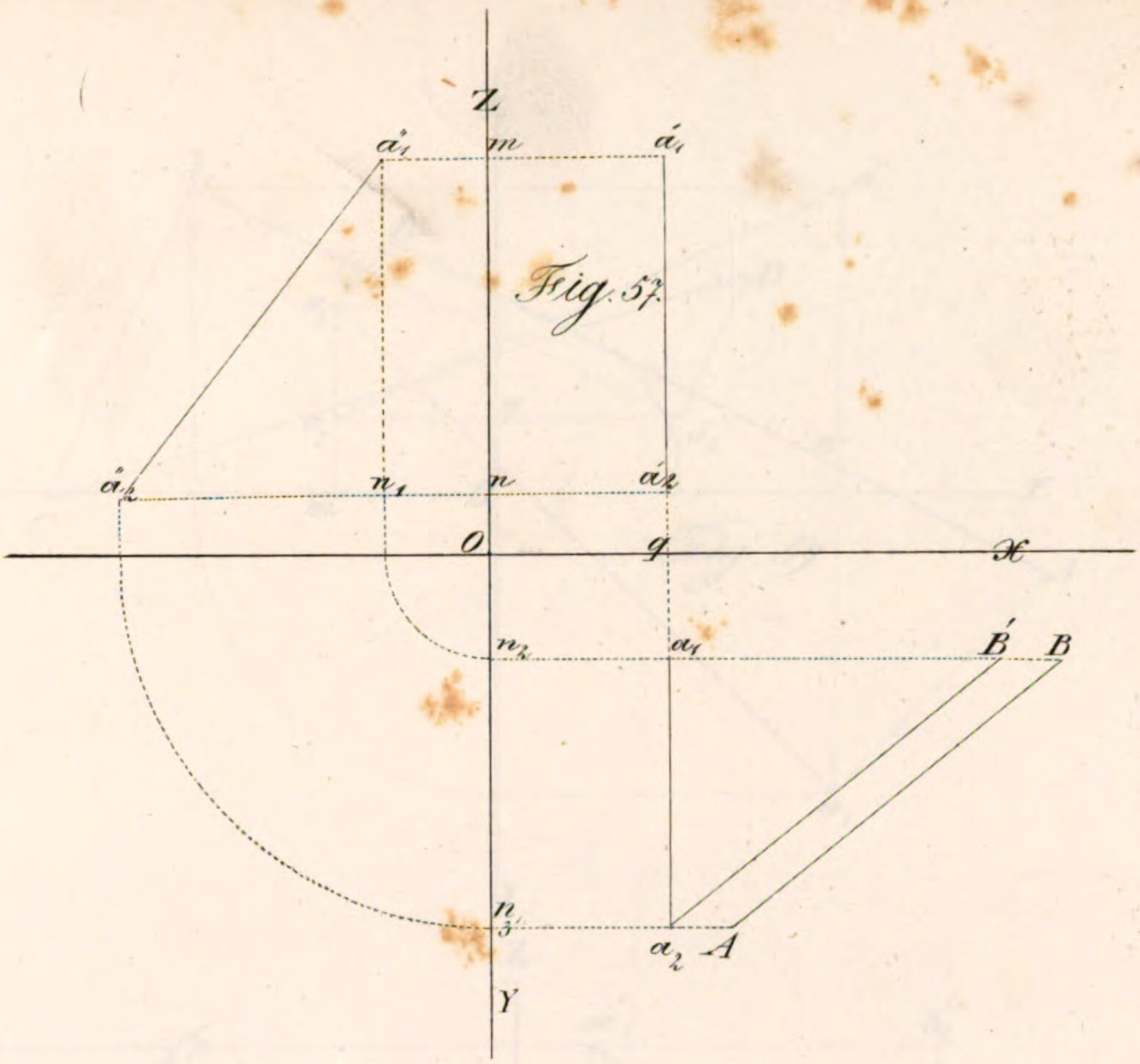


Fig. 57.

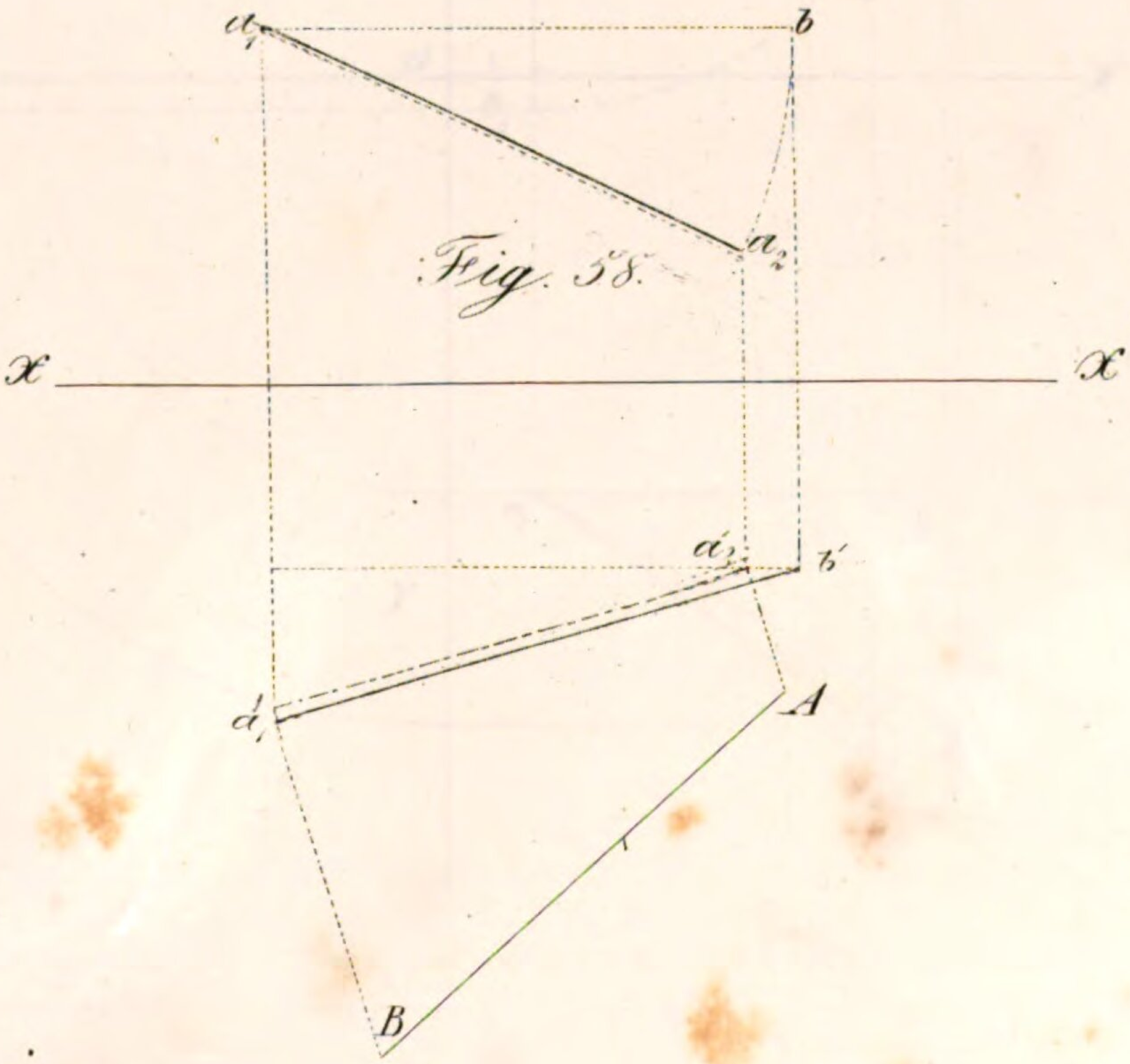


Fig. 58.

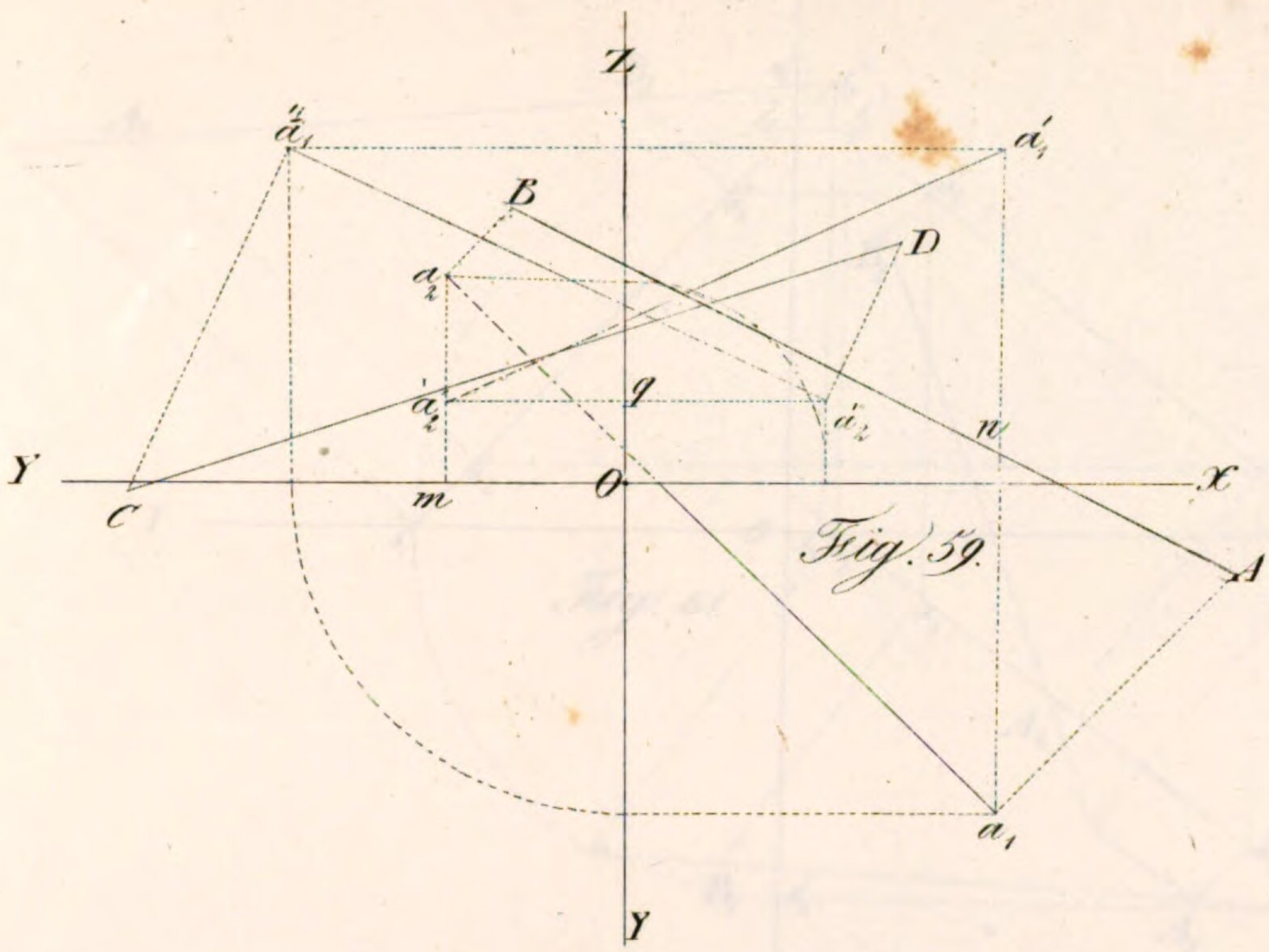


Fig. 59.

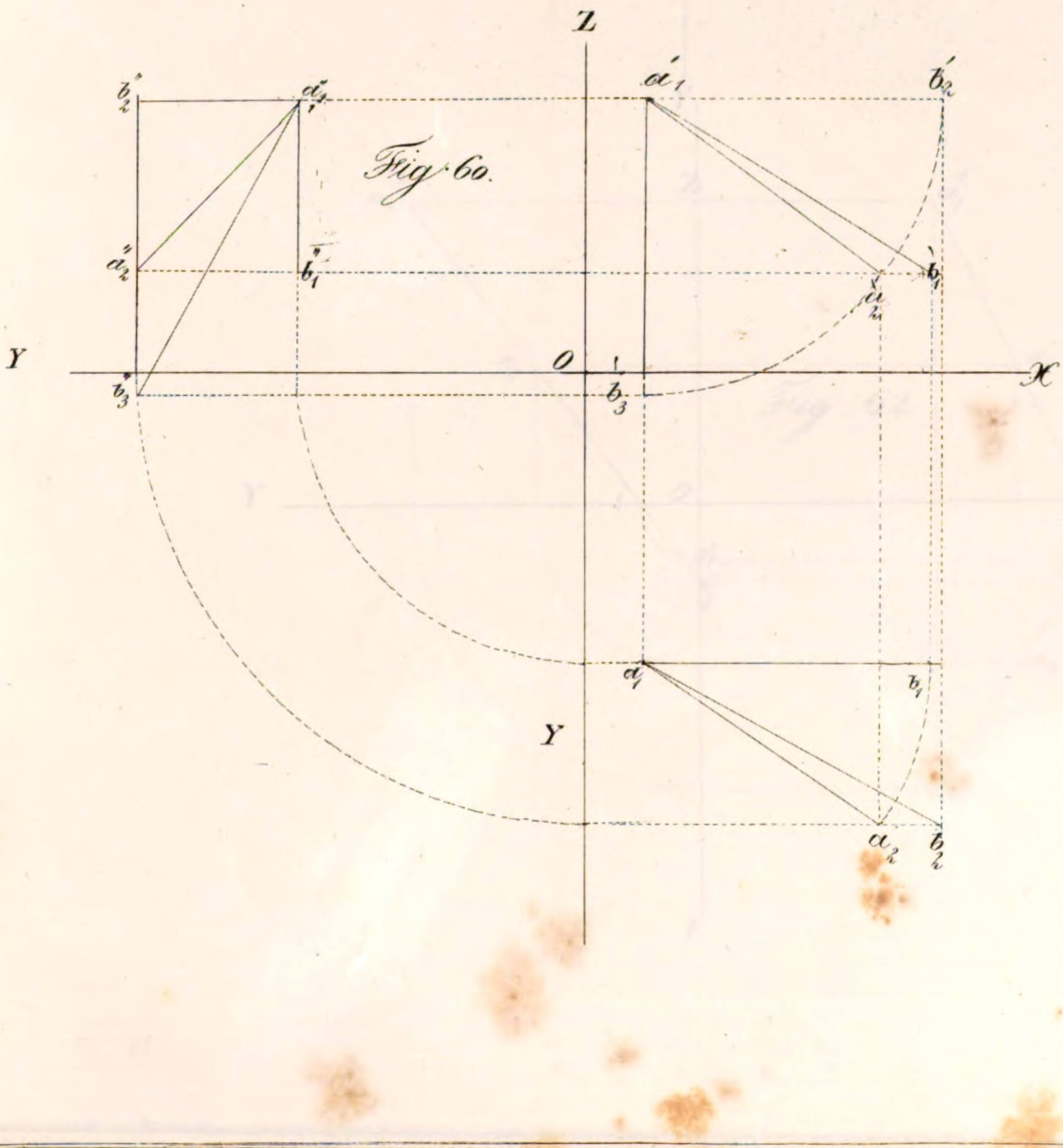
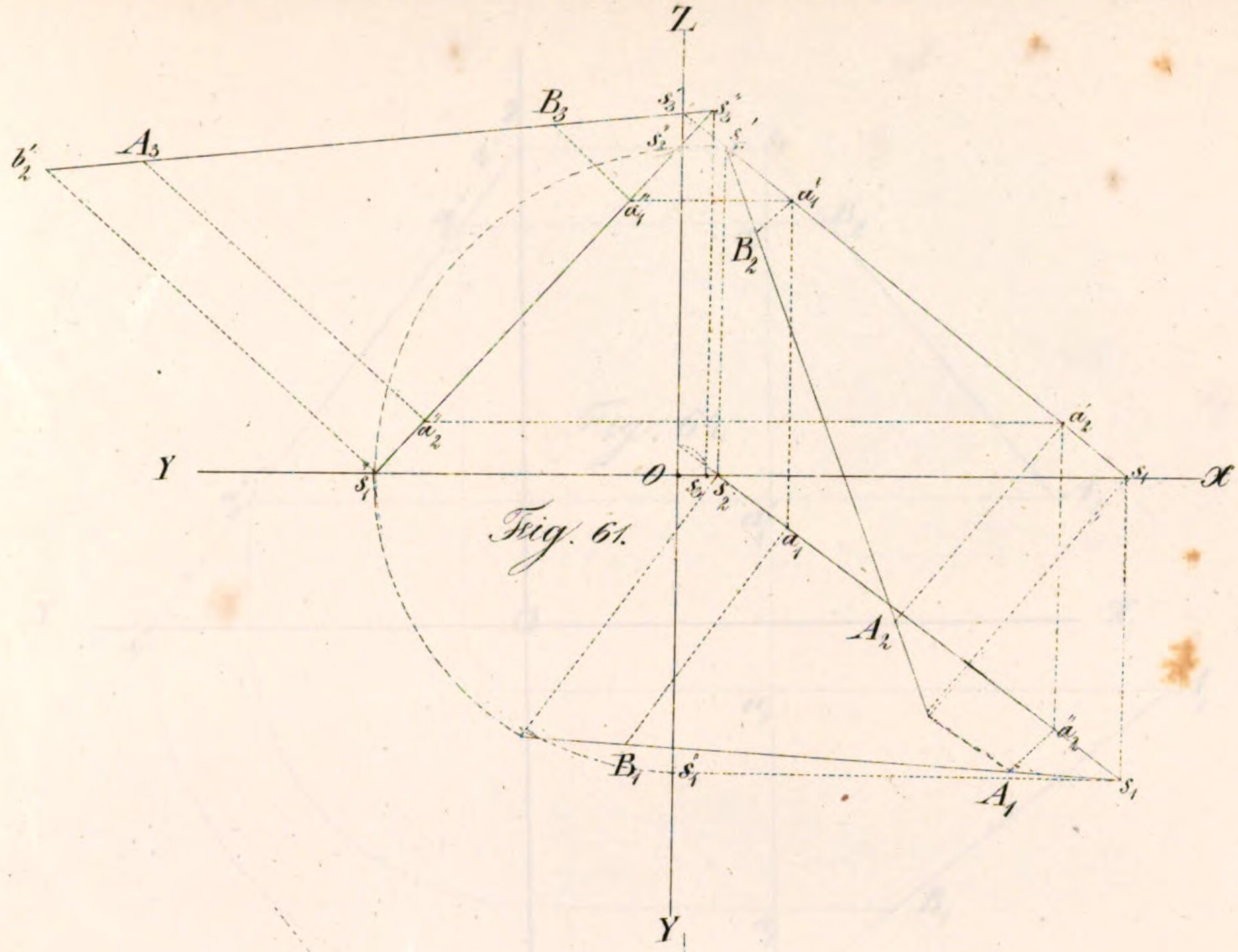
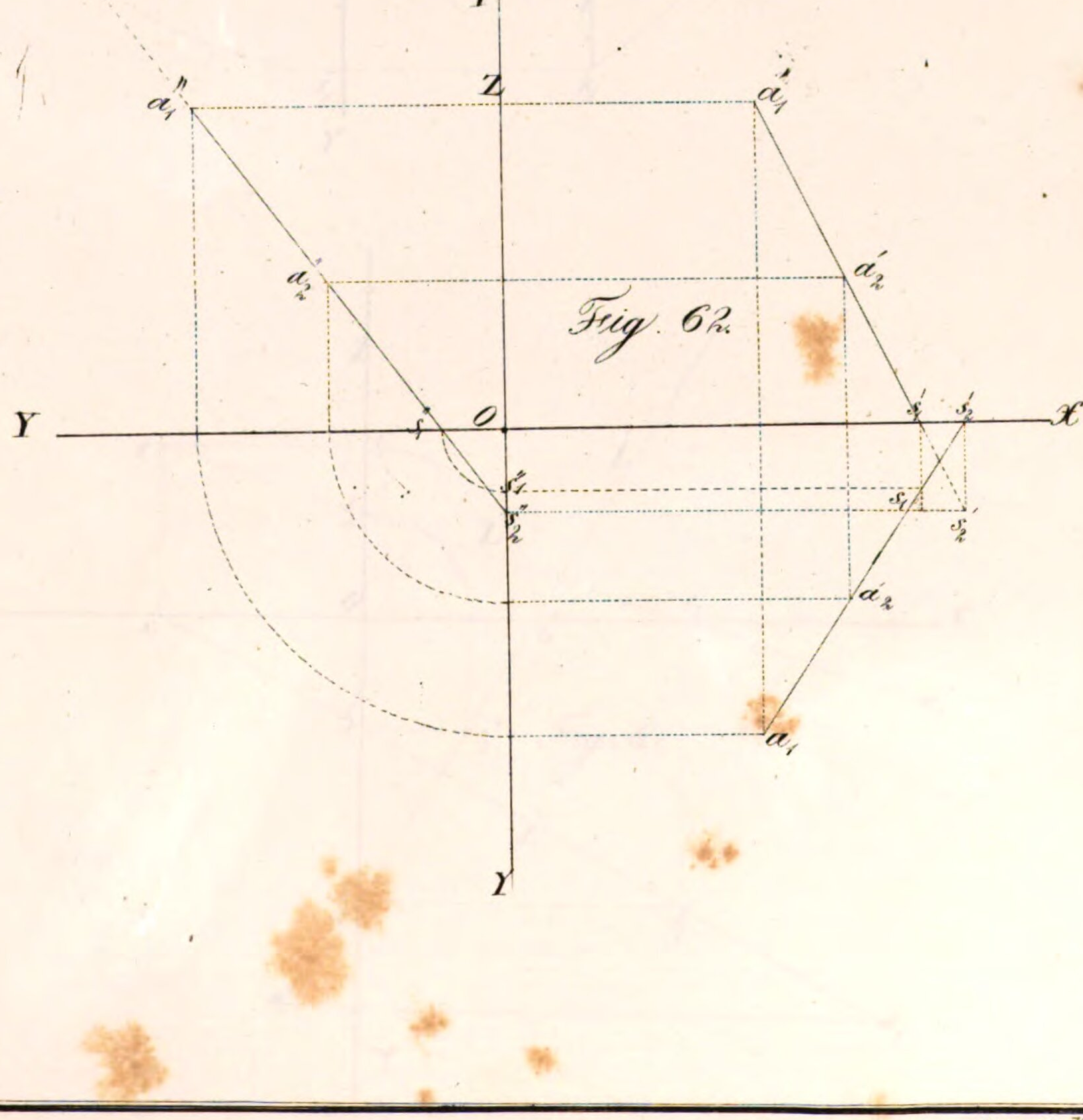


Fig. 60.

Lith. von G. Schwegerle ju.

gez. v. m. Kuhn





Lith. von G. Schroegerle. gez: von Kuhn.

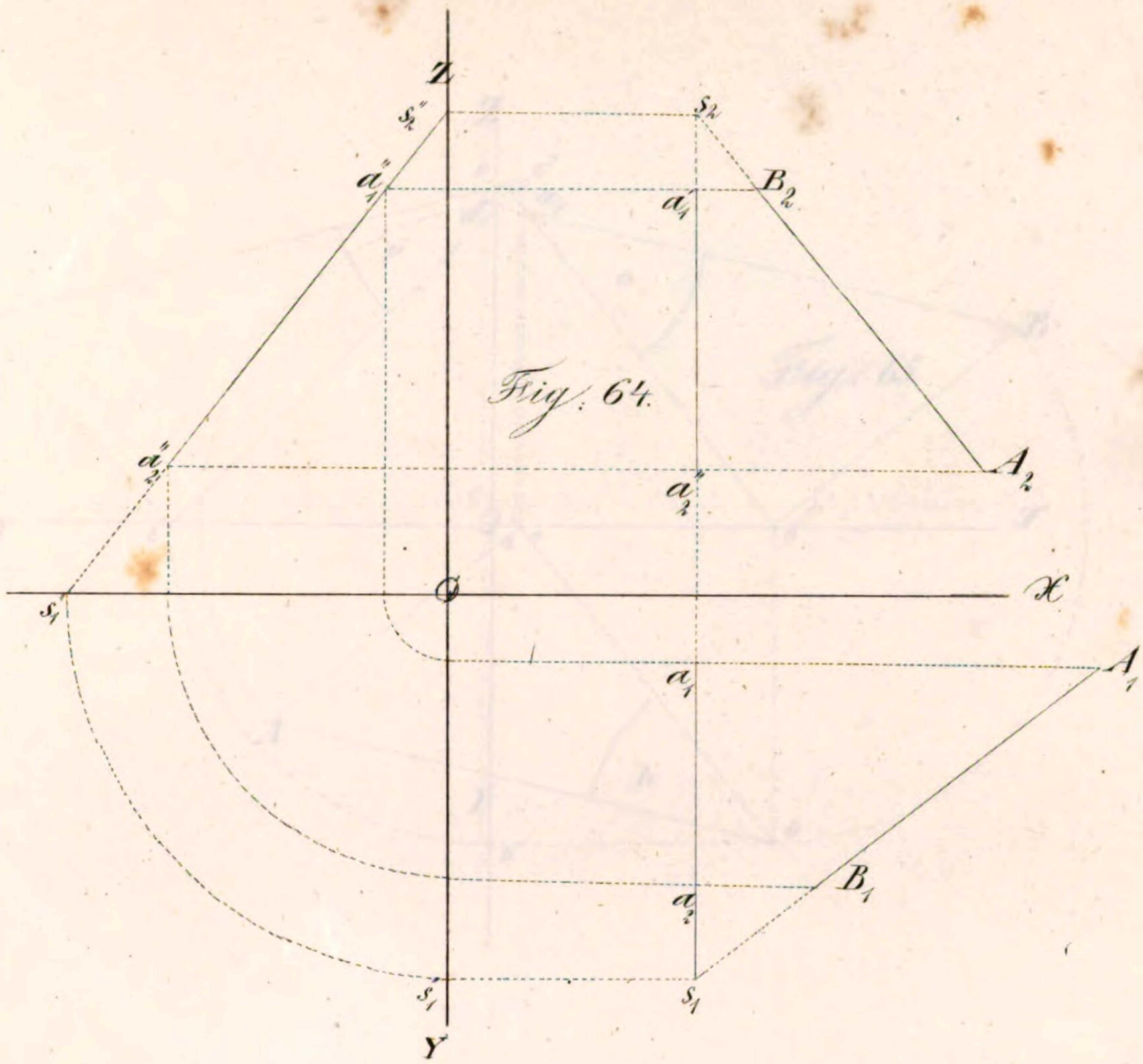


Fig: 64.

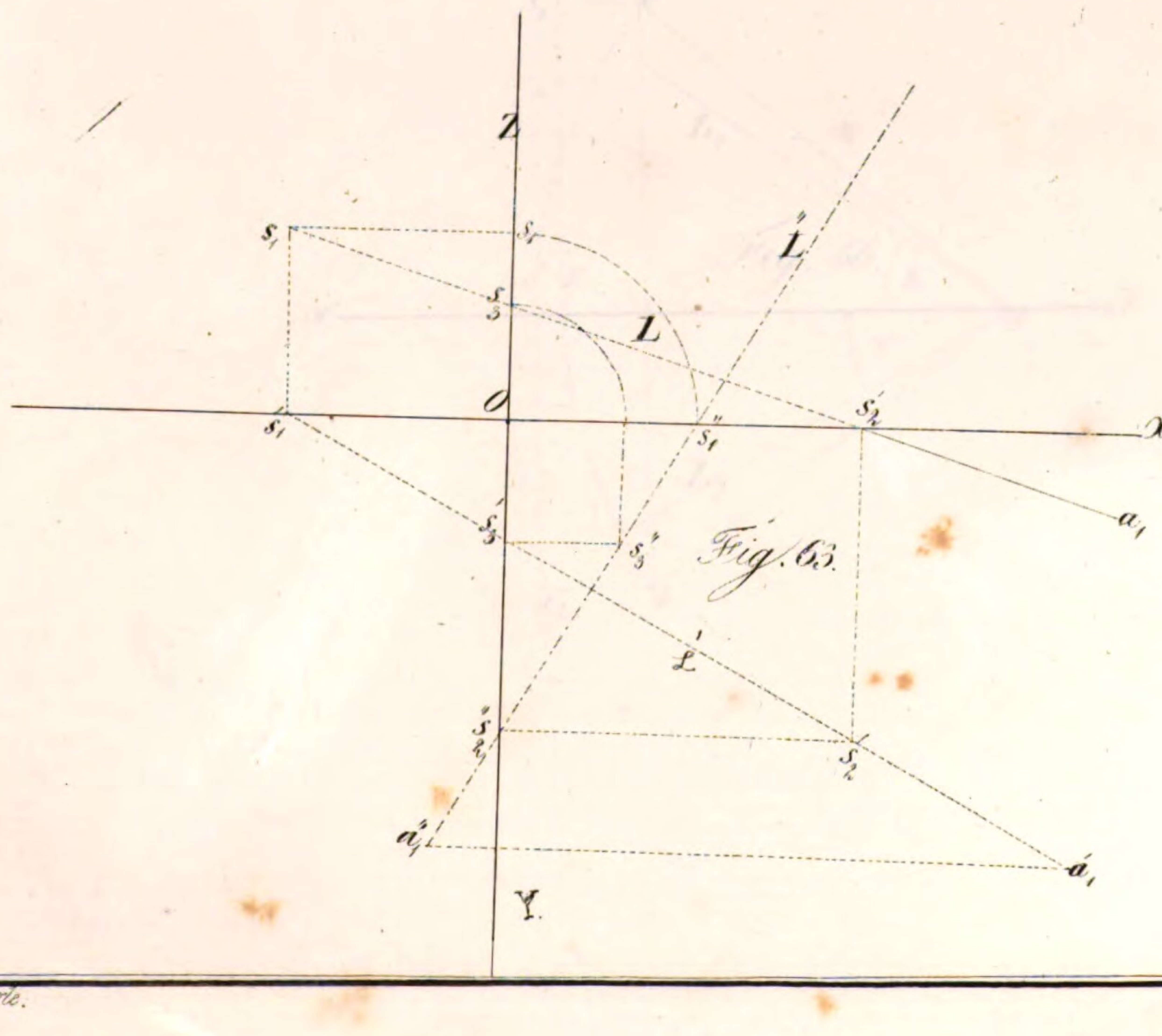


Fig. 63.

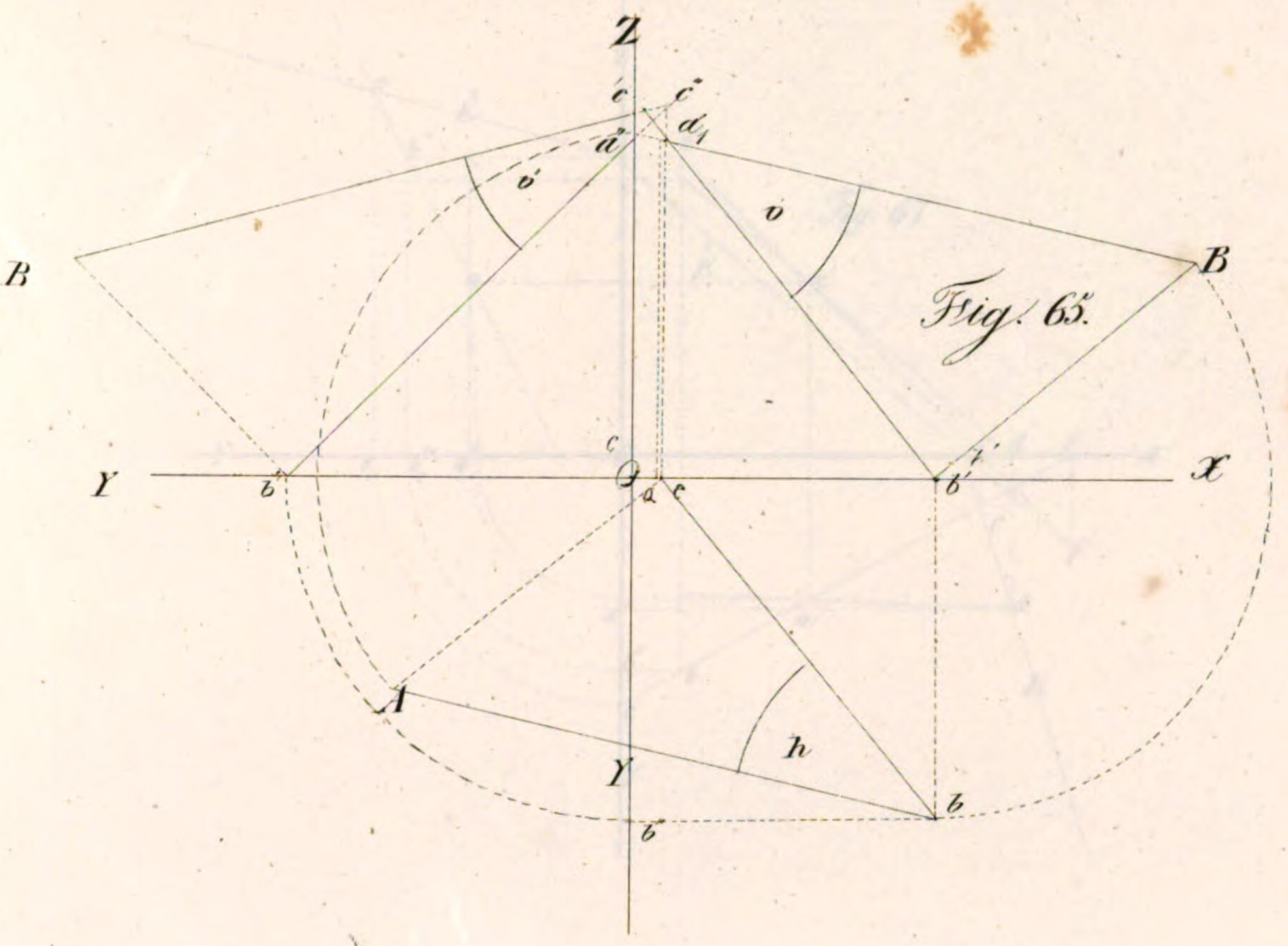


Fig. 65.

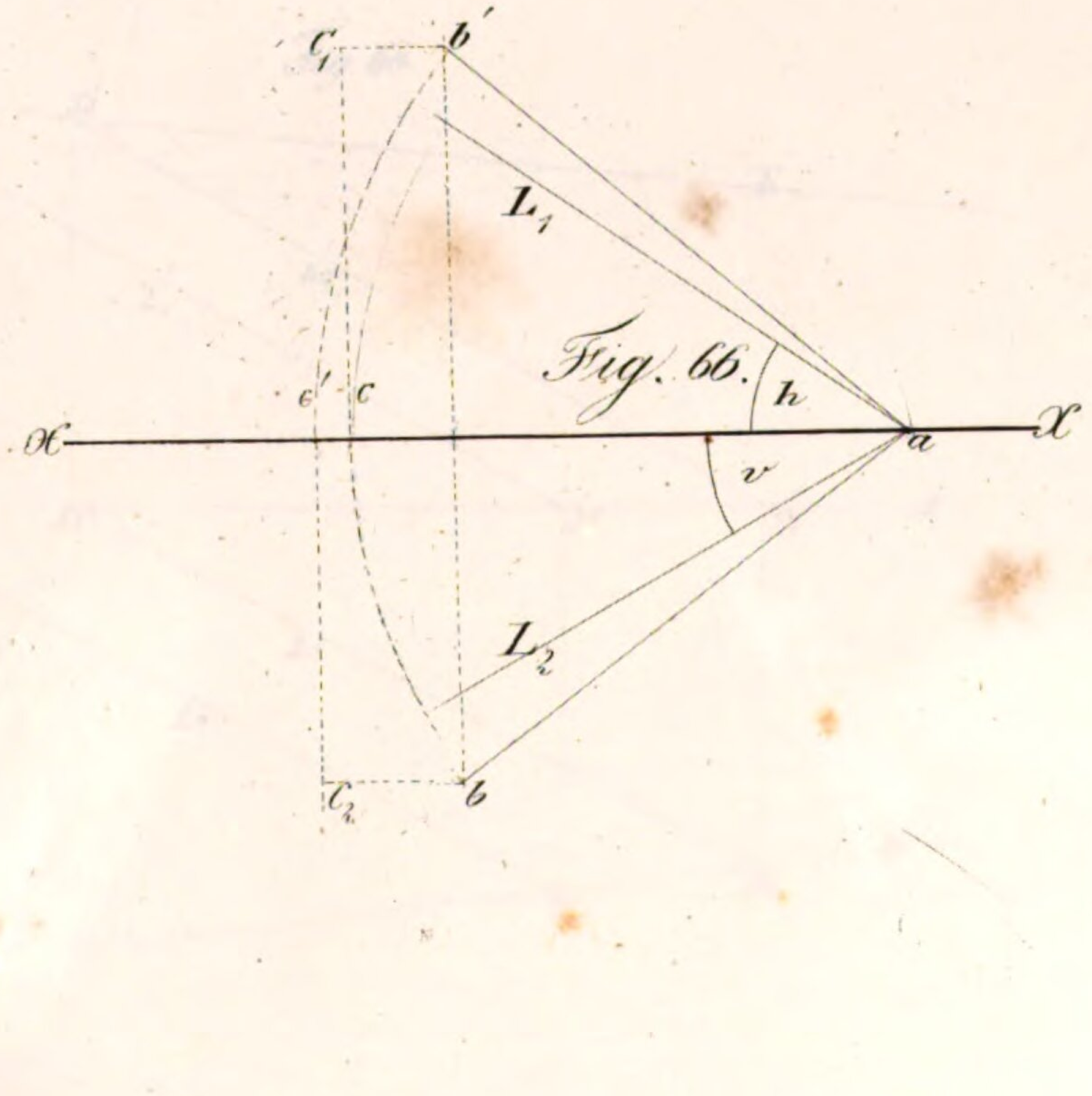


Fig. 66.

Lith. von G. Schwegerle.

gez. von Kuh

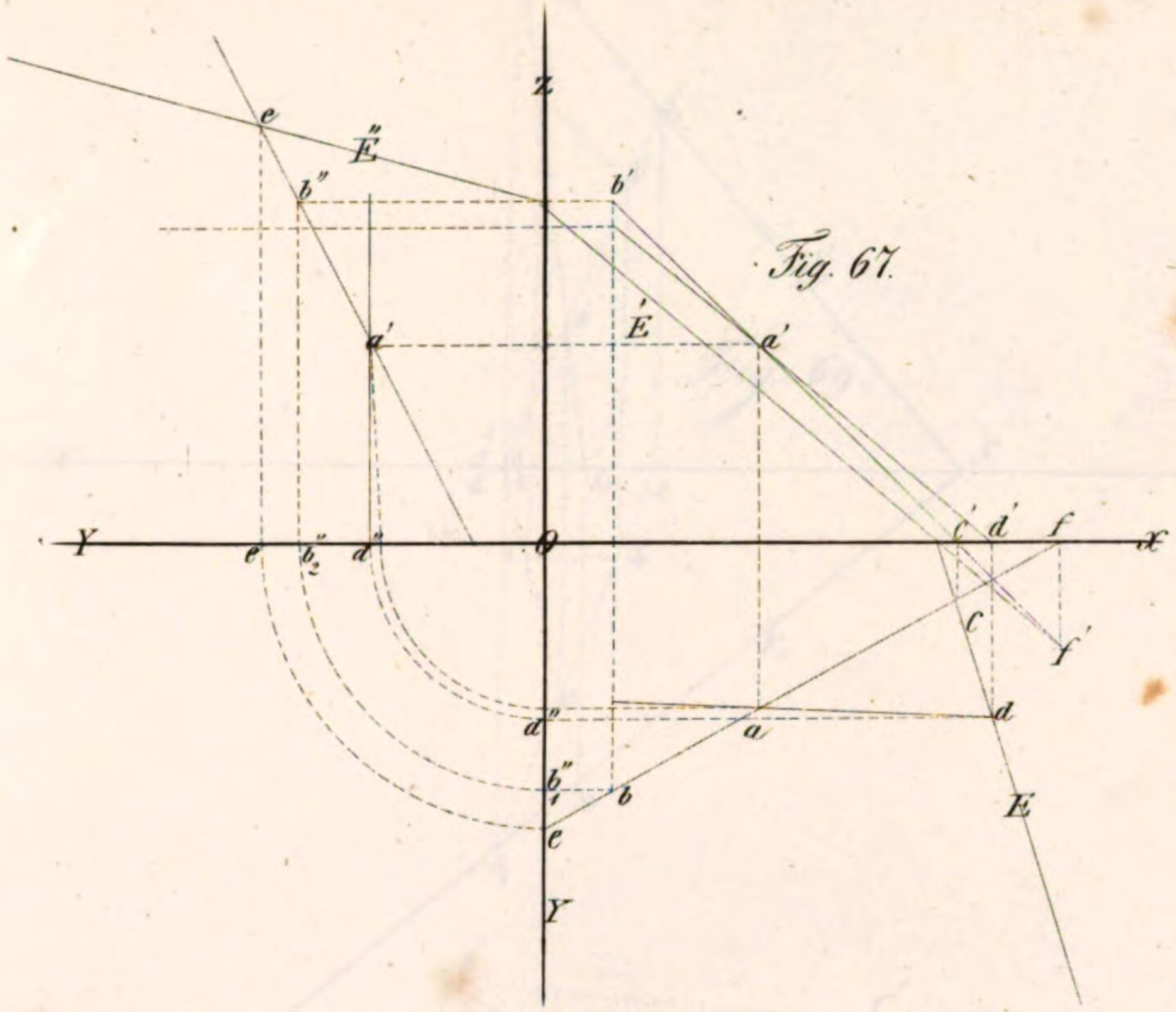
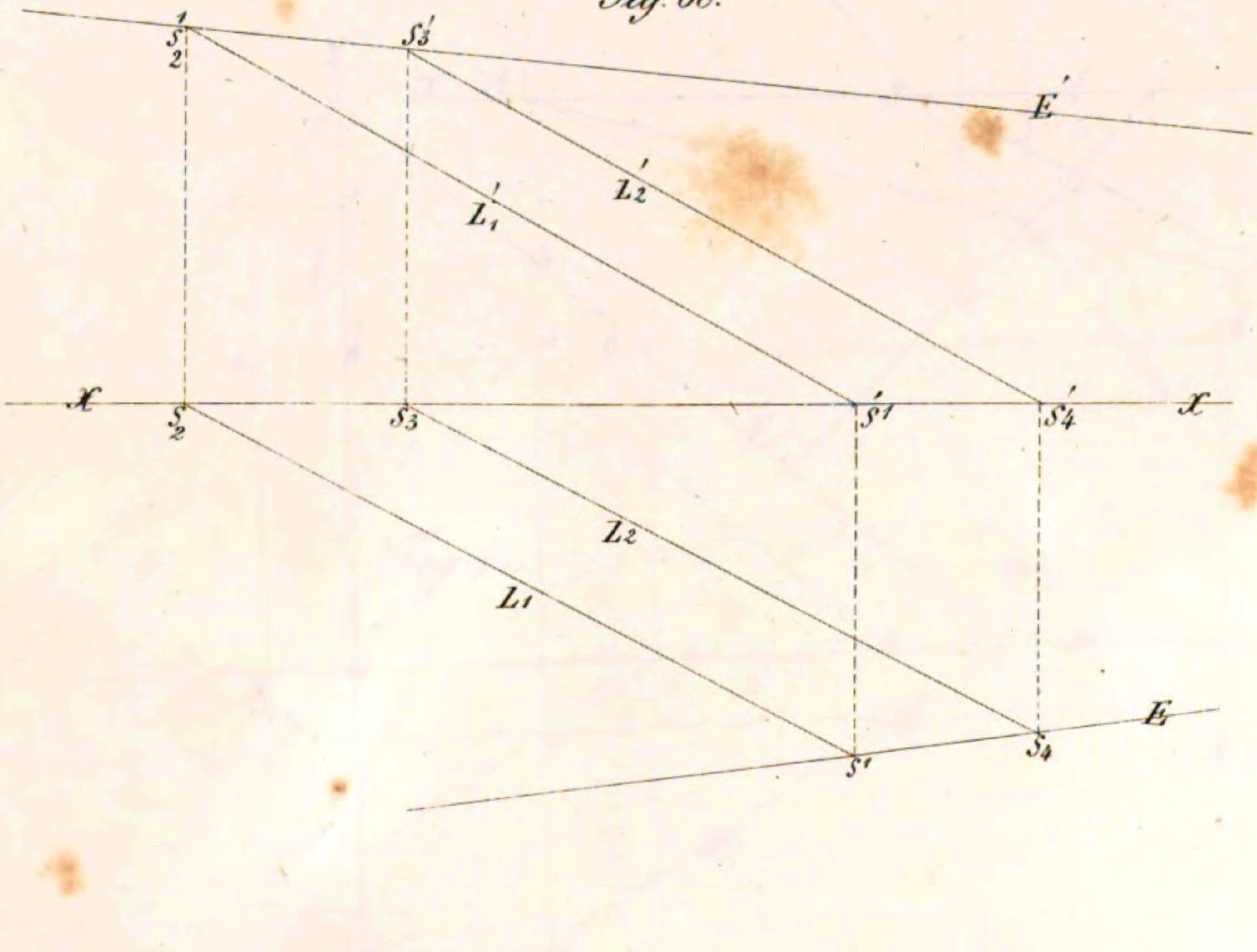


Fig. 67.

Fig. 68.



gez. v. Kuhn.

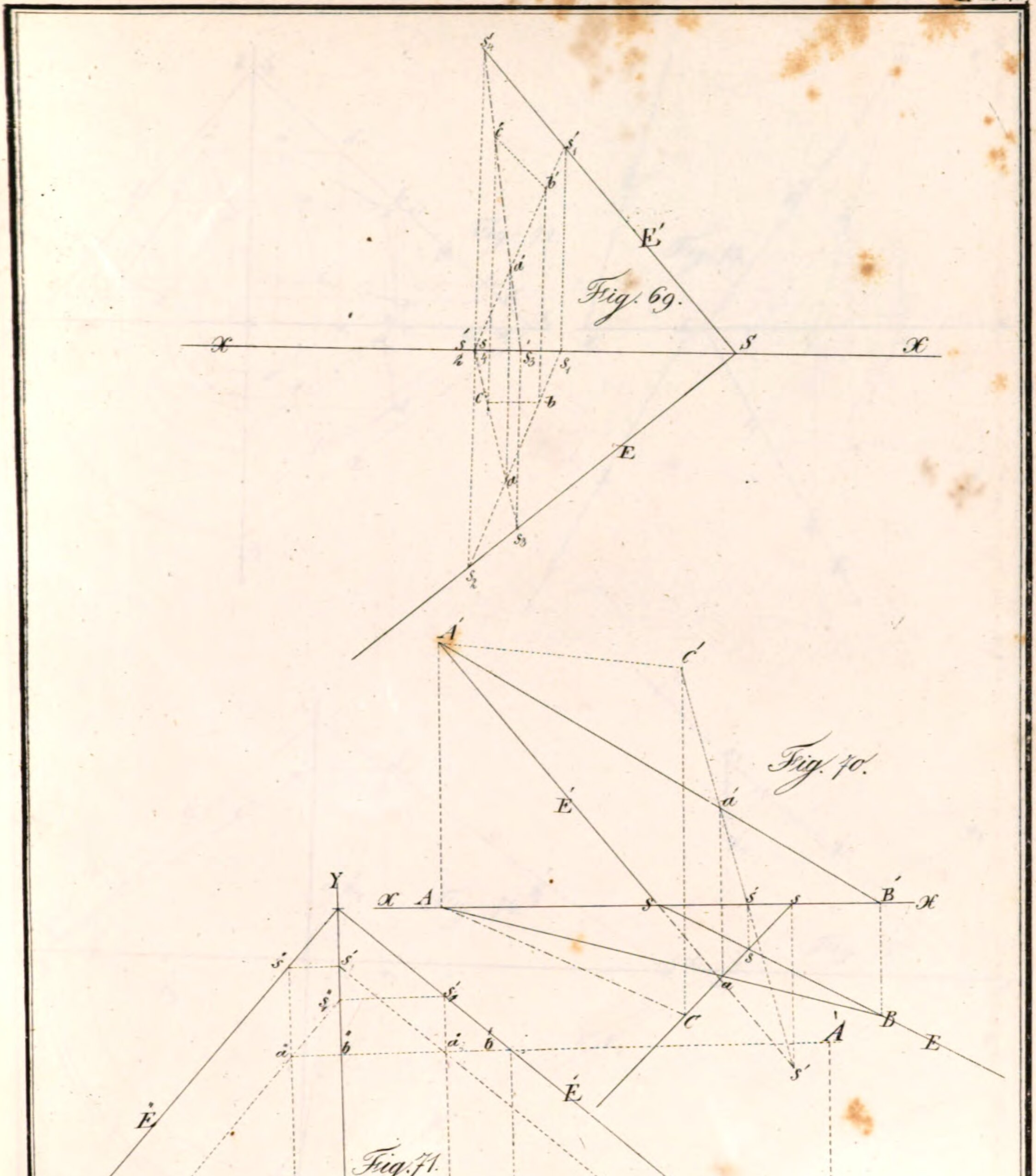
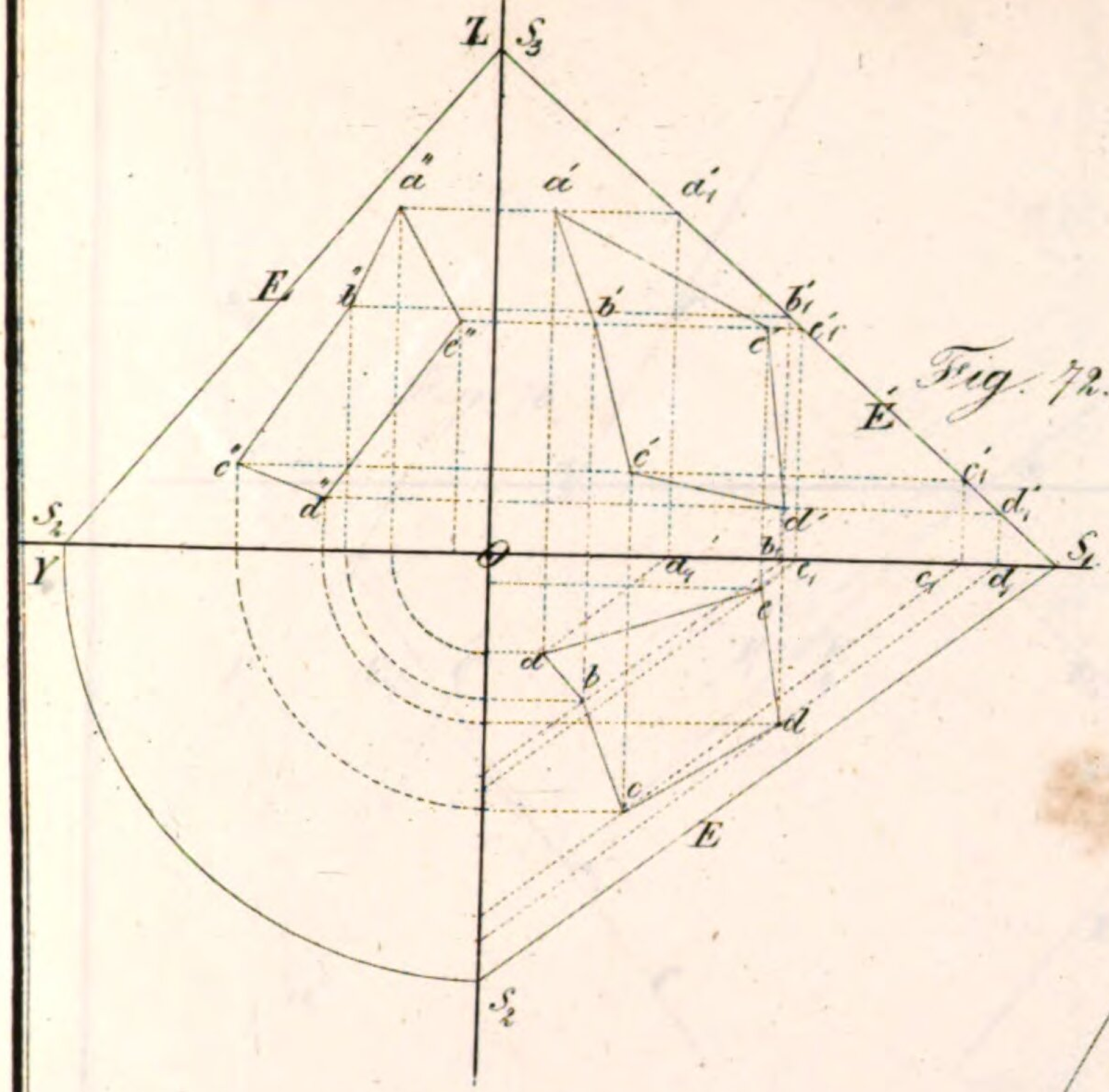


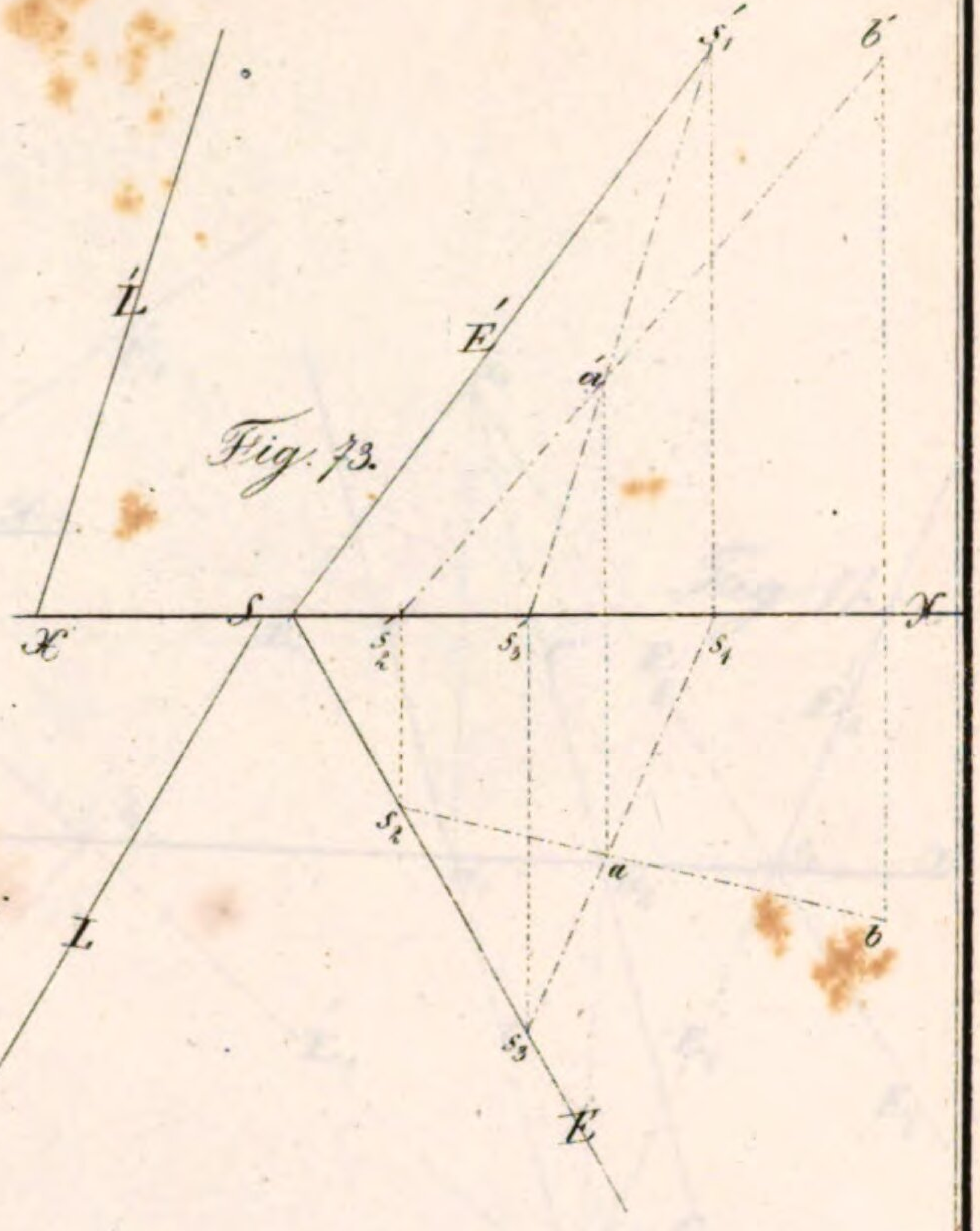
Fig. 69.

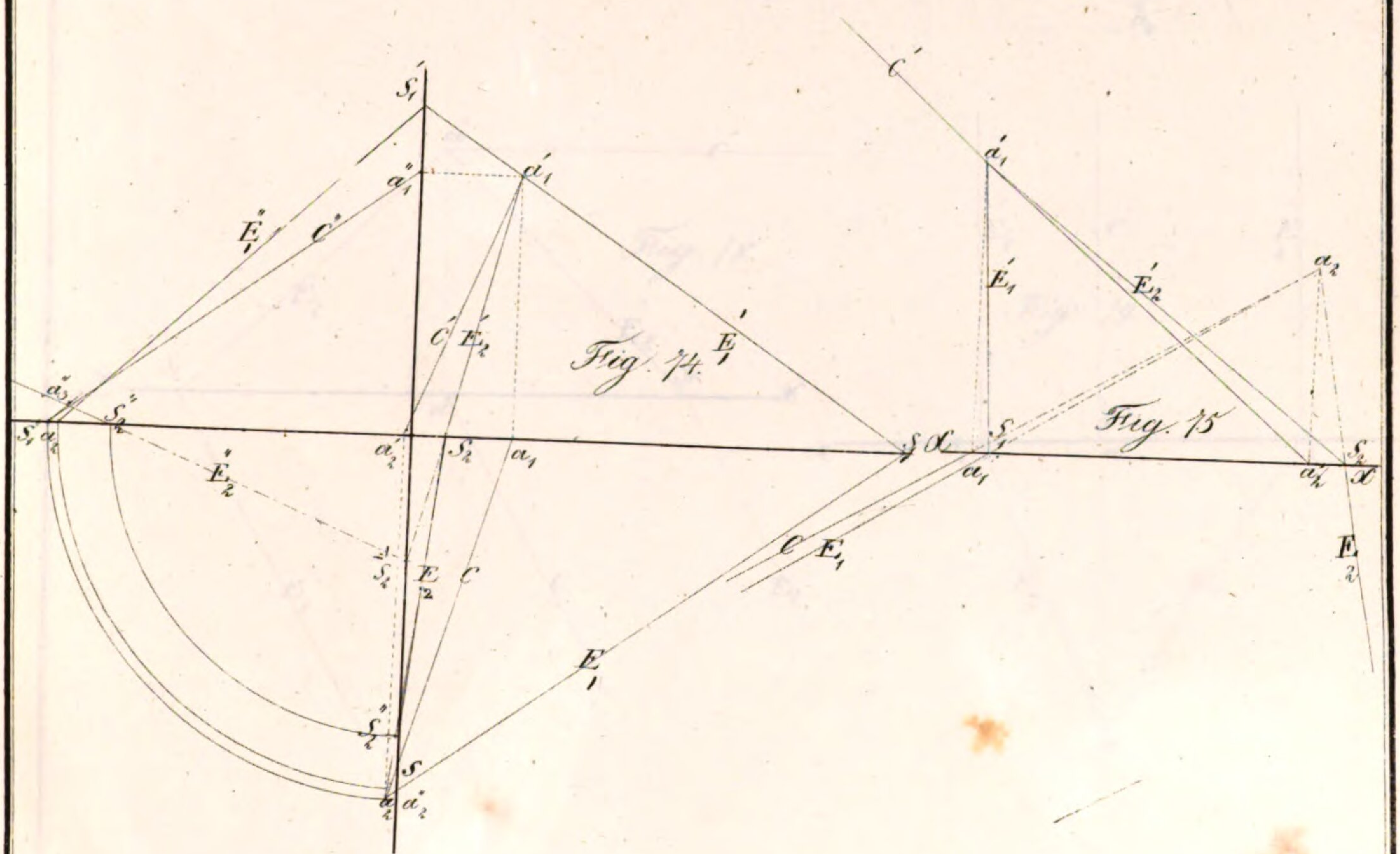
Fig. 70.

Fig. 71.

Lith: von Gottf: Schroegerle, jun.
gez: von Kühn


Fig. 72.


Fig. 73.


Fig. 74.
Fig. 75

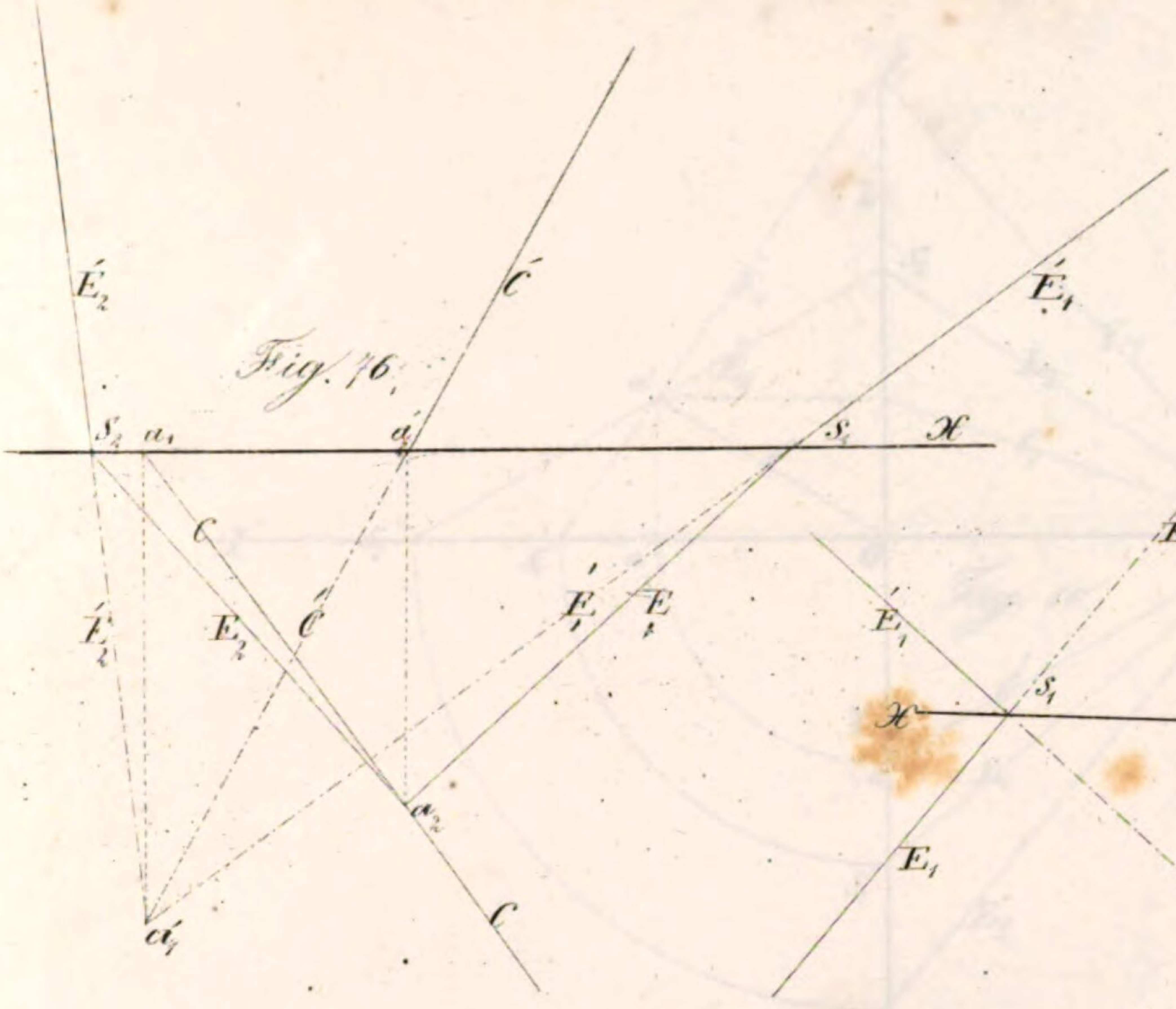


Fig. 76.

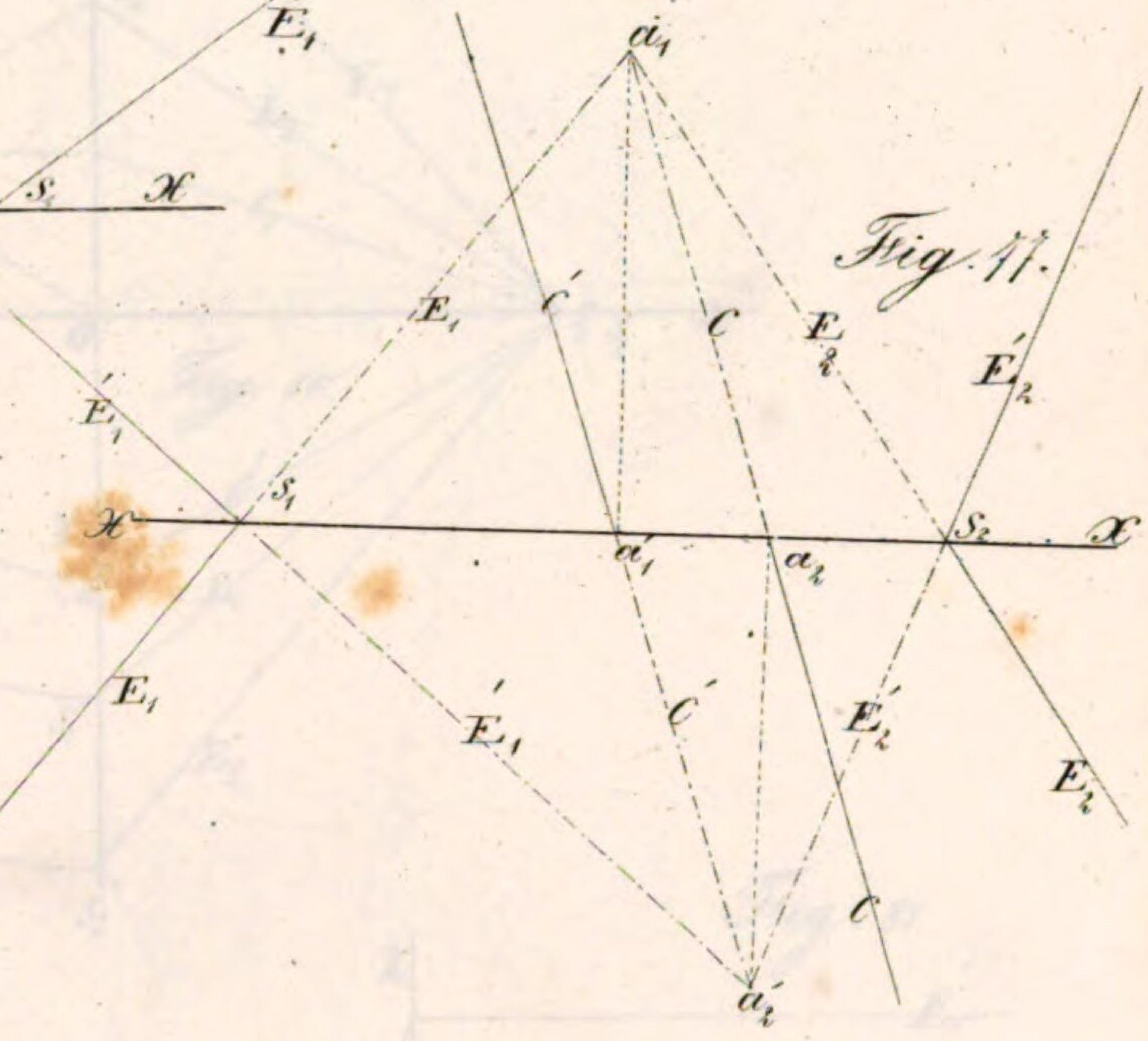


Fig. 77.

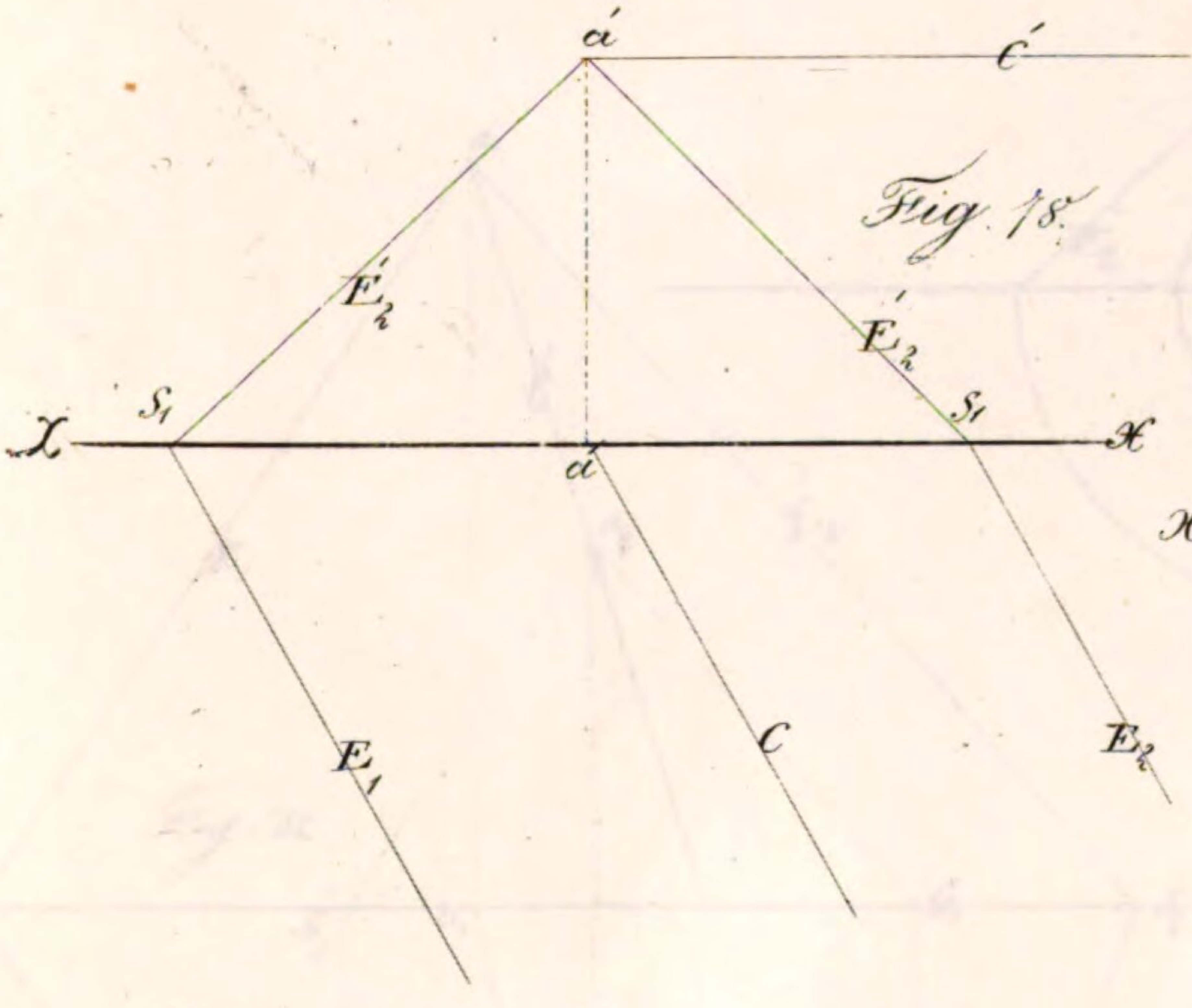


Fig. 78.

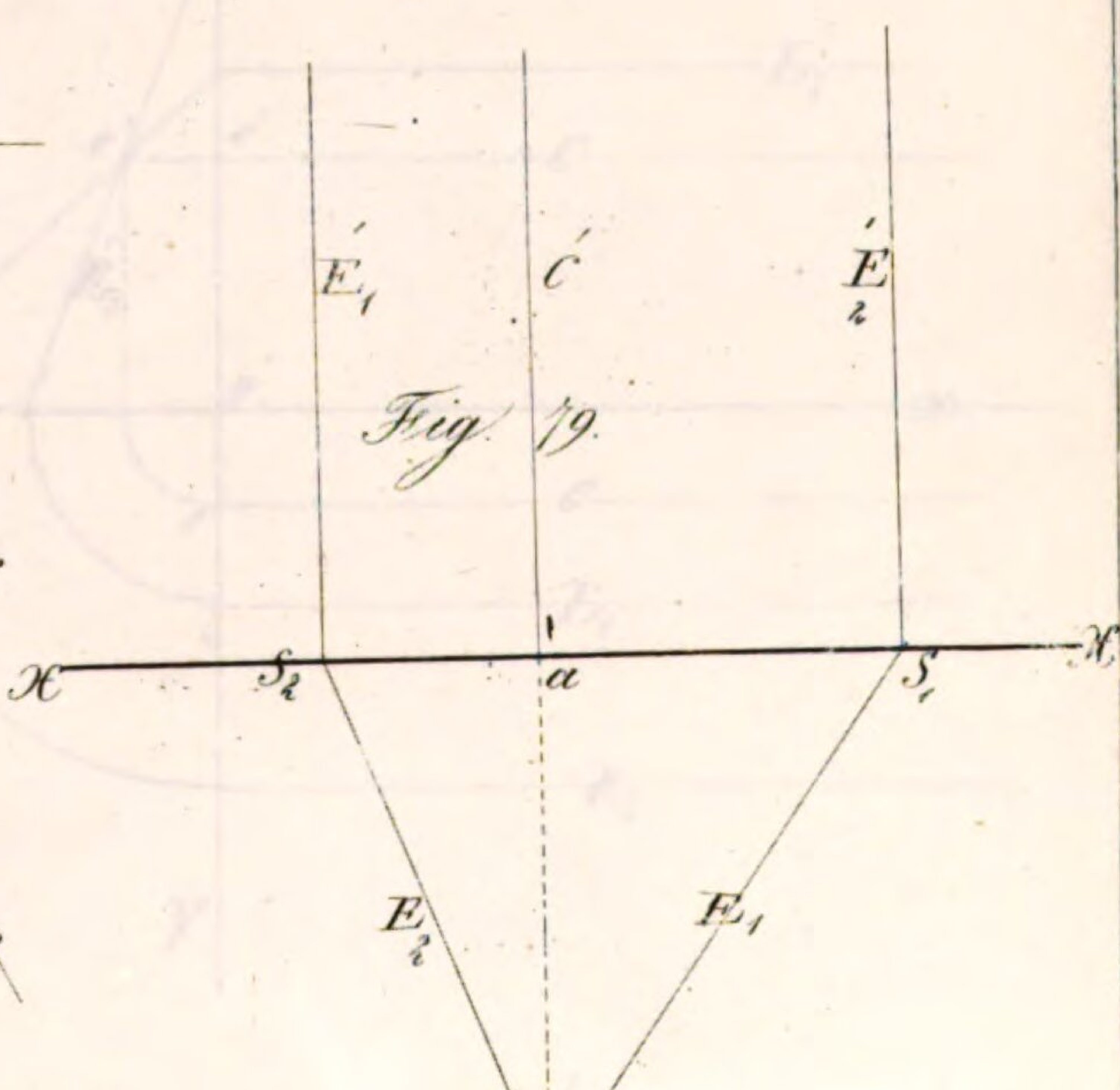


Fig. 79.

Lith. von Gott. Schroegerle.

gez. v. Kuhn.

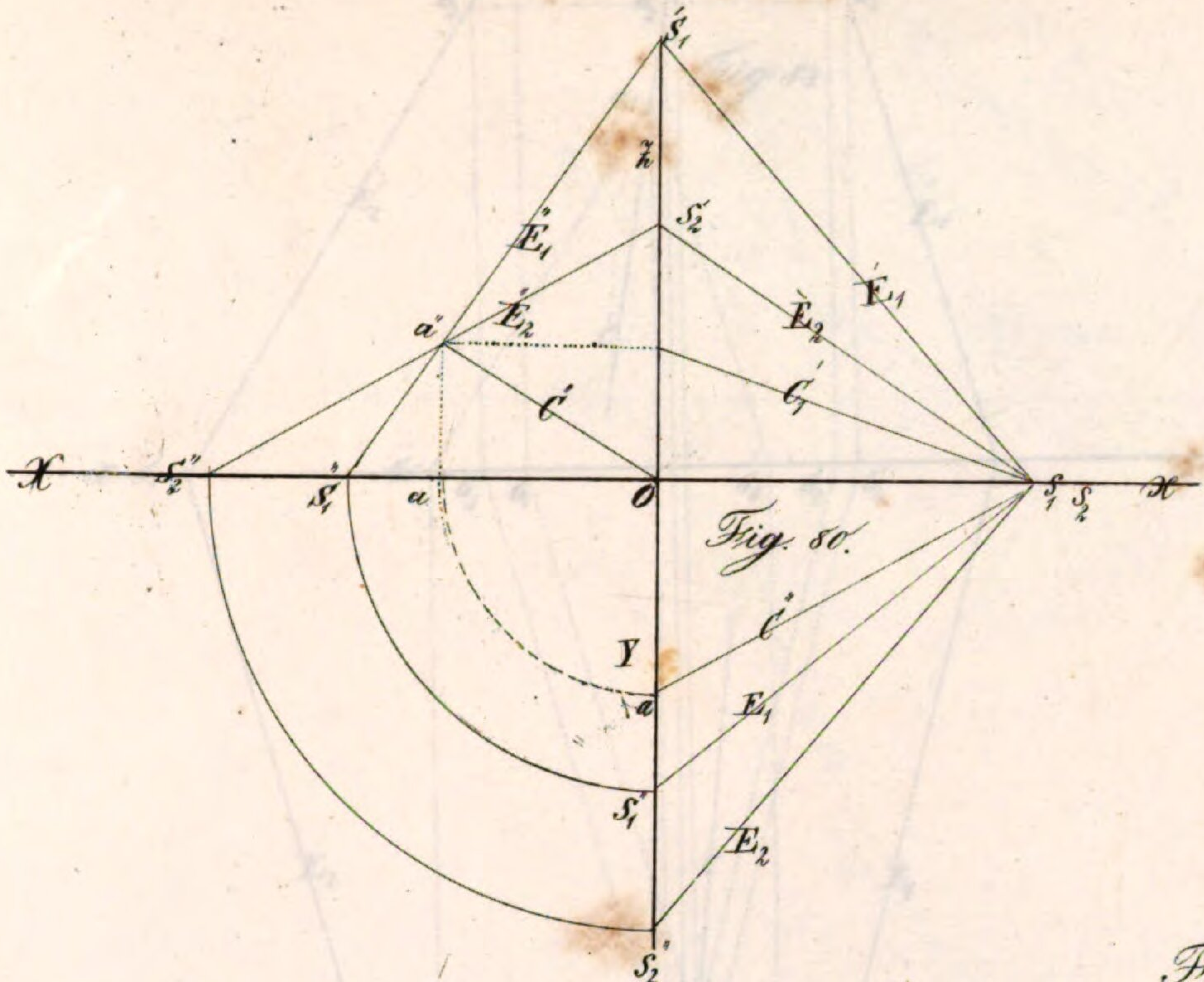


Fig. 80.

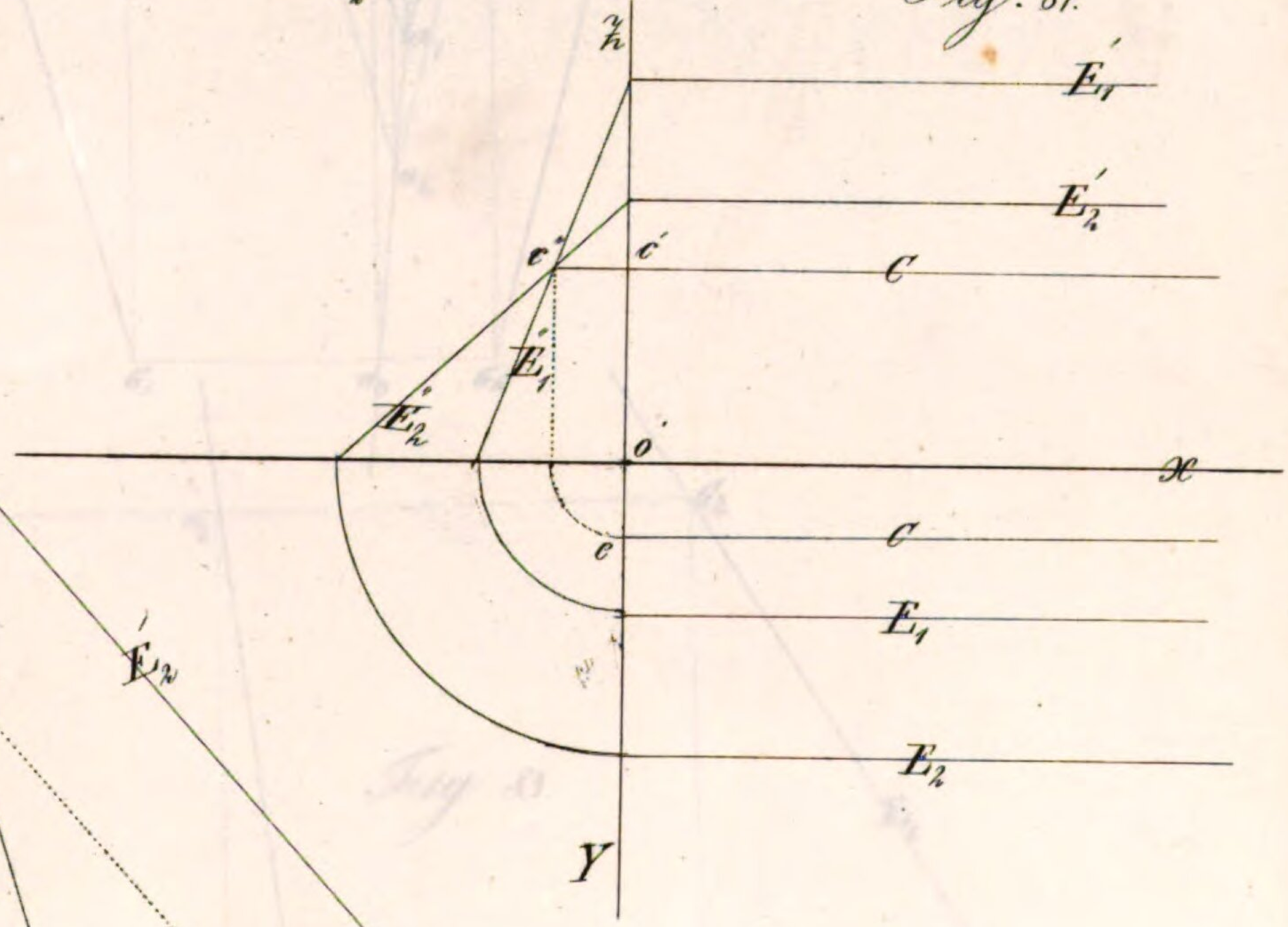


Fig. 81.

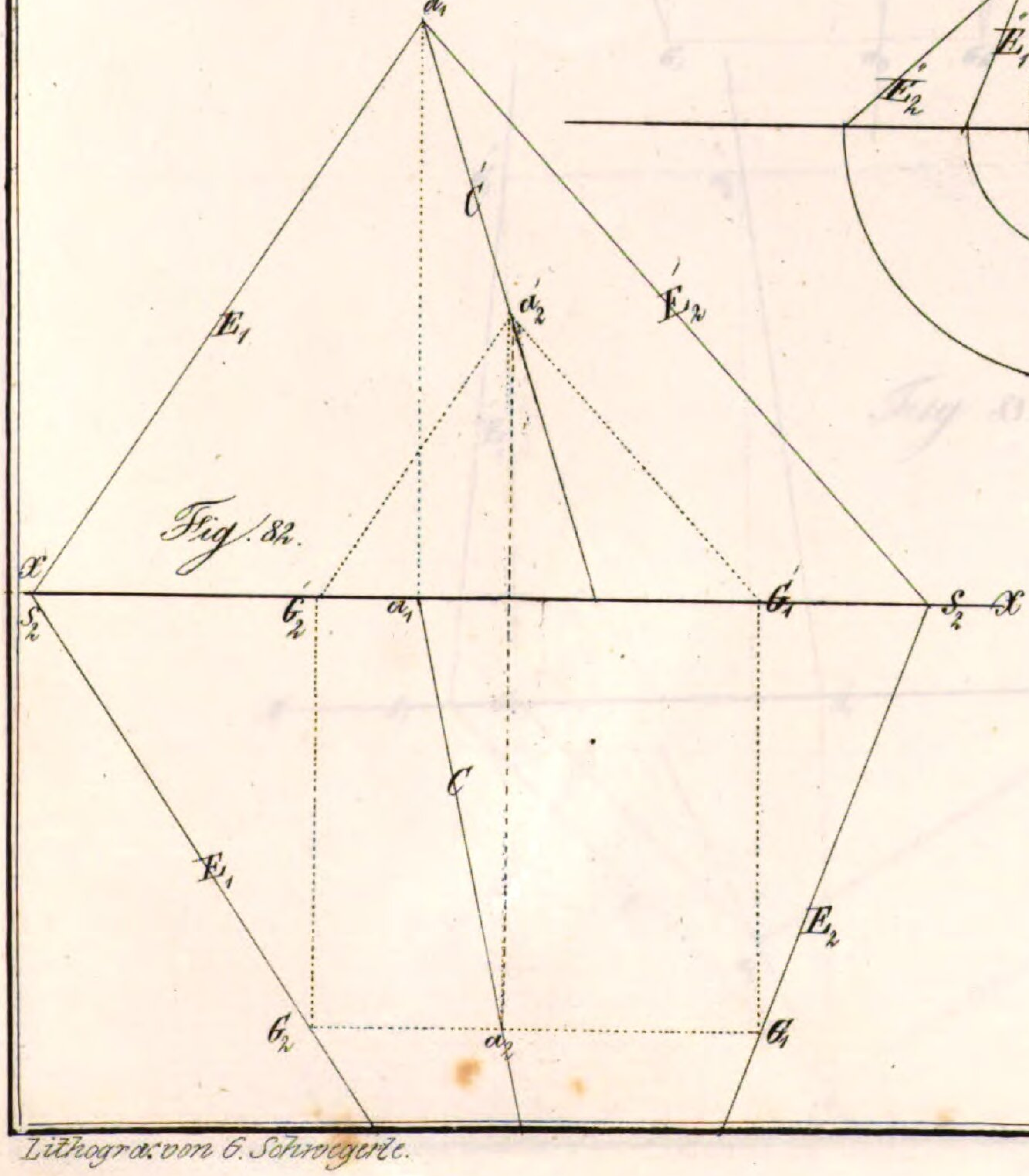


Fig. 82.

Lithogr. v. von G. Schwegerle.

gez. von p. Kuhn.

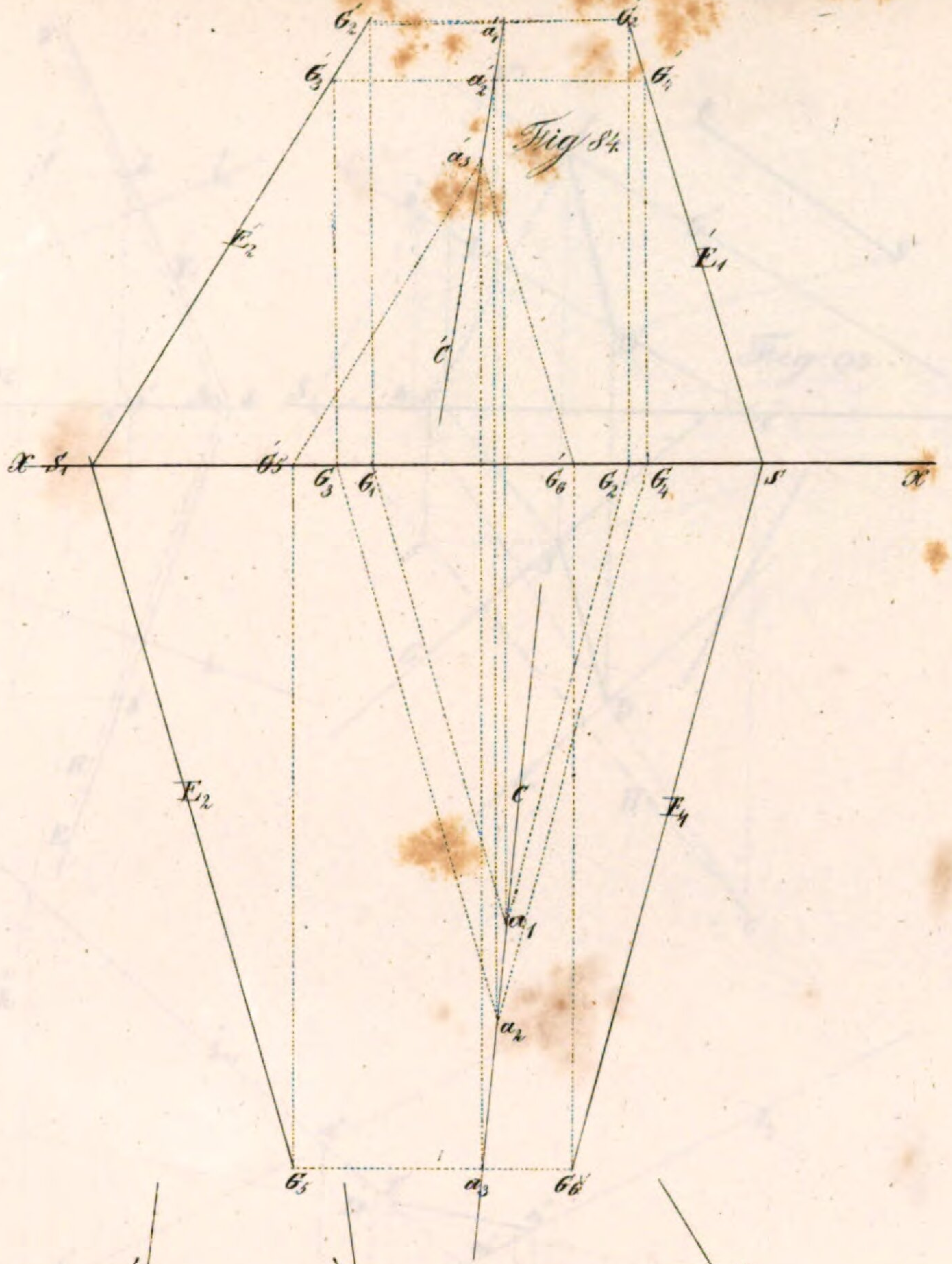


Fig. 84.

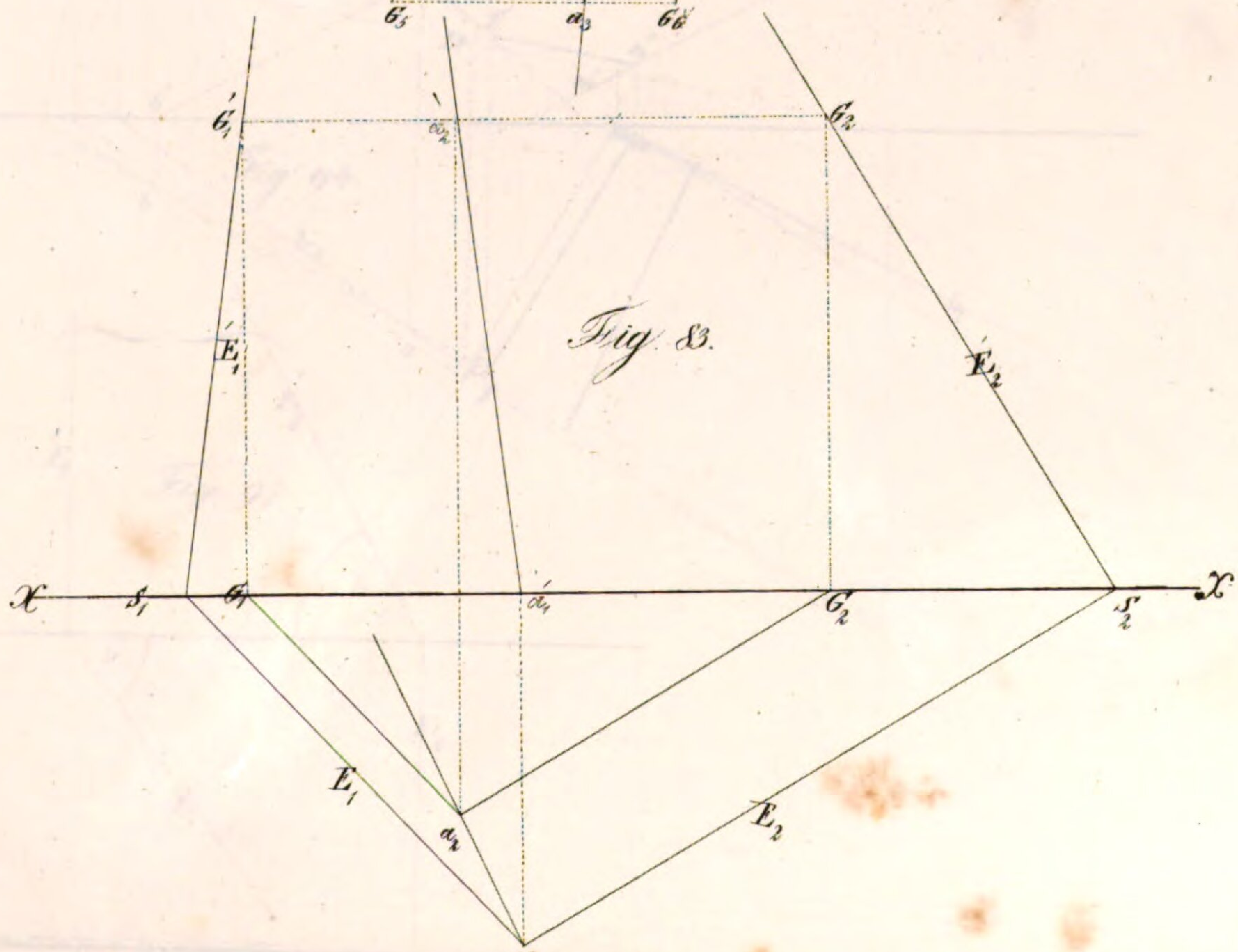
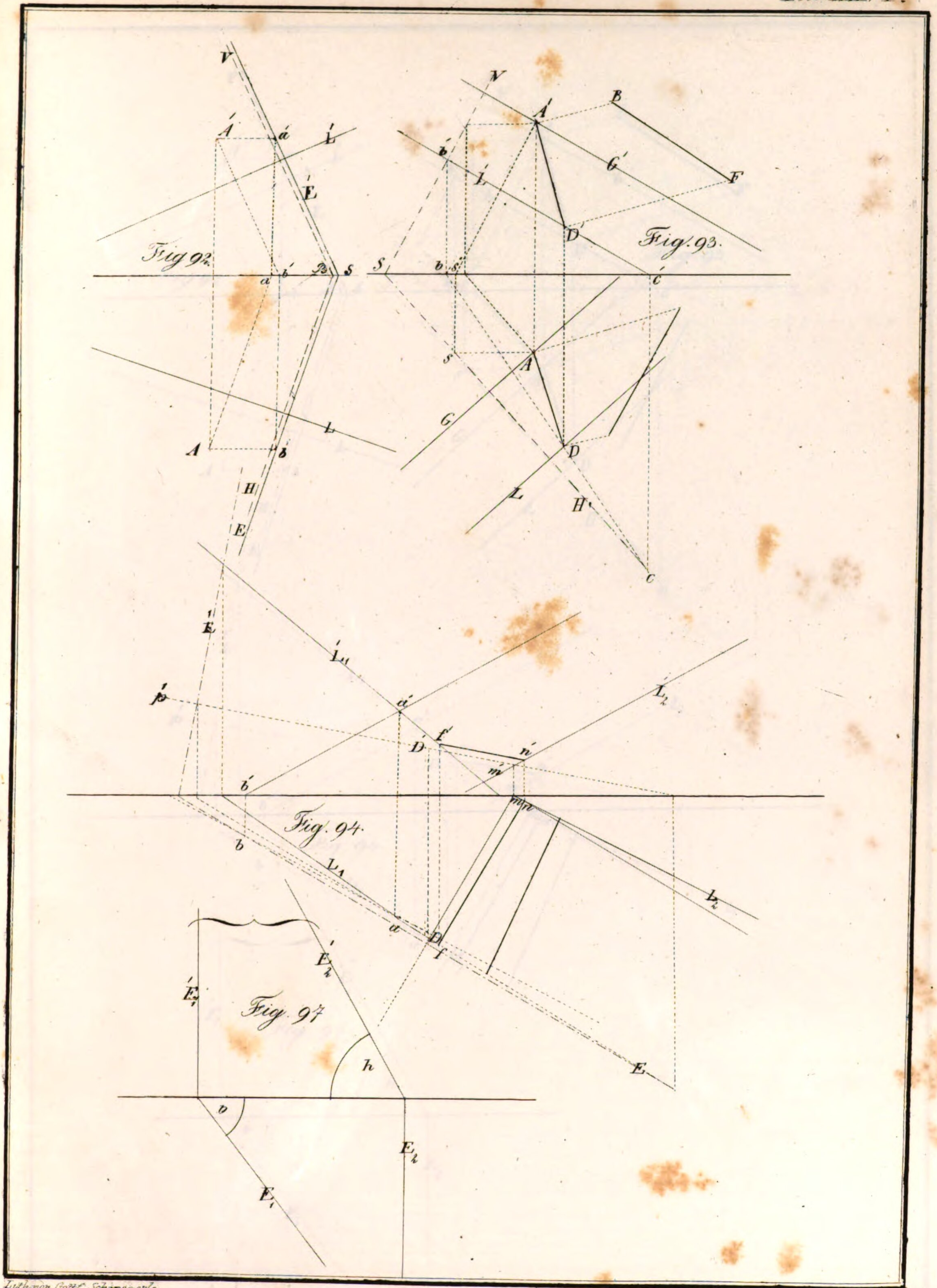
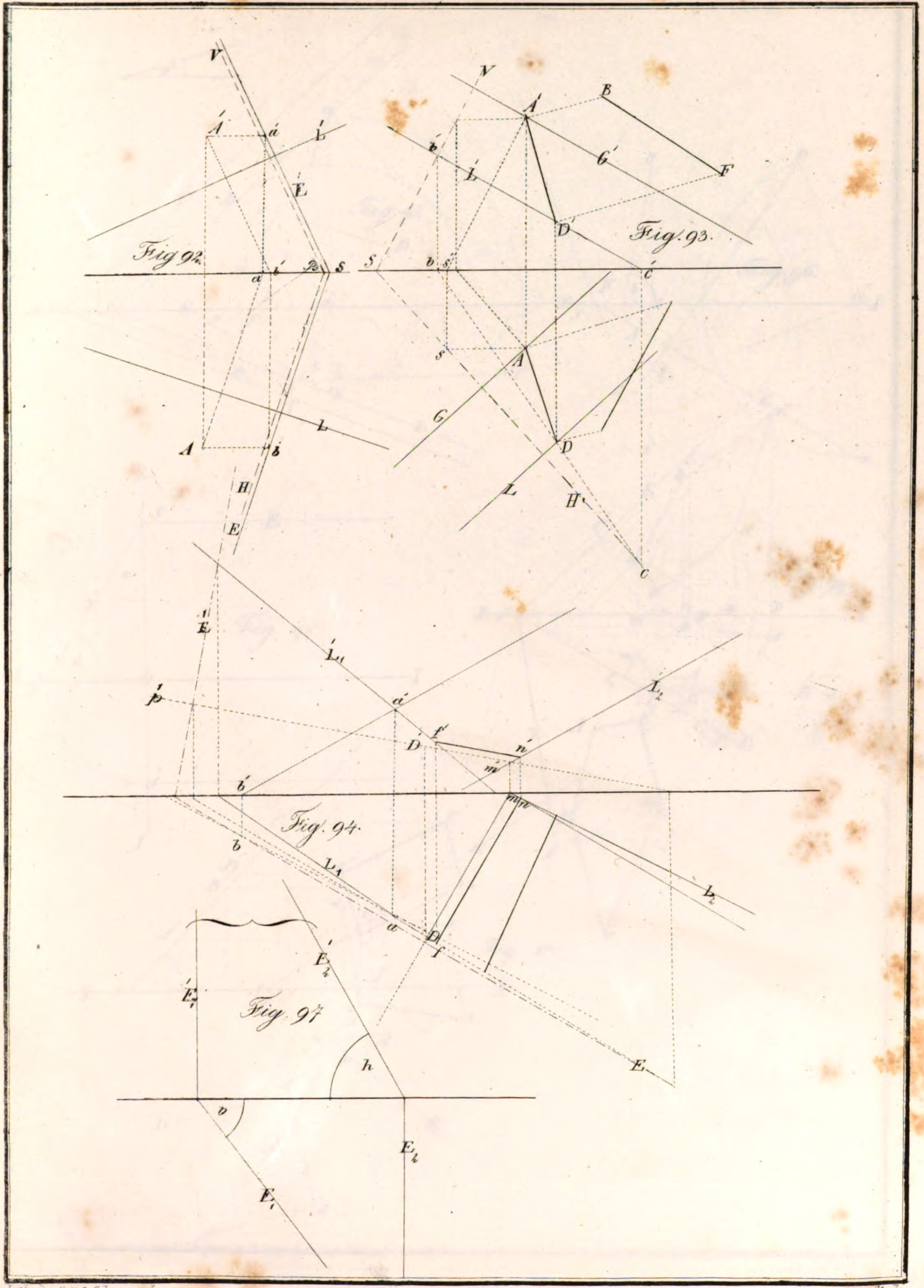


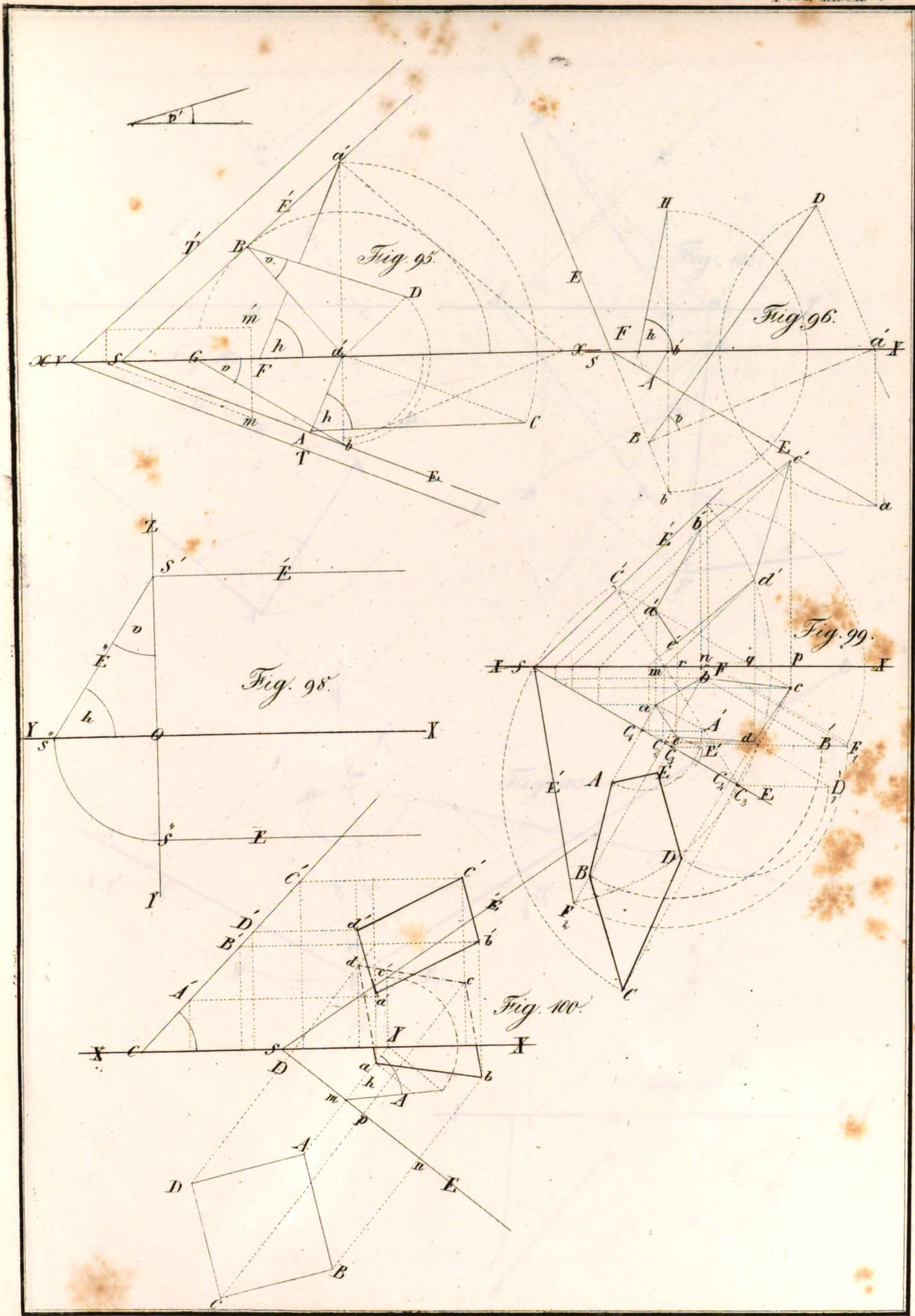
Fig. 83.



Lith. von Gottf. Schroegerle.

gez. v. Kuhn.


Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 97.



gez. v. Kühn.

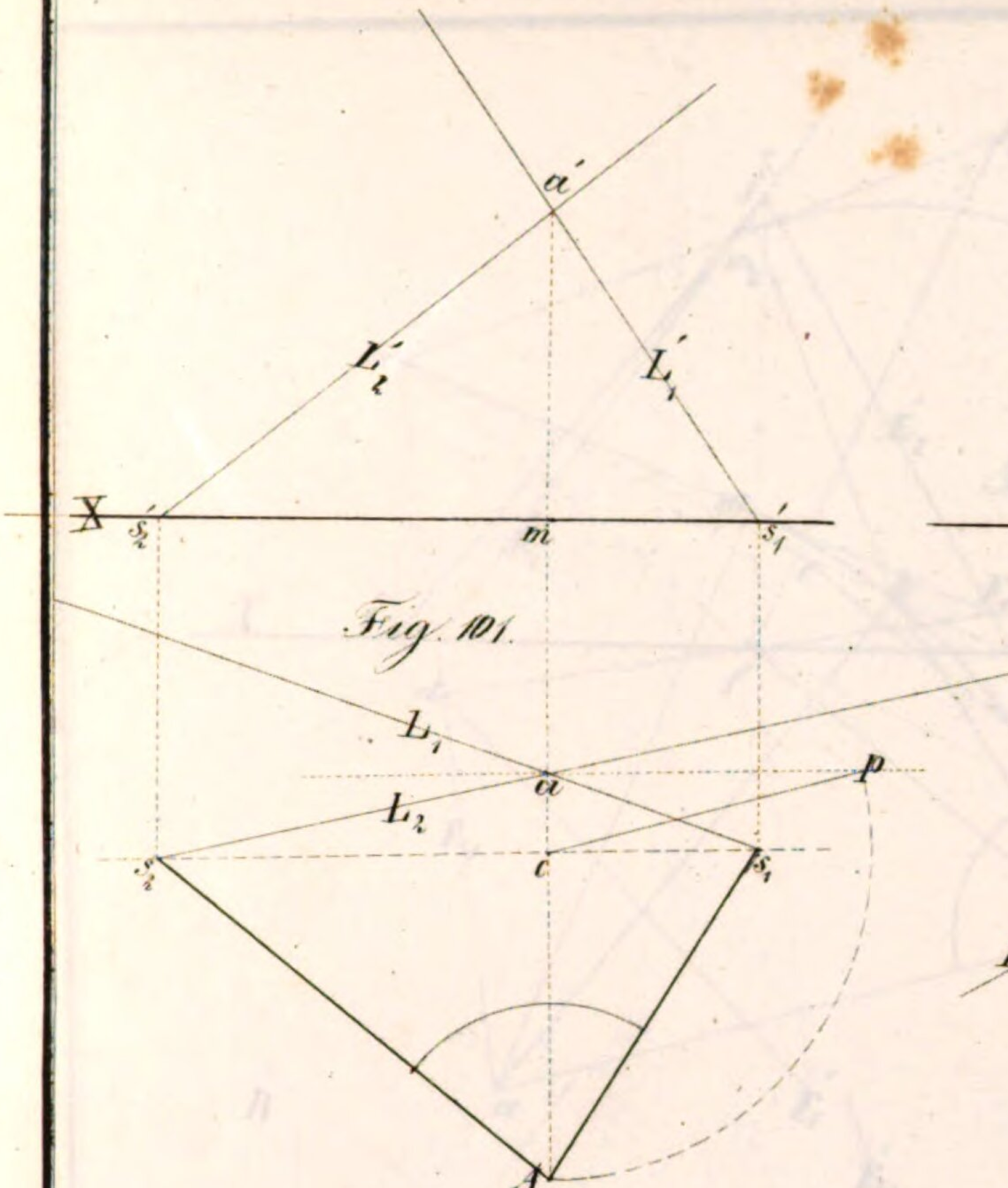


Fig. 101.

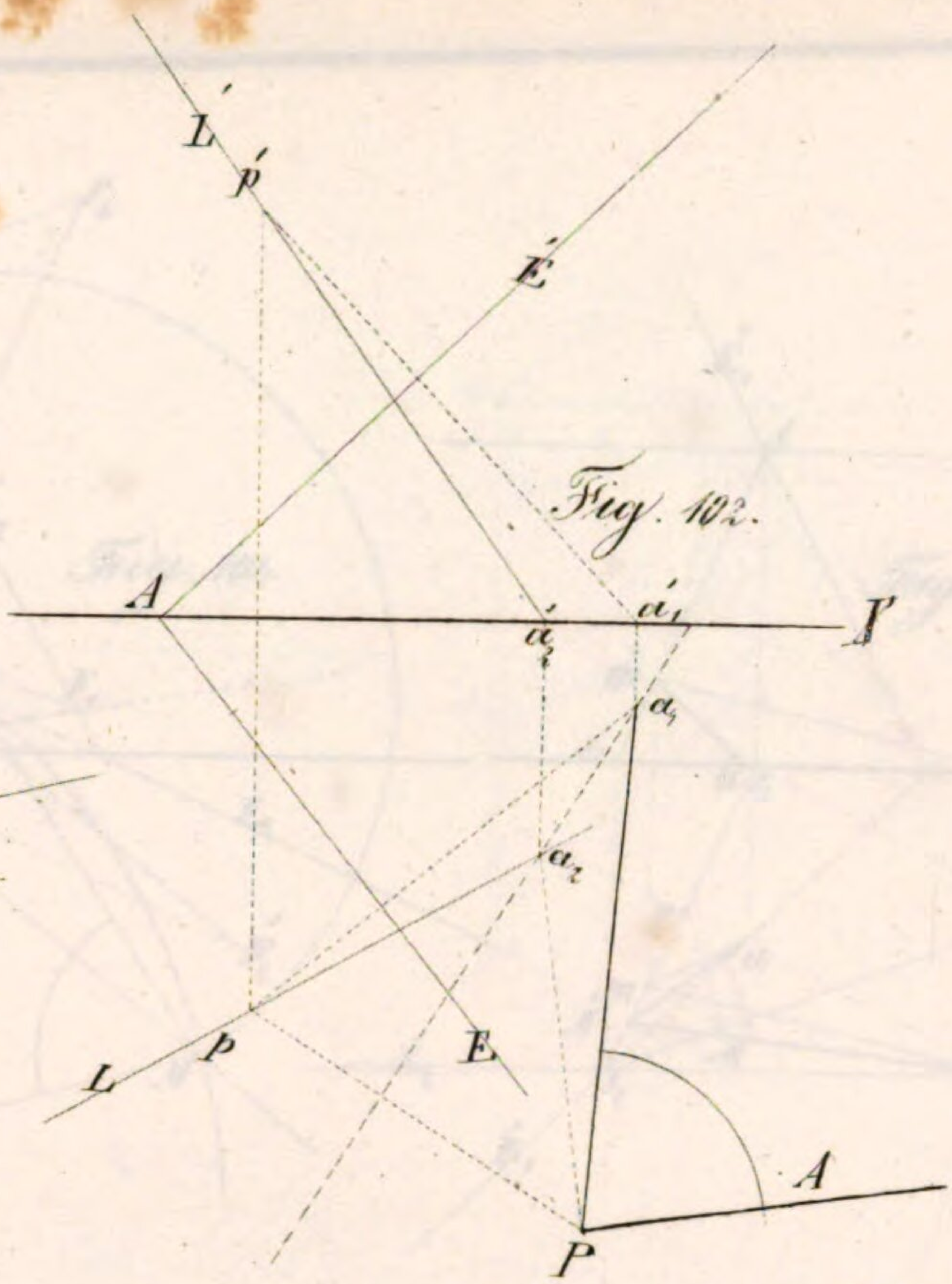


Fig. 102.

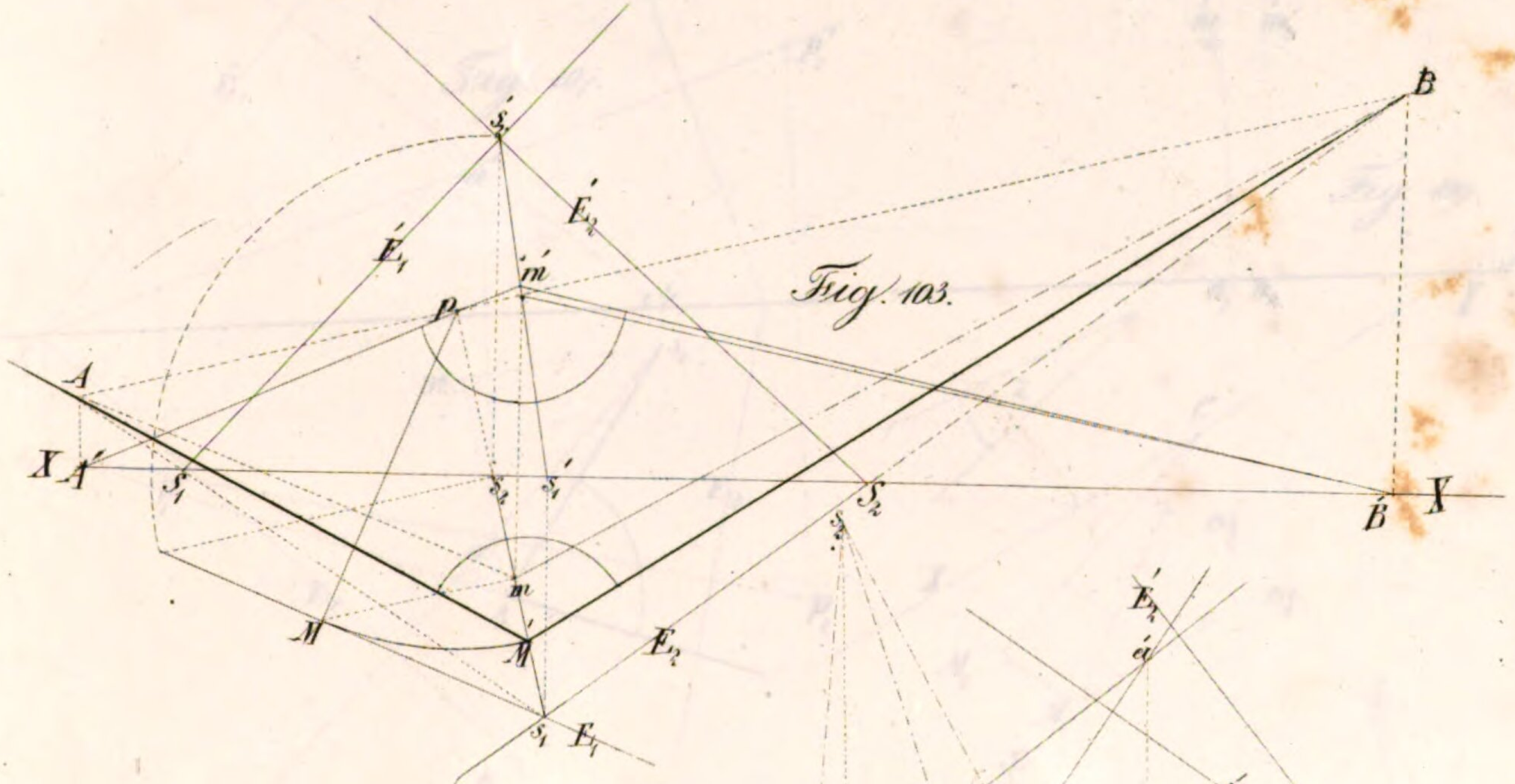


Fig. 103.

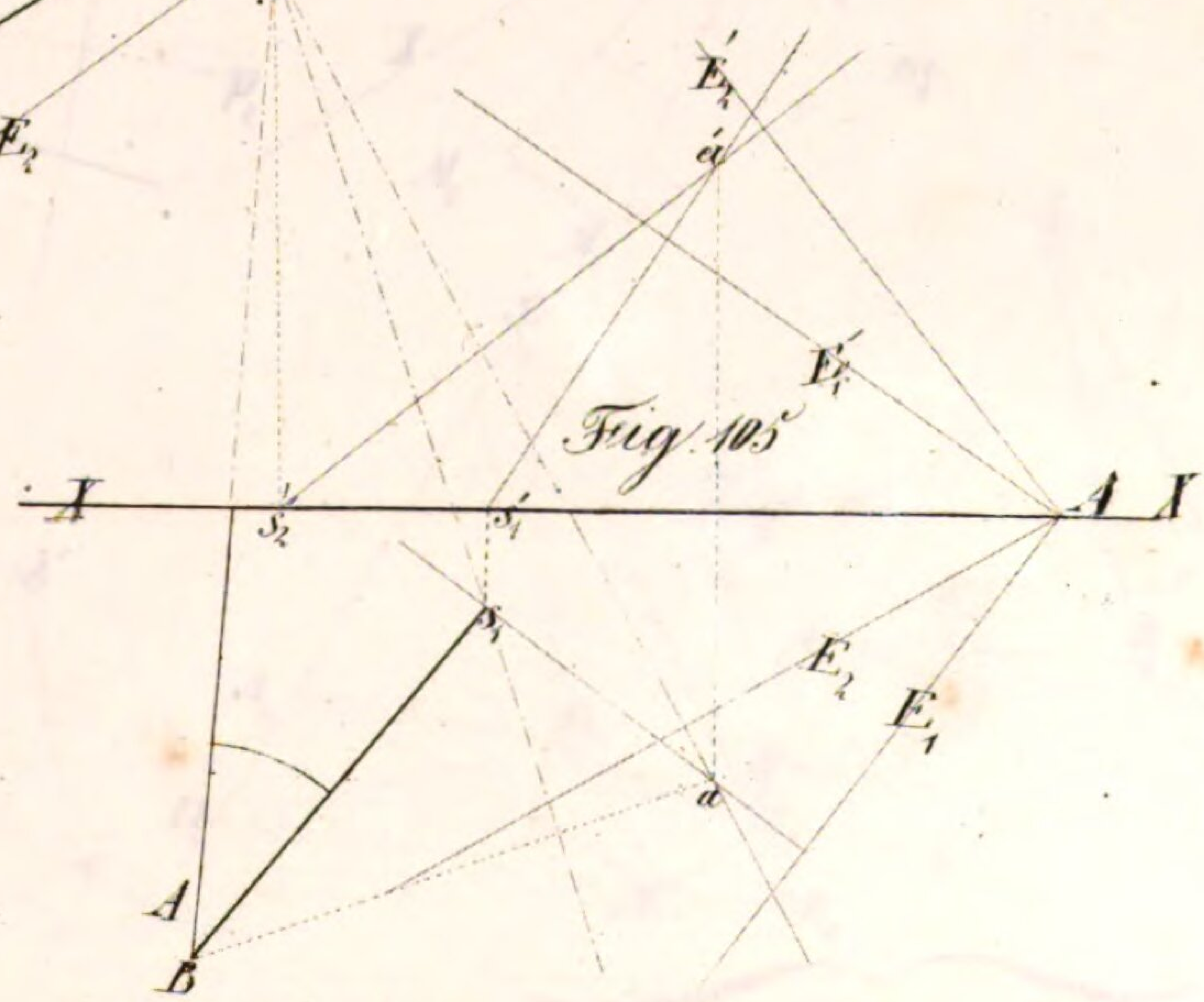
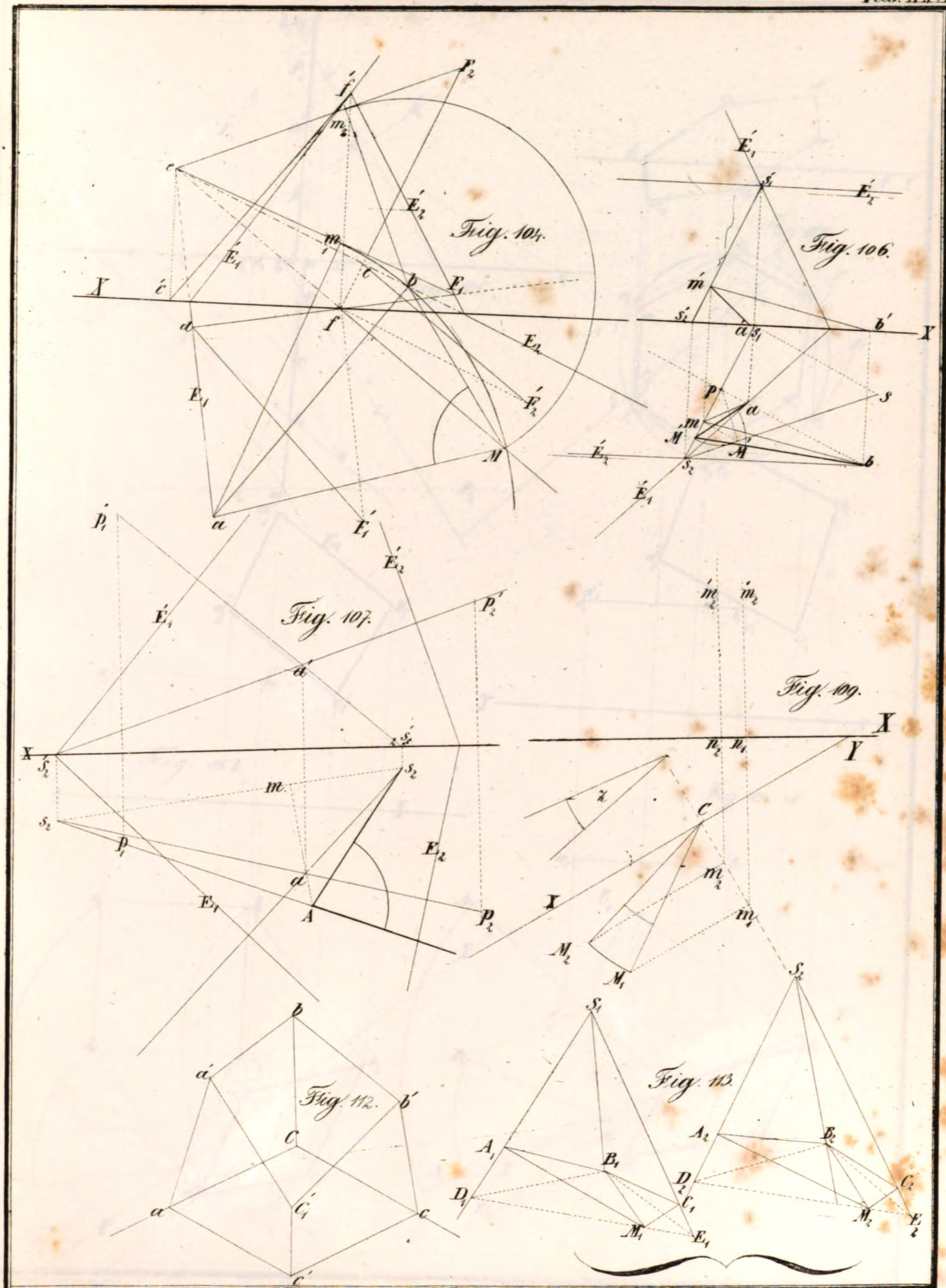
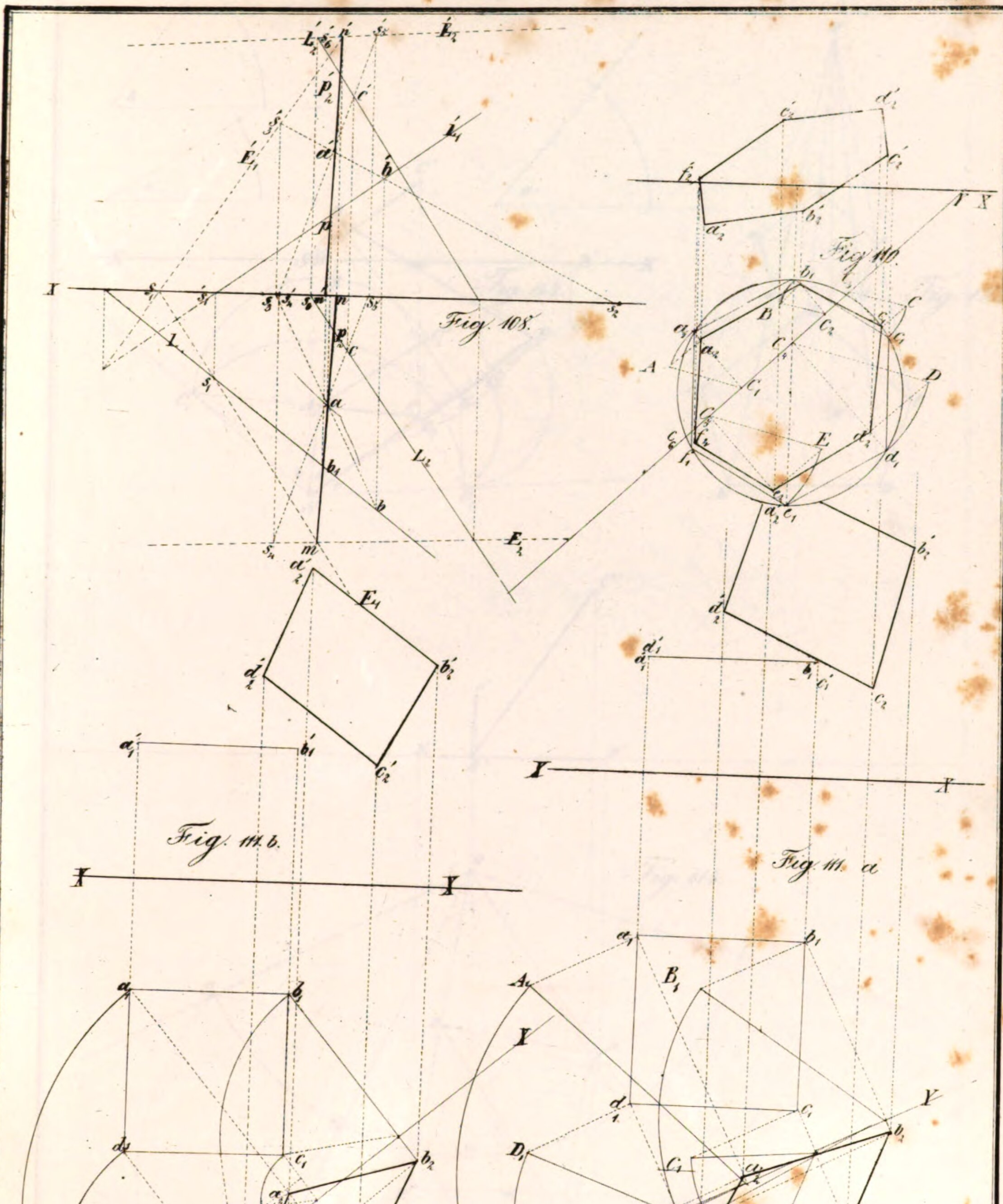


Fig. 105.



Lith: von Gottf. Schroegerle. Gez. v Kuhn.


Fig. 108.
Fig. 110.
Fig. 111. b.
Fig. 111. a

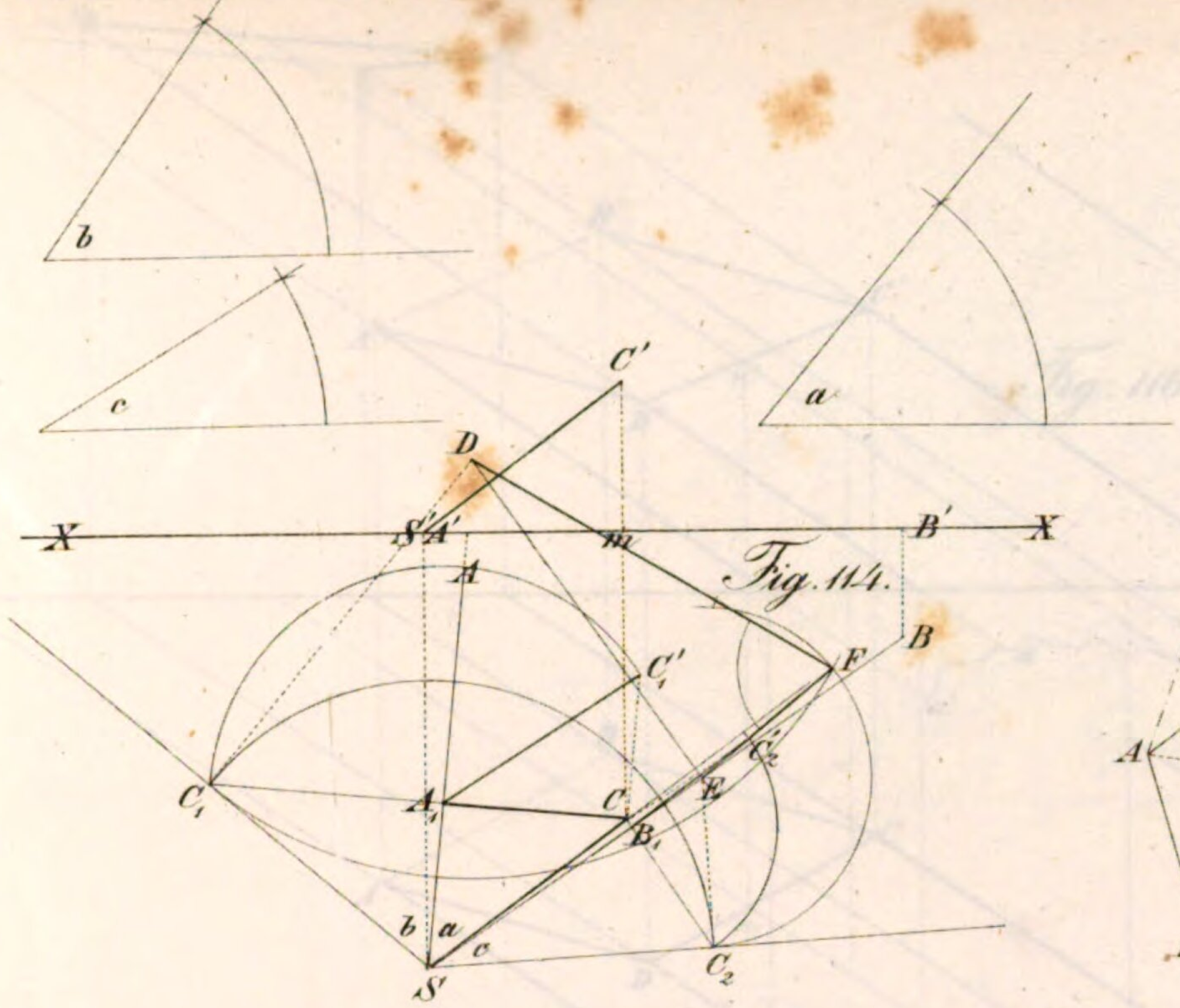


Fig. 114.

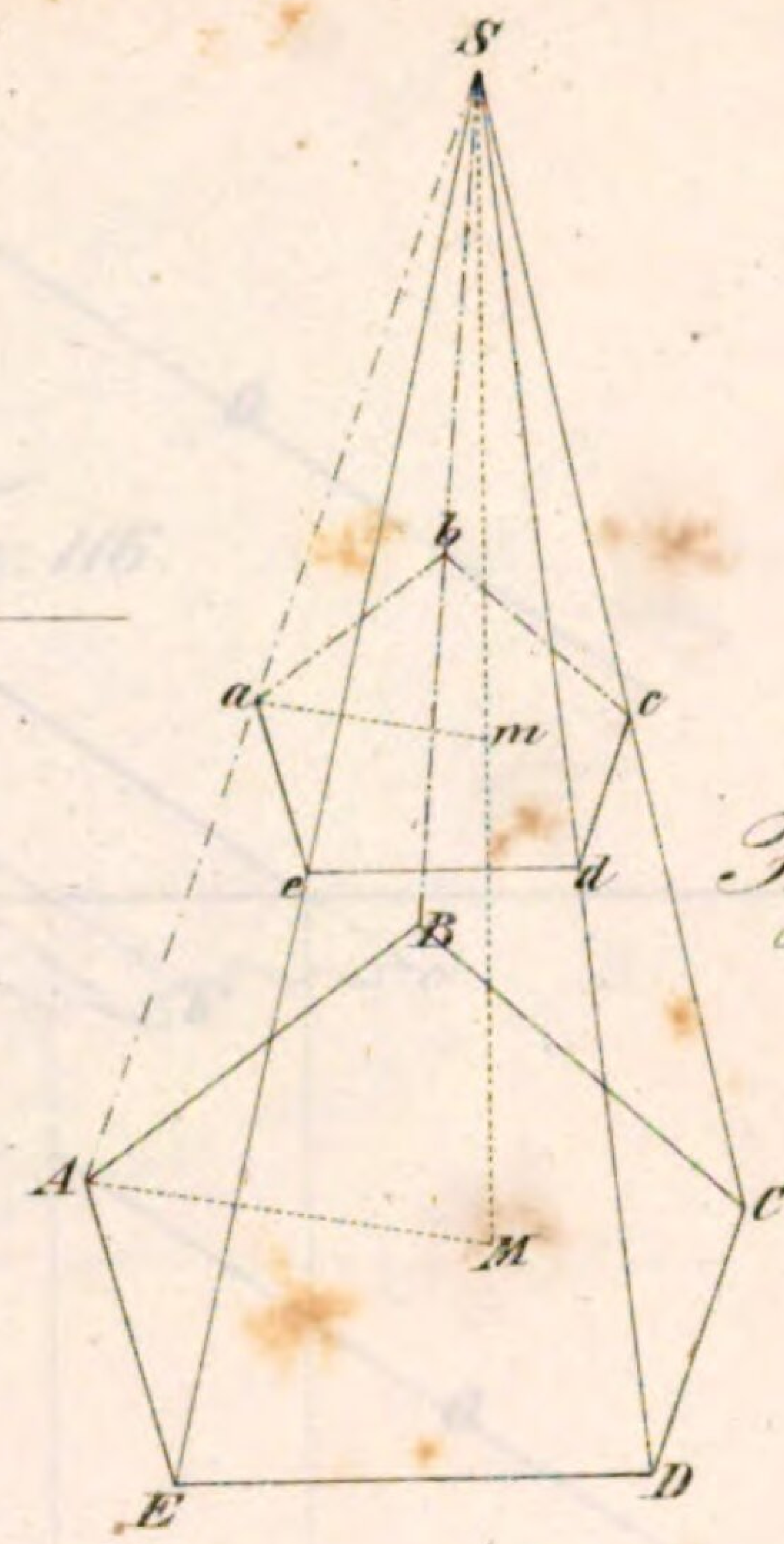


Fig. 123.

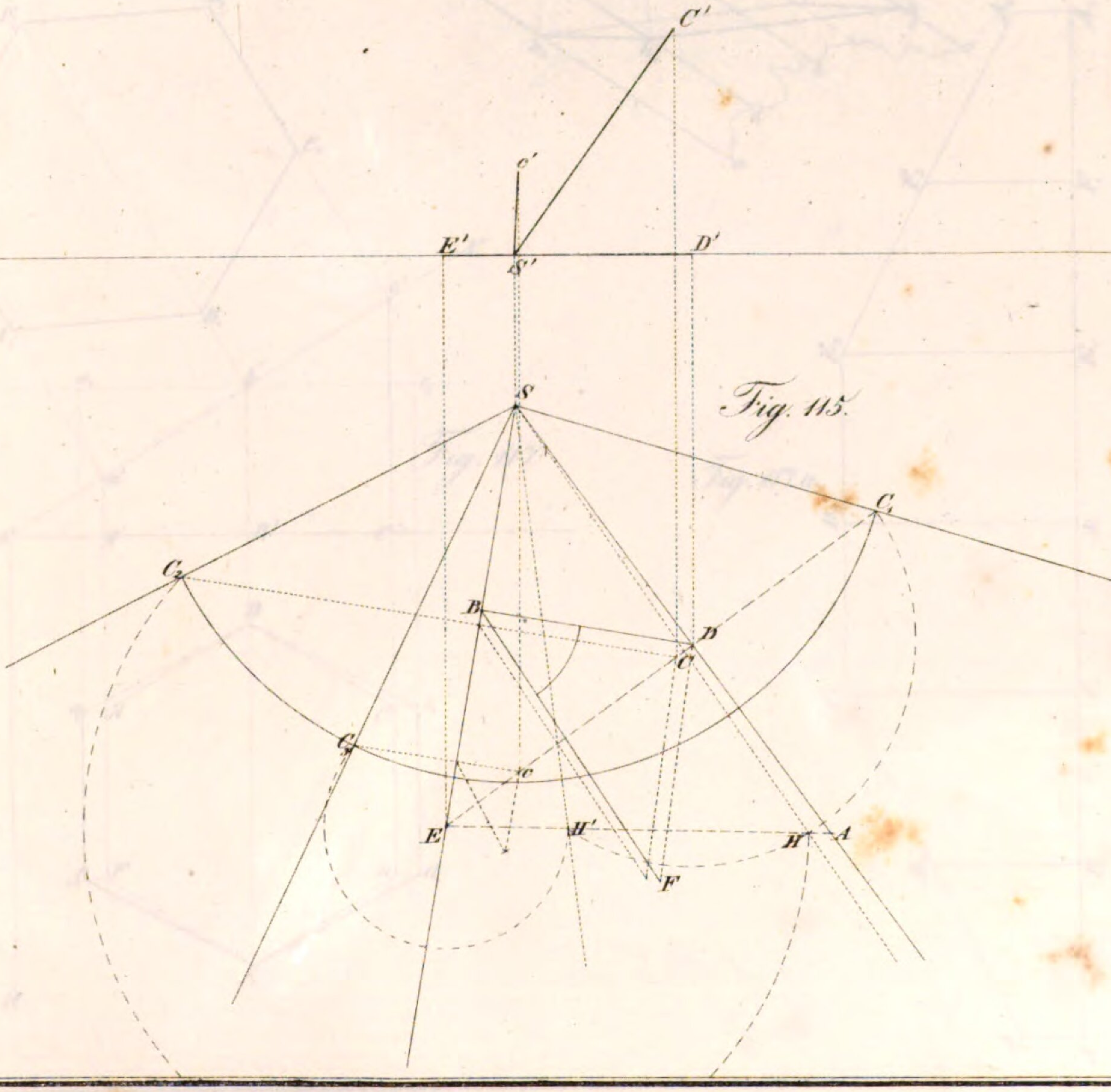
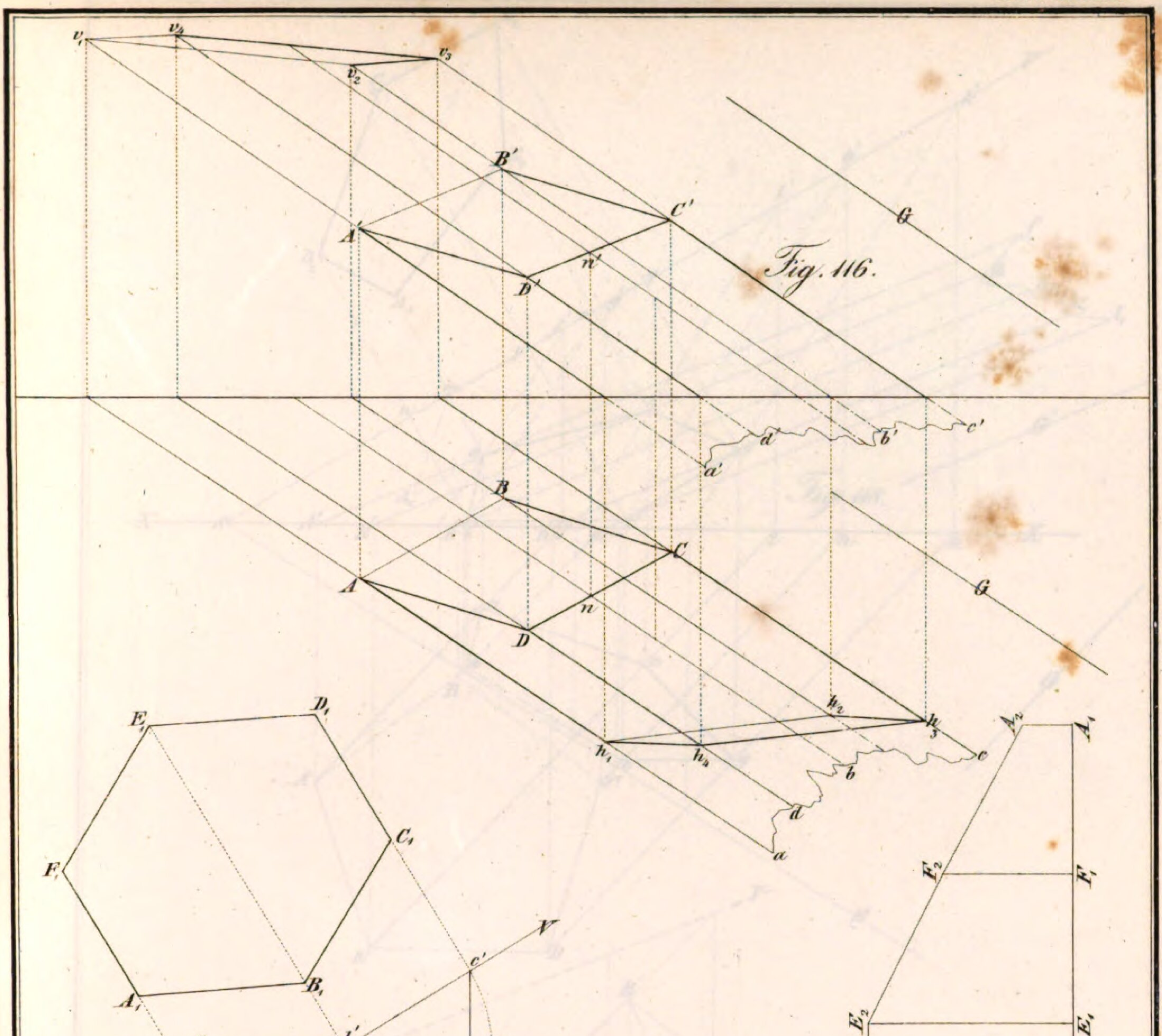


Fig. 115.



gez. v. Kuhn.

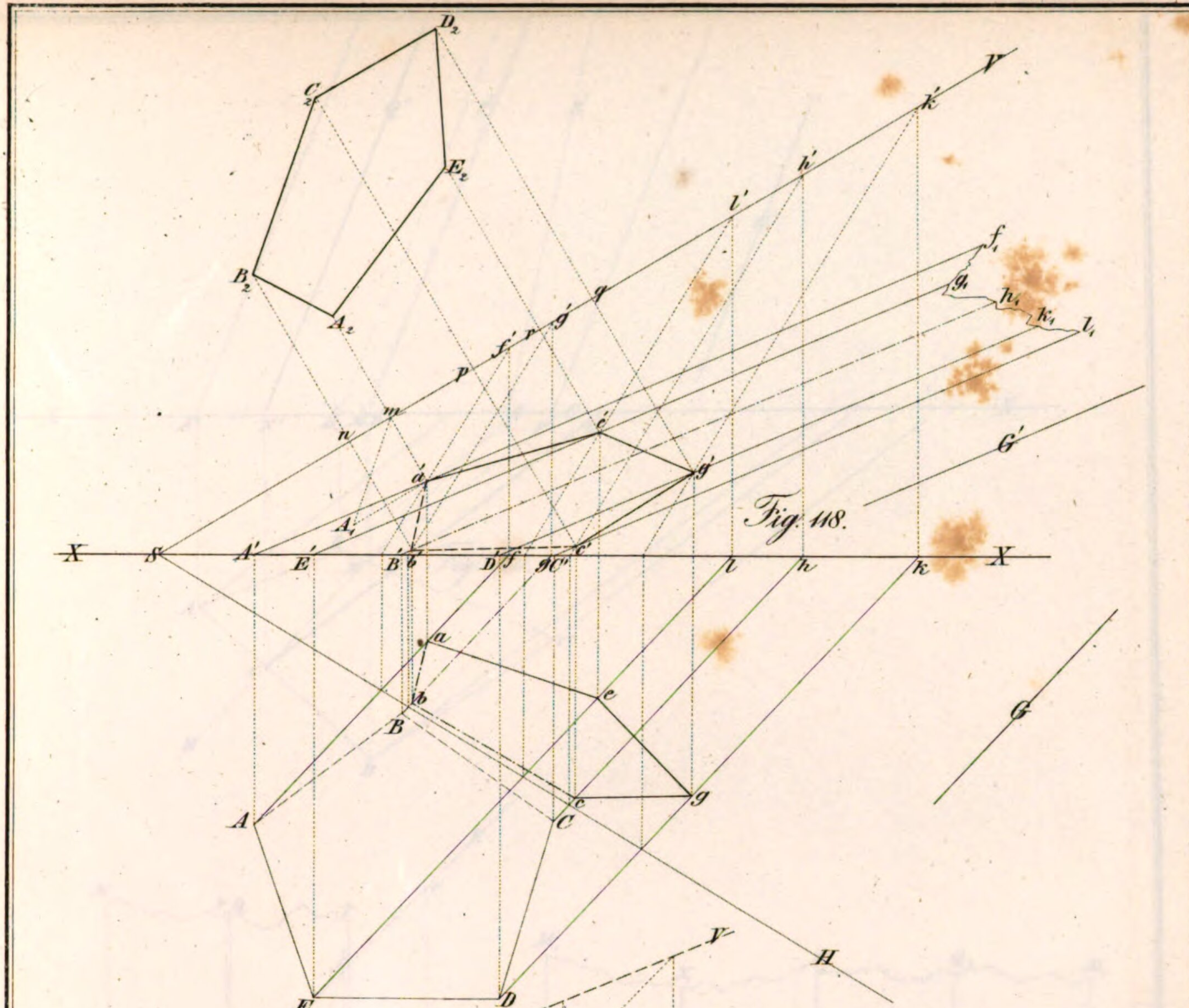


Fig. 118.

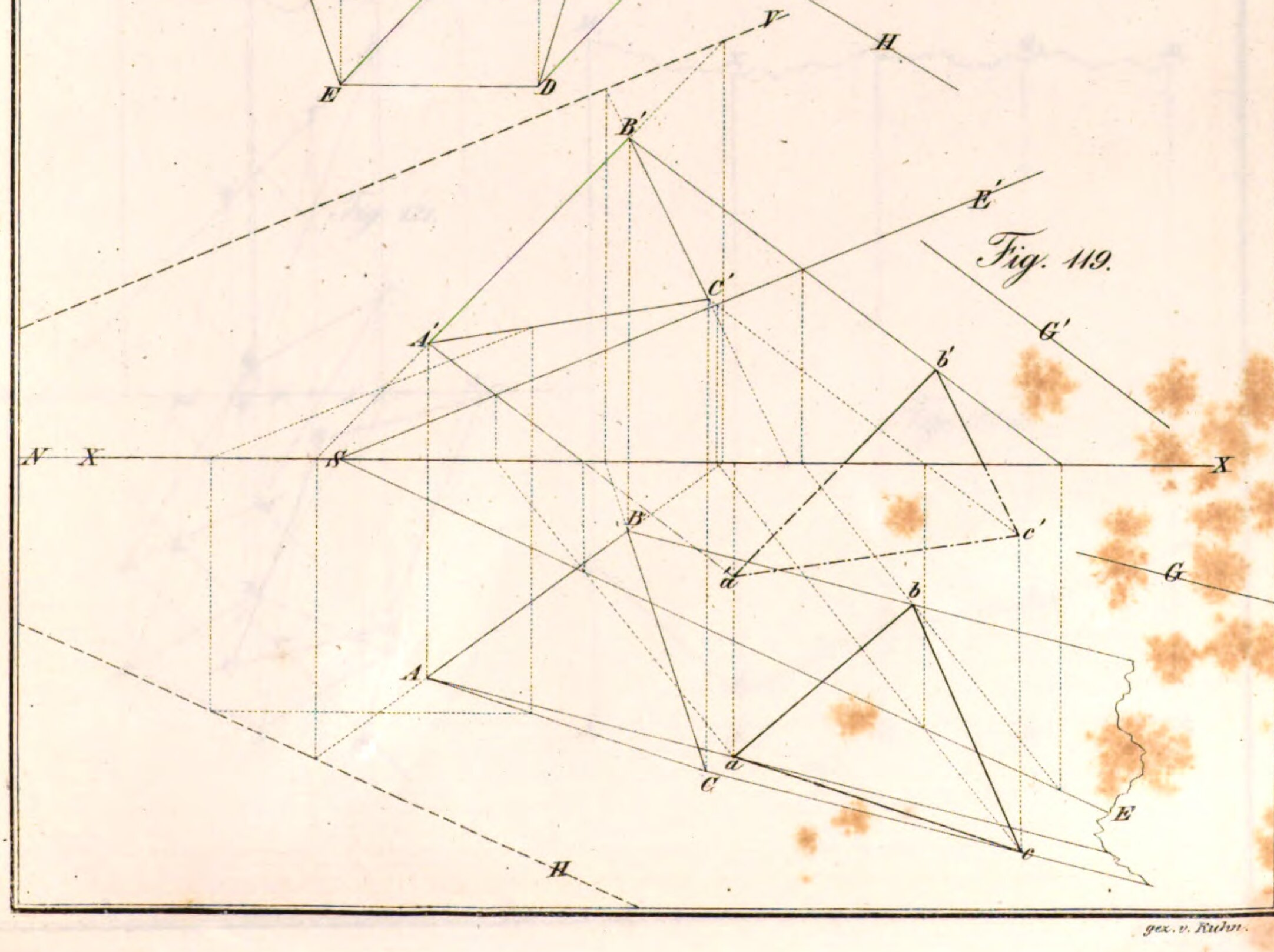


Fig. 119.

gez. v. Kuhn.

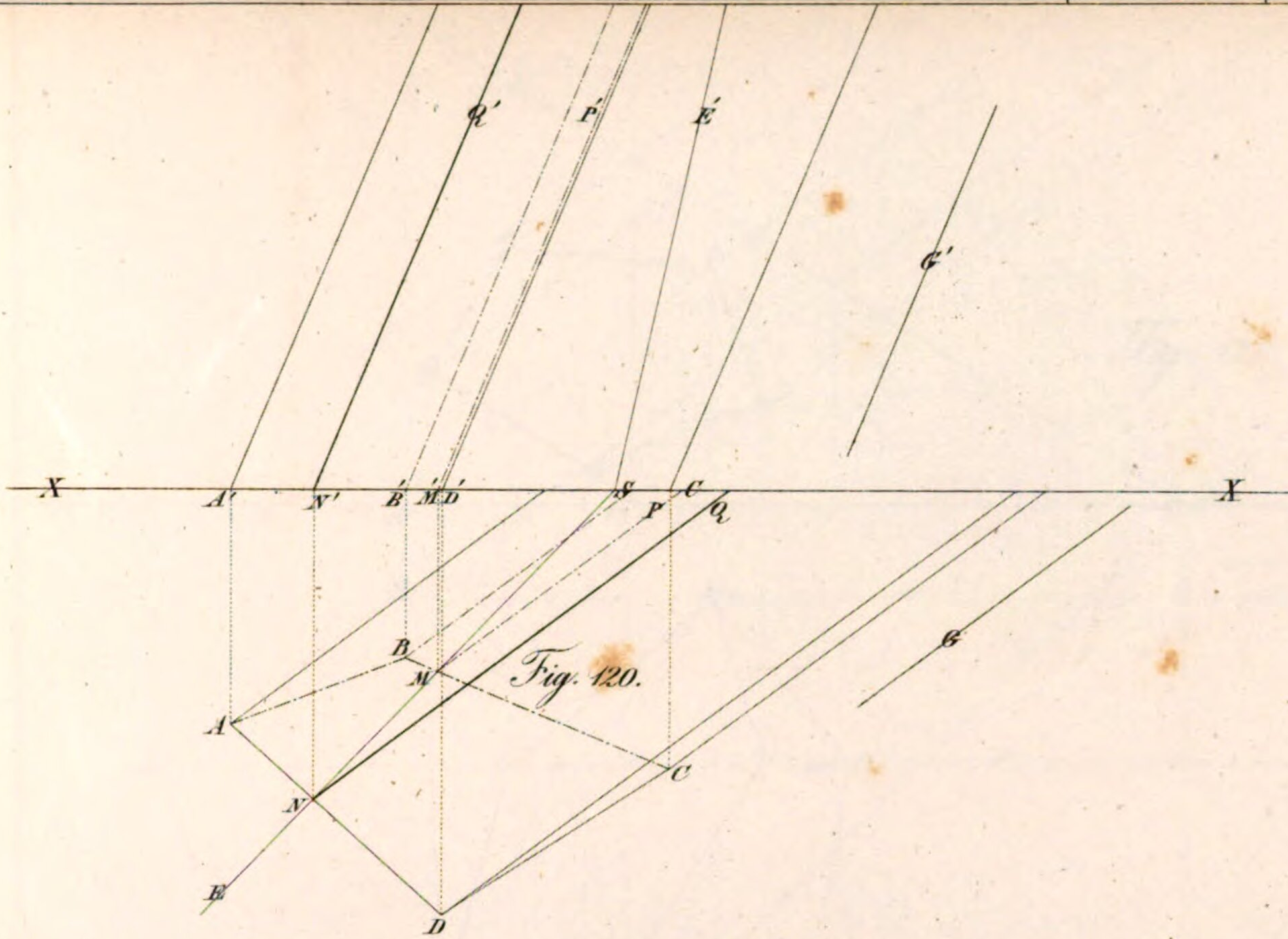


Fig. 120.

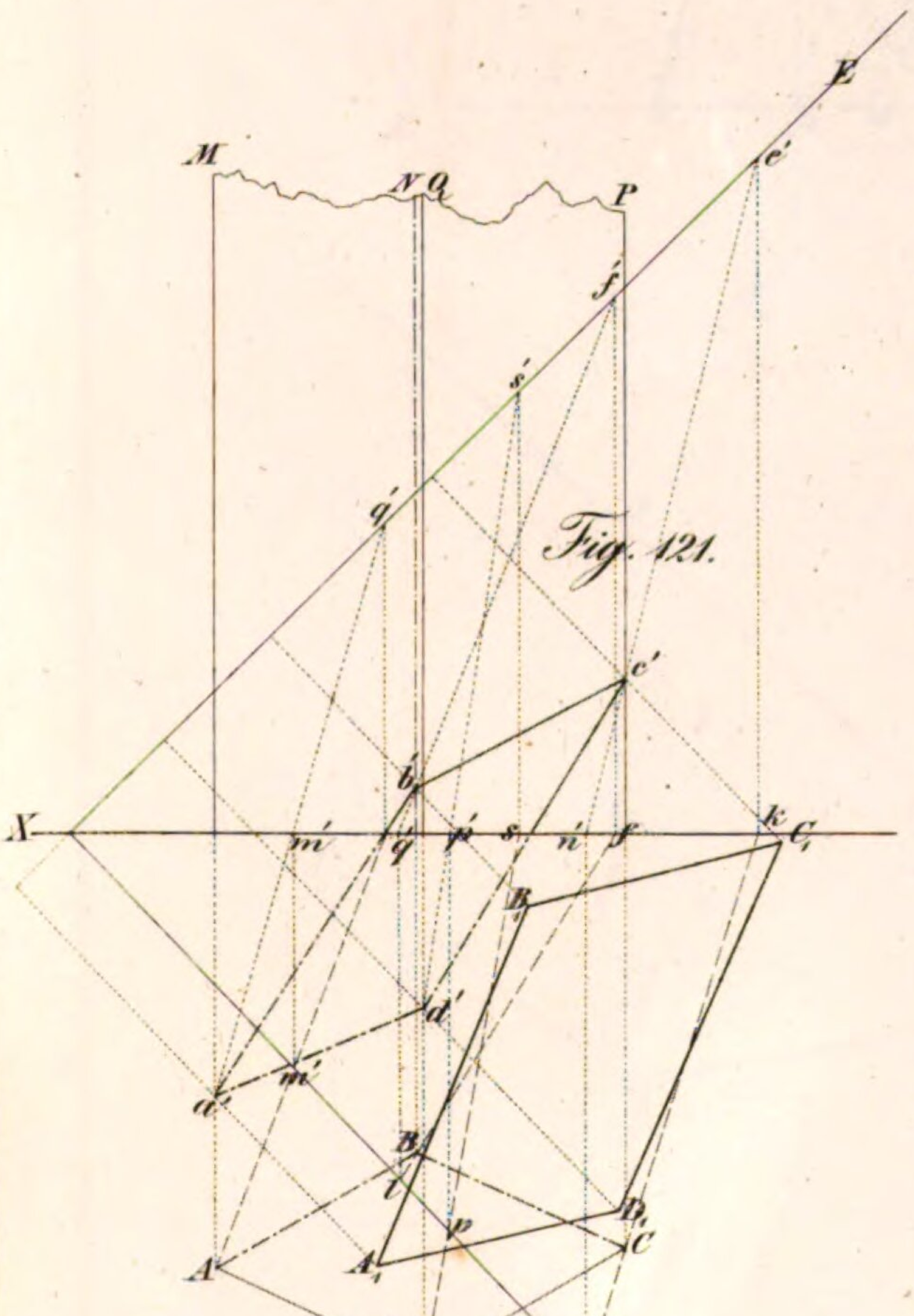


Fig. 121.

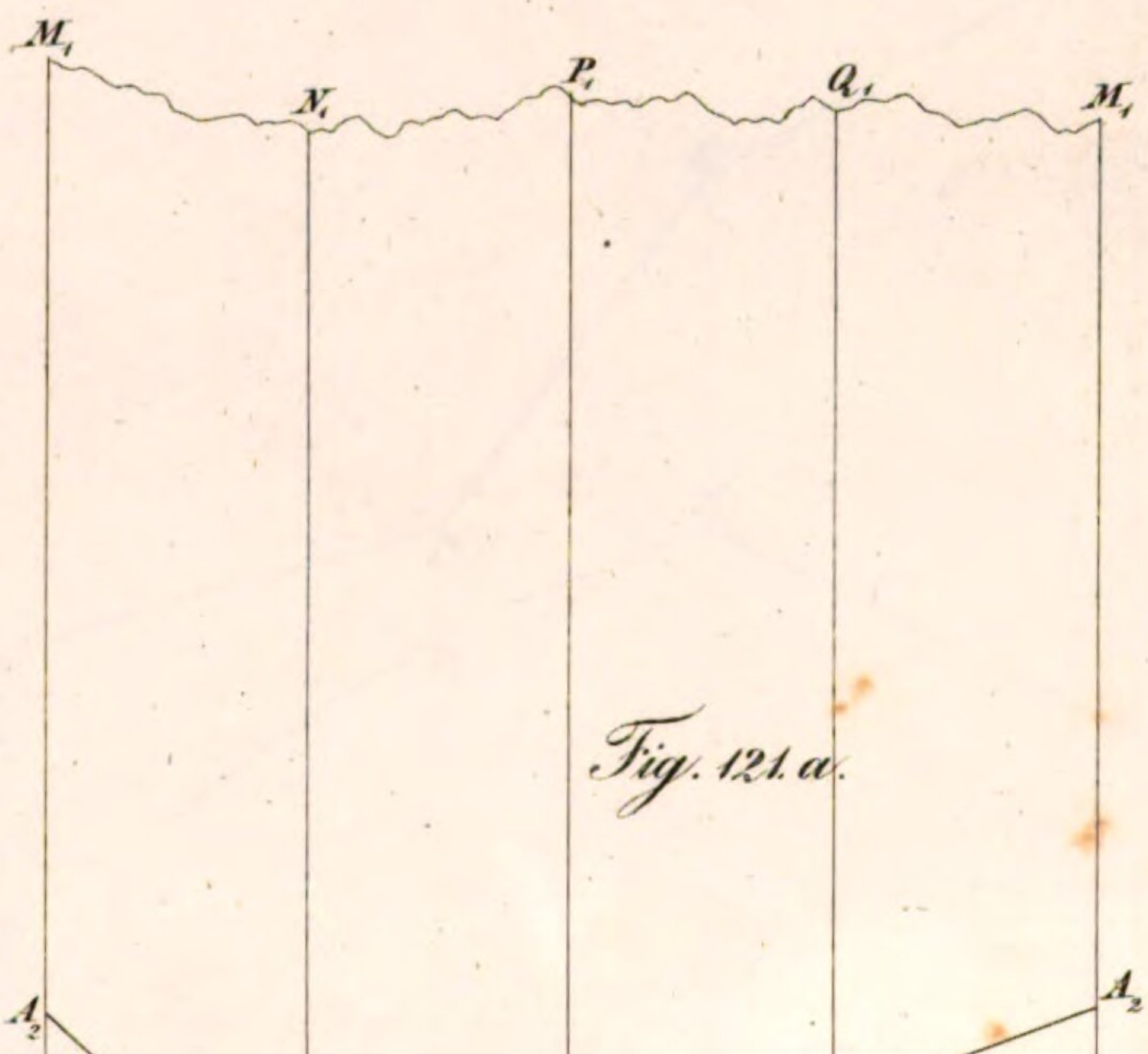


Fig. 121. a.

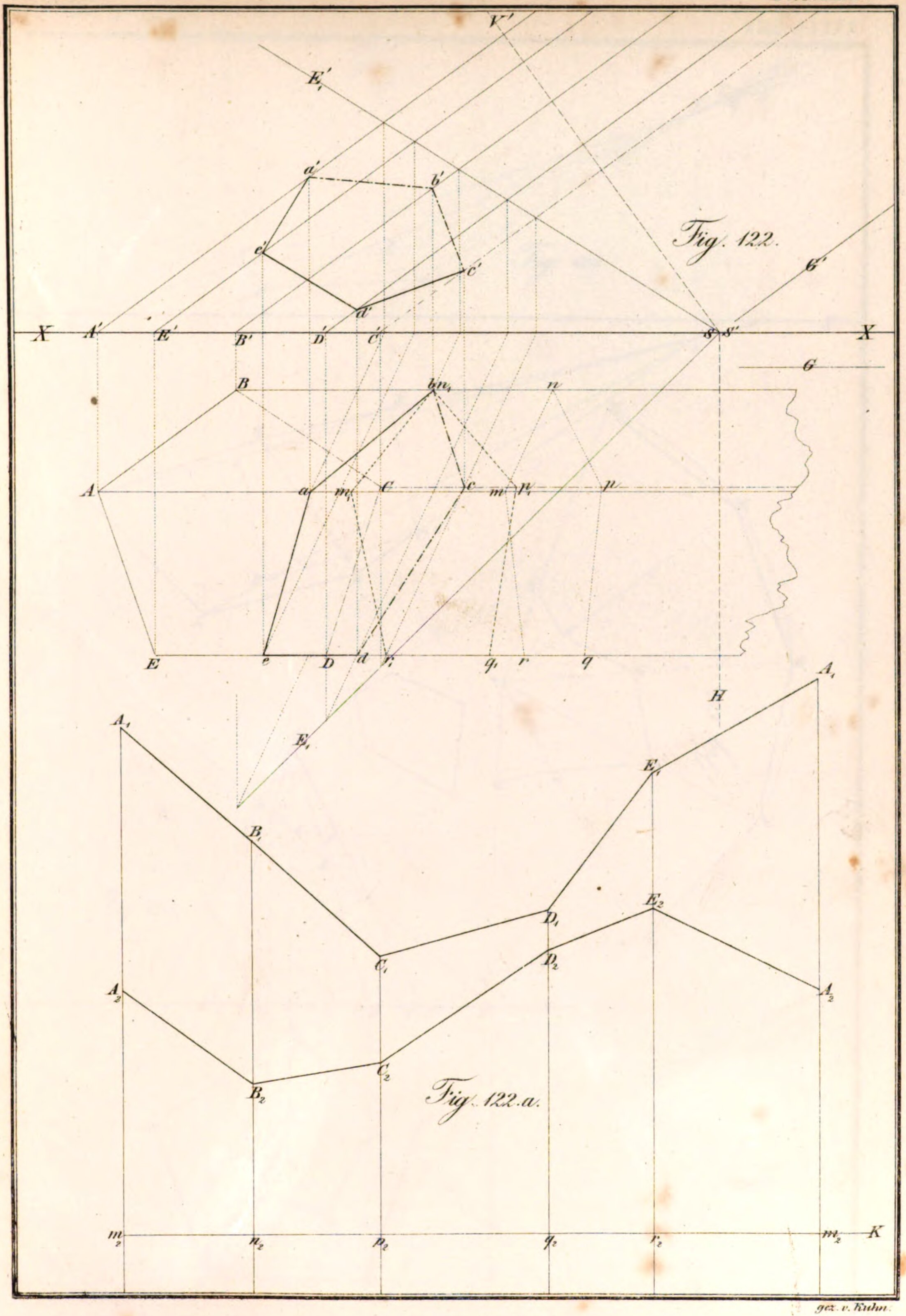
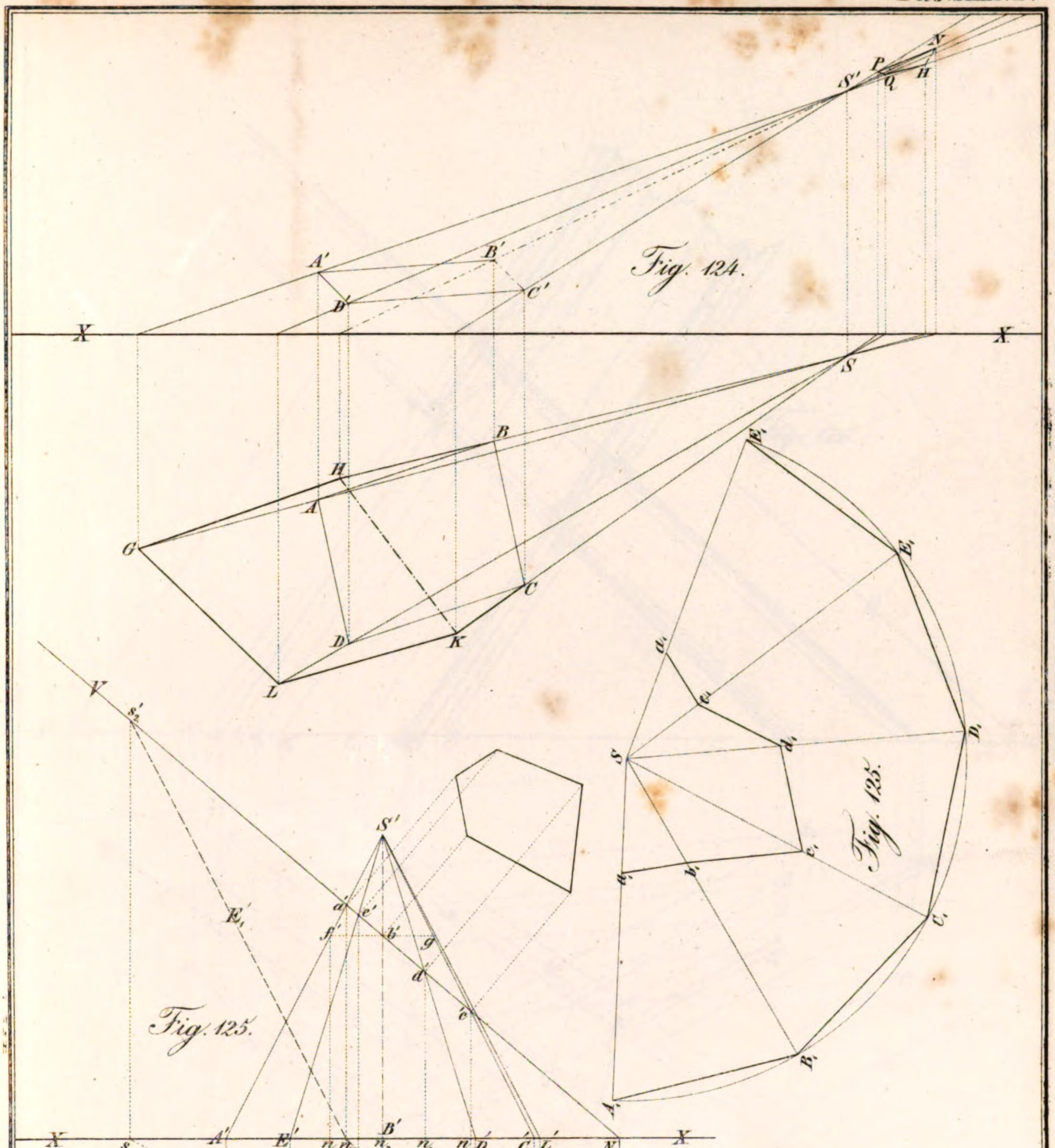


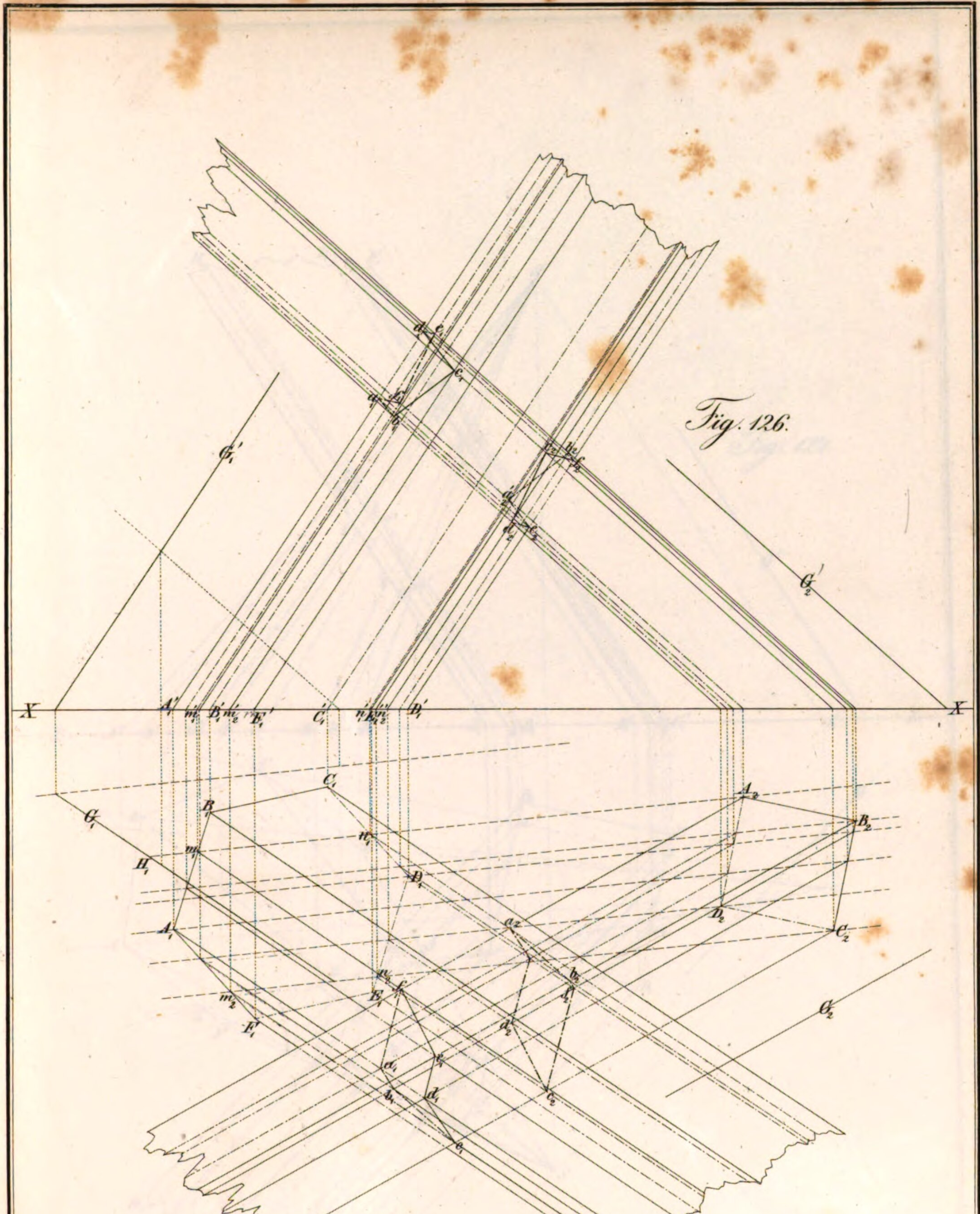
Fig. 122.

Fig. 122.a.

gez. v. Kuhn.



gez. v. Kuhn.


Fig. 126.

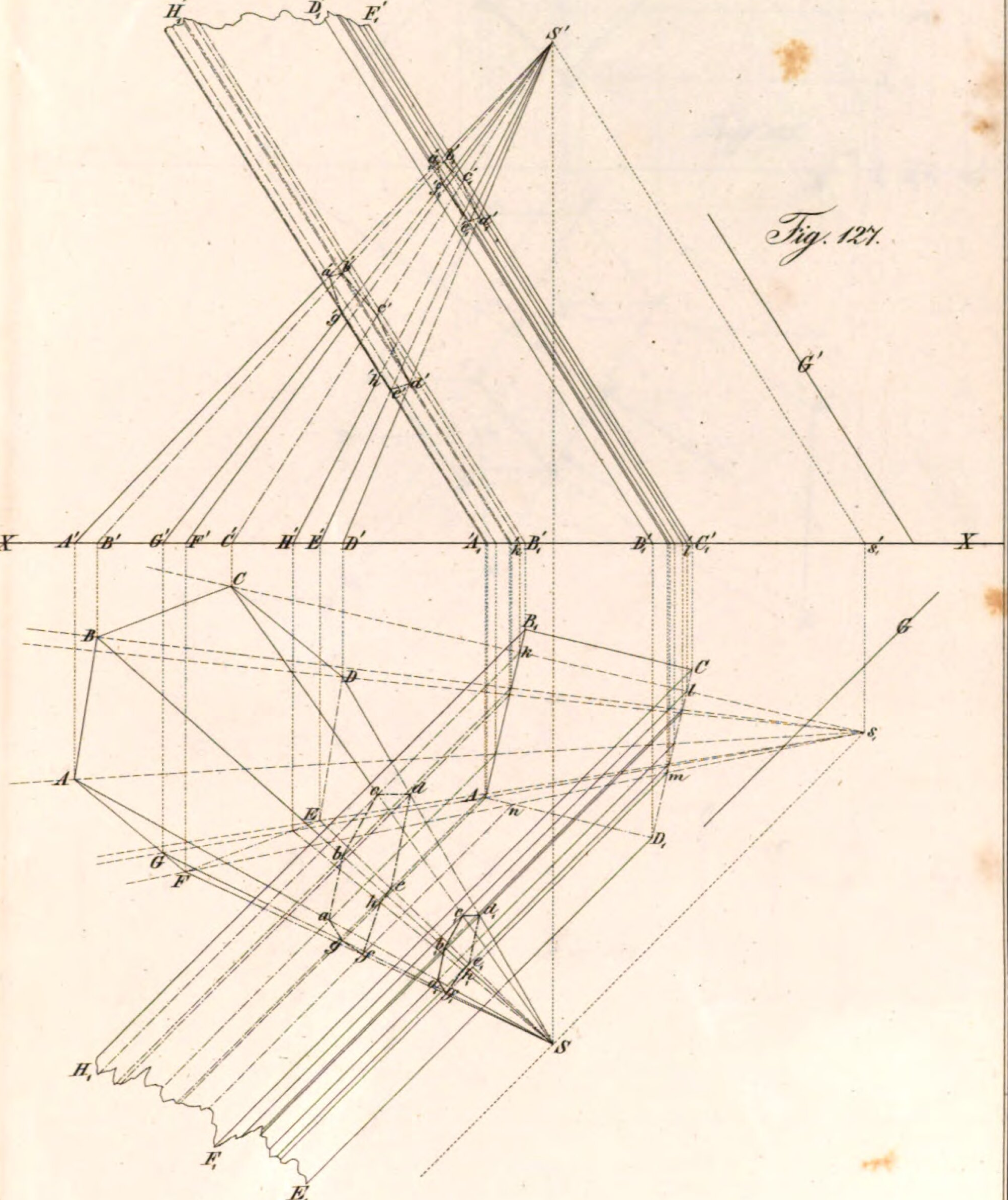


Fig. 127.

gez. v. Kuhn.

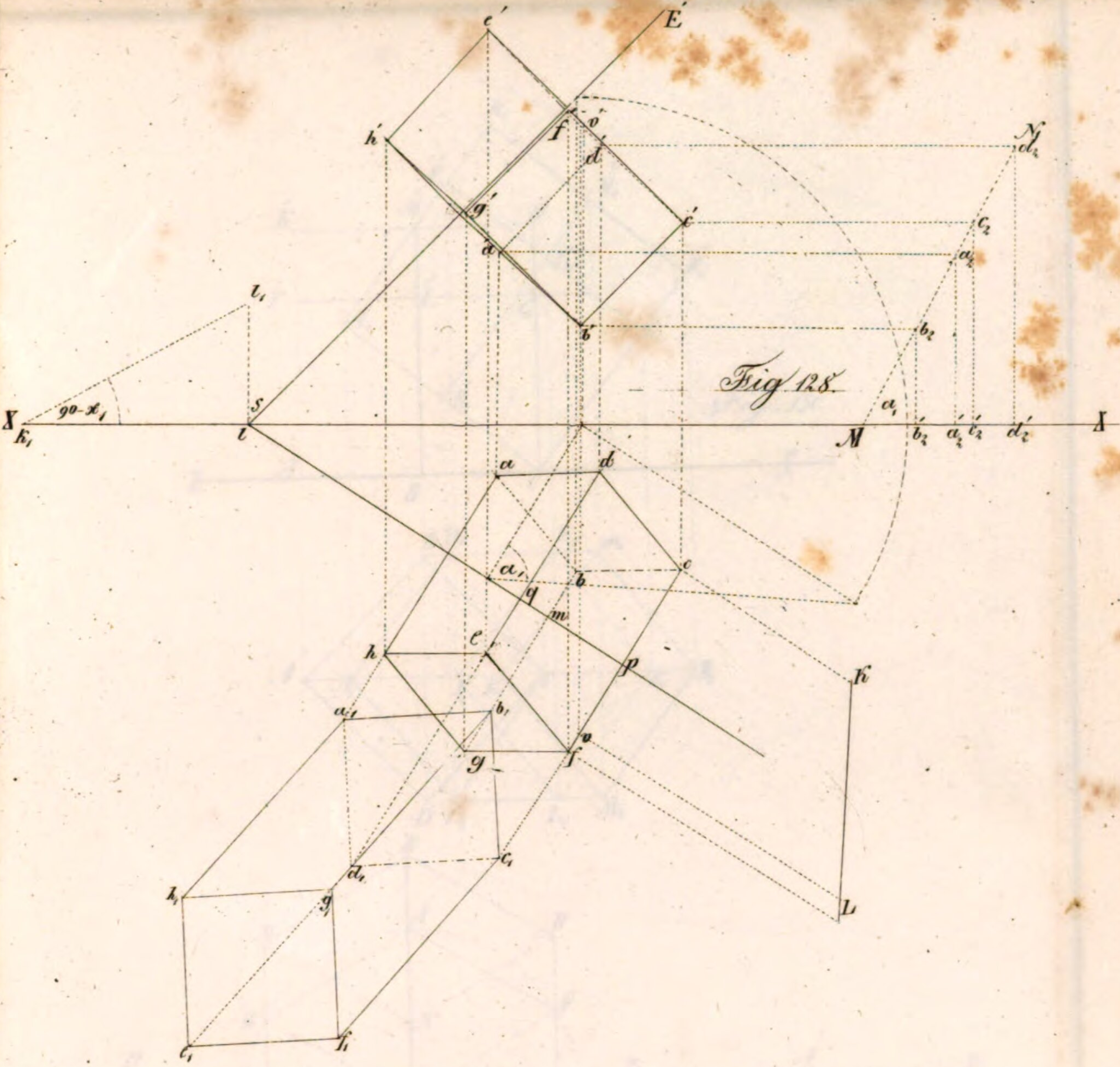


Fig. 128.

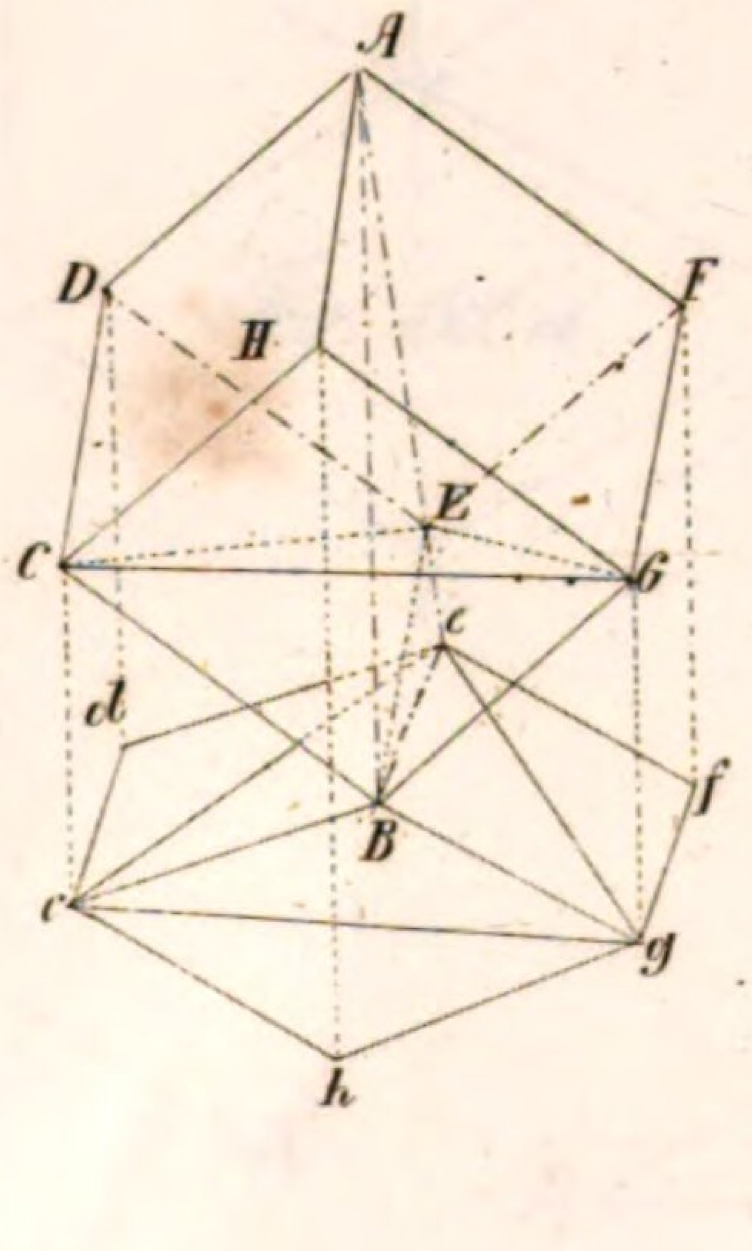


Fig. 129.

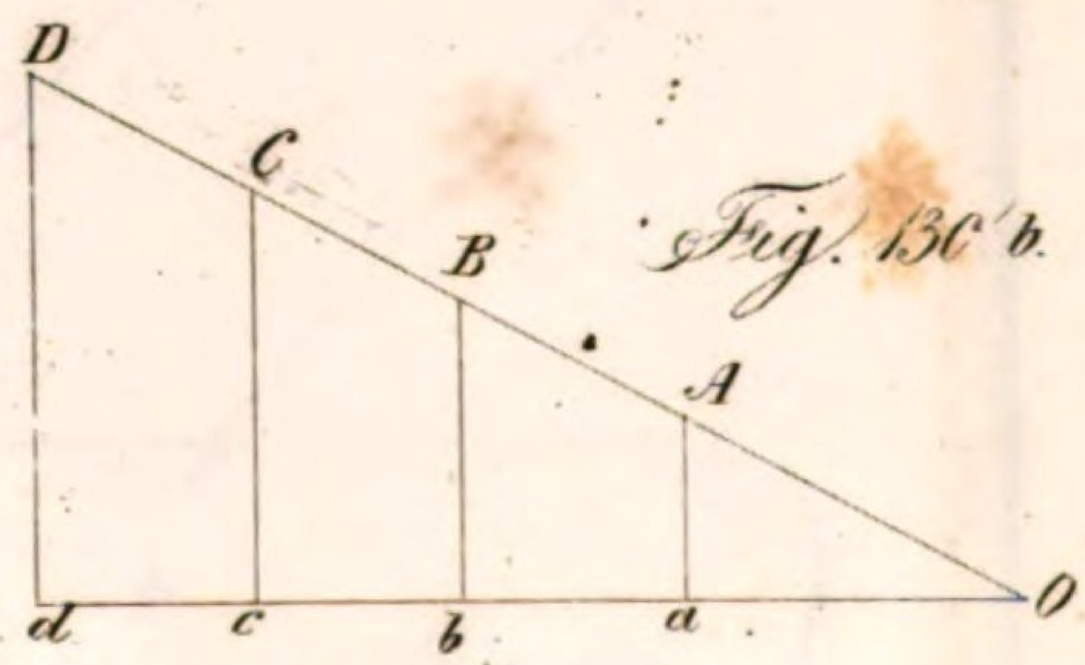


Fig. 130 b.

Lith. v. Gottf. Schroeger.
Gez. von Kuhn.

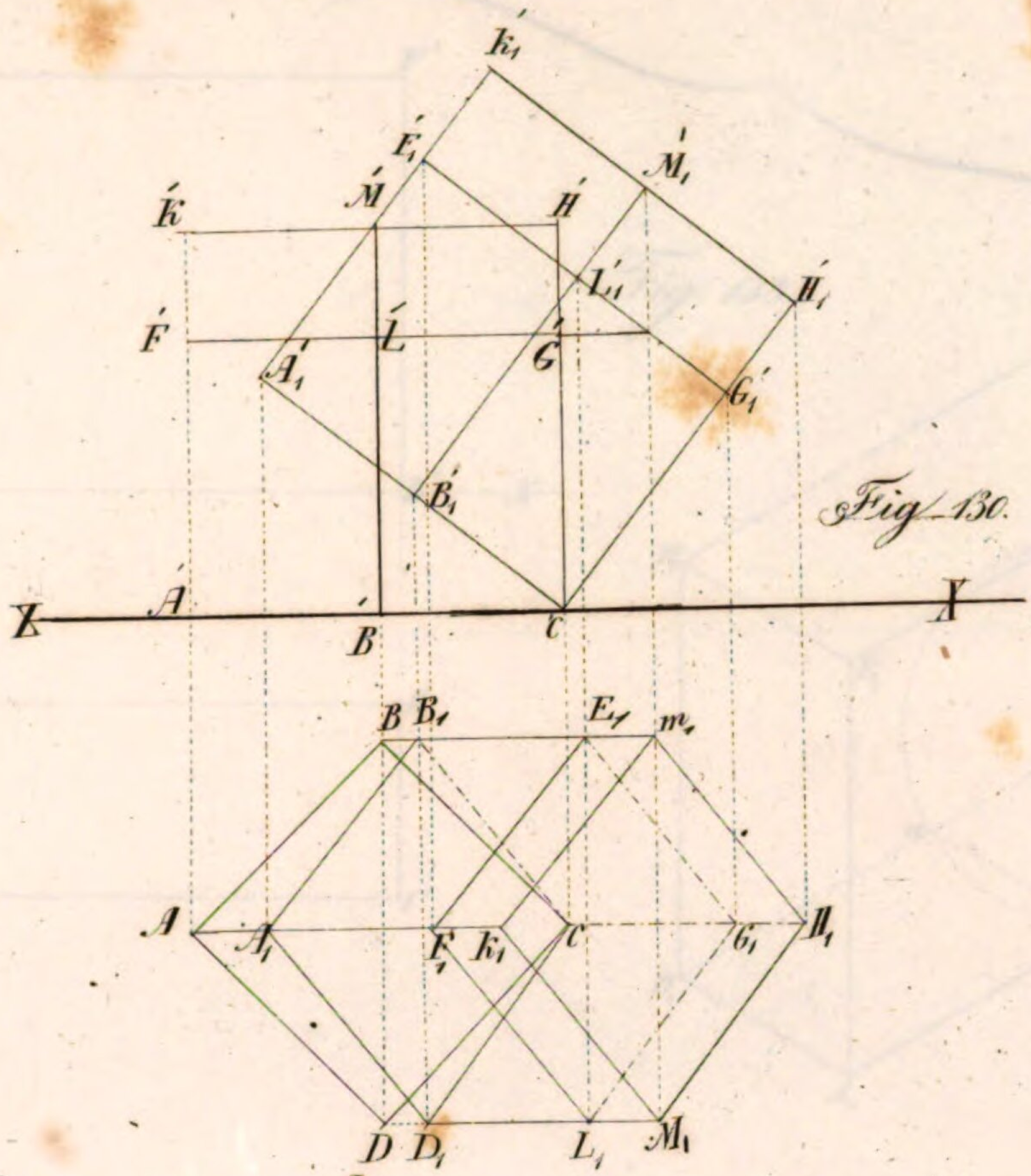


Fig. 130.

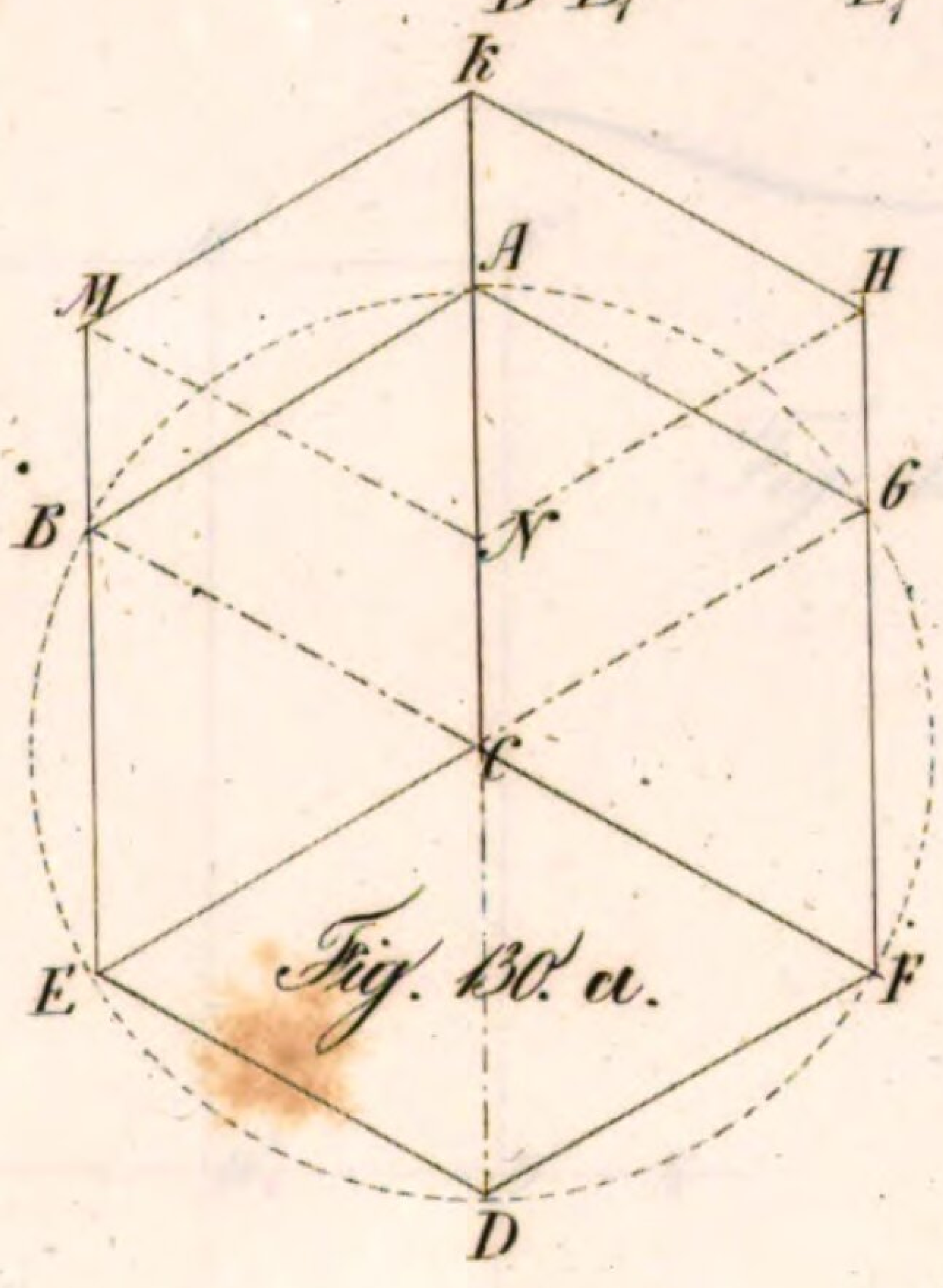


Fig. 130. a.

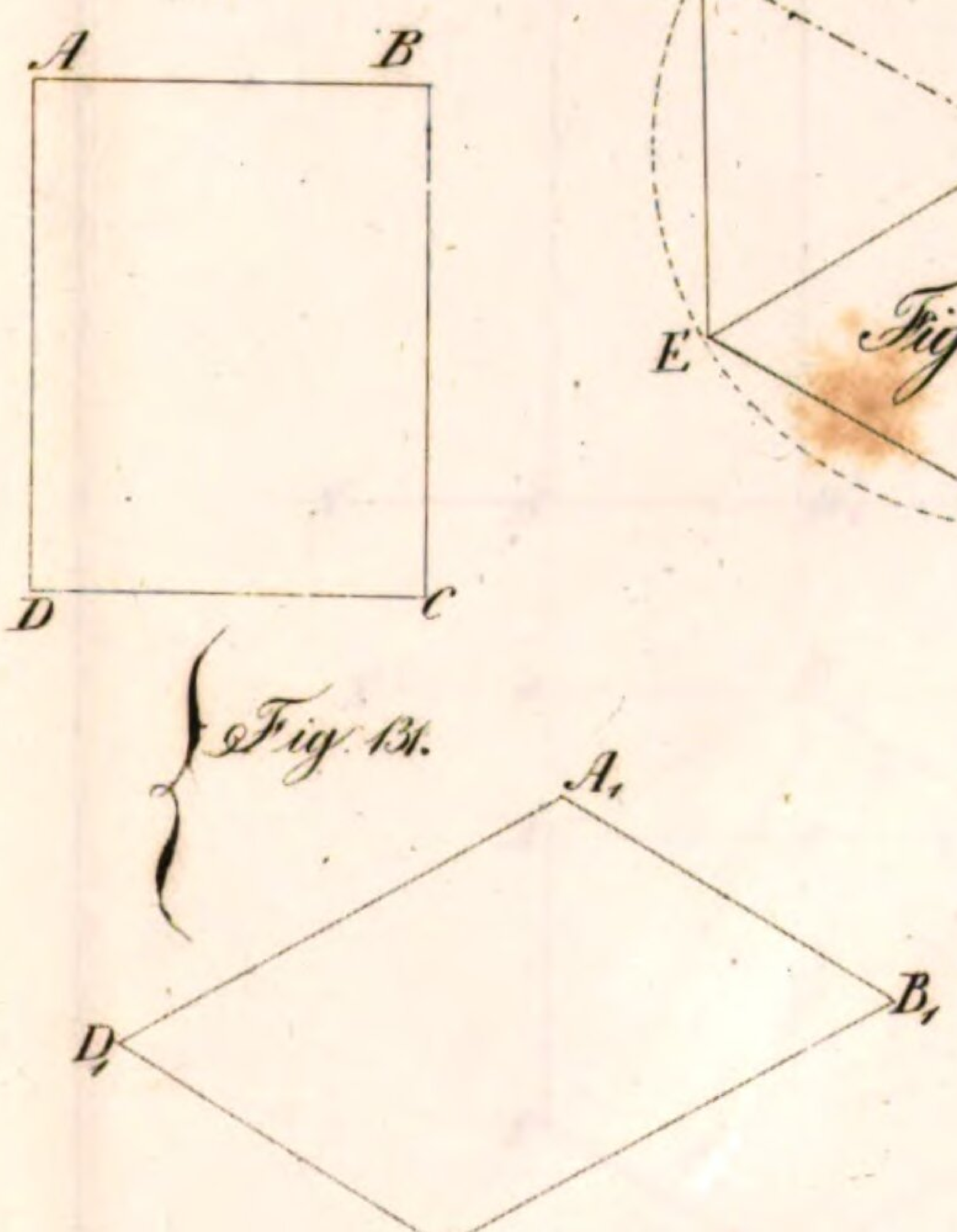


Fig. 131.

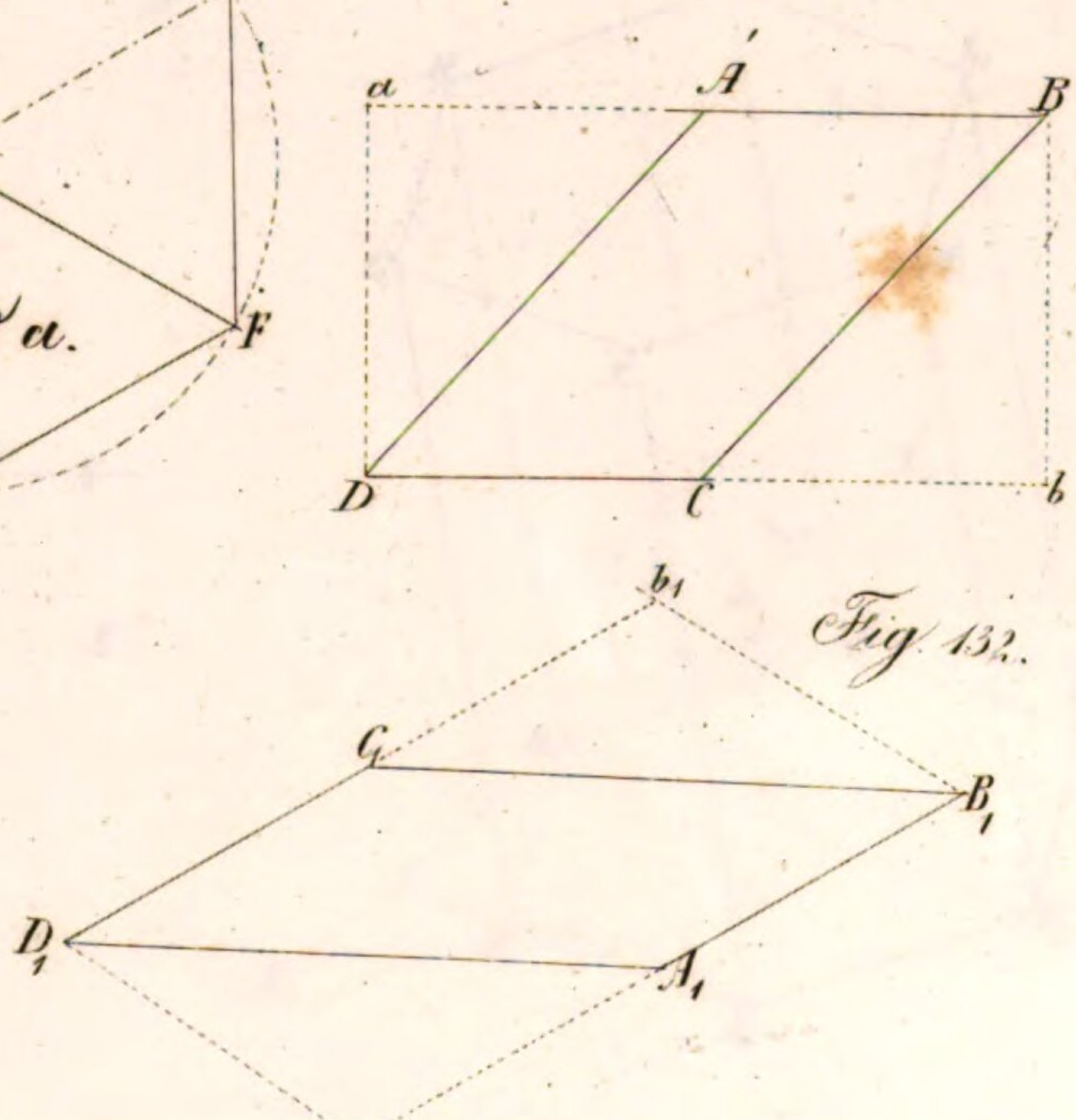


Fig. 132.

gez. v. Kuhn.

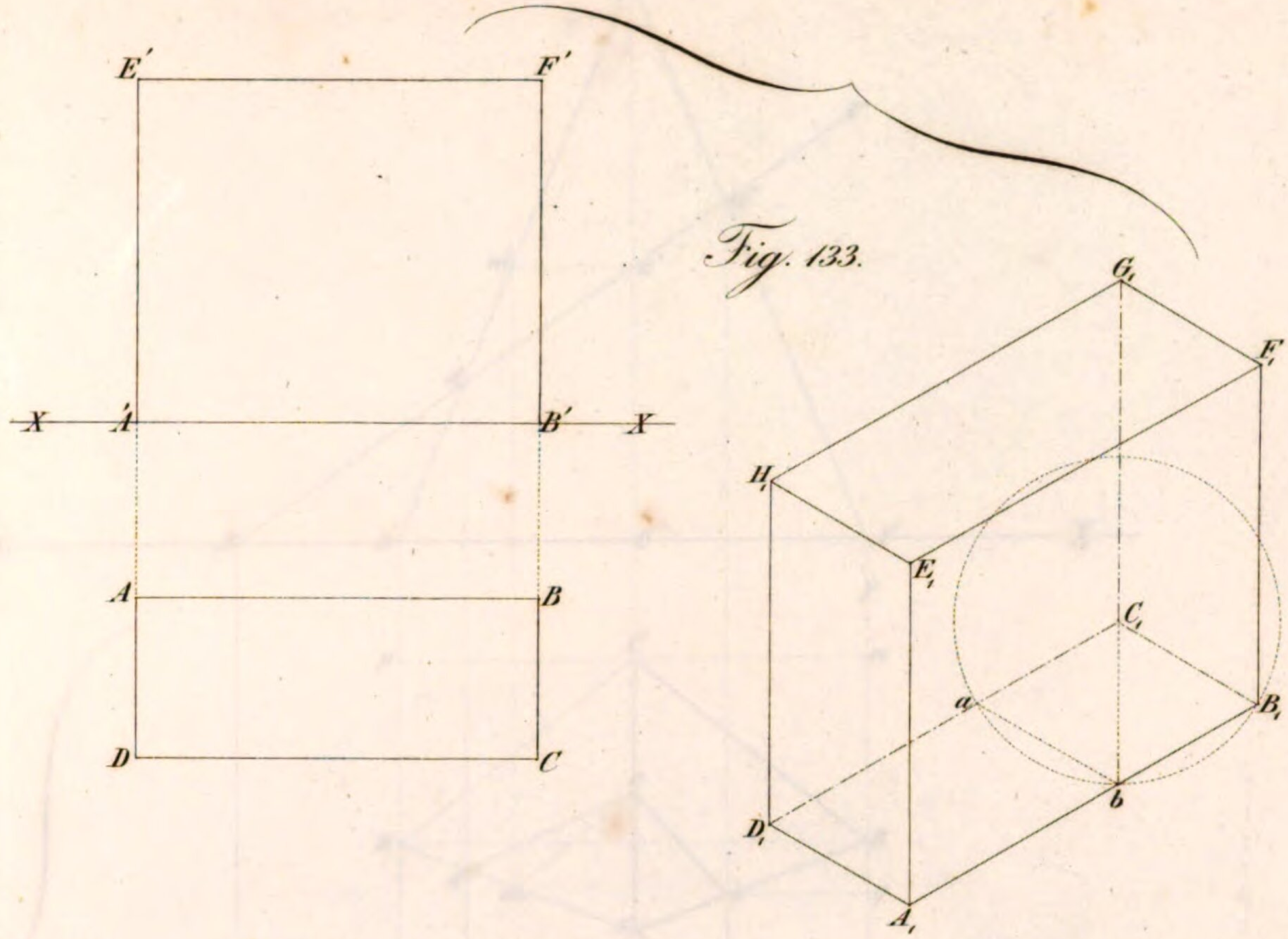


Fig. 133.

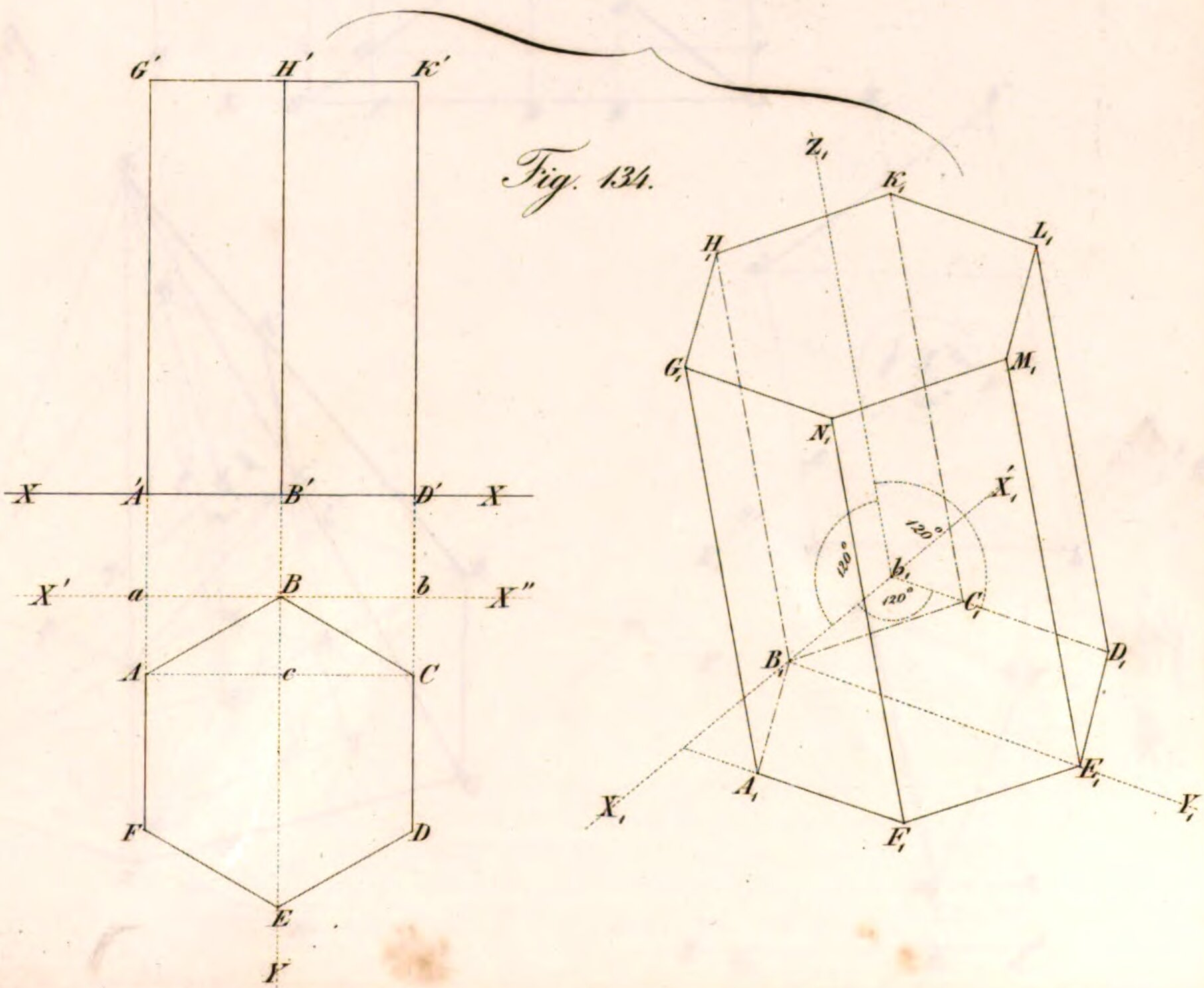
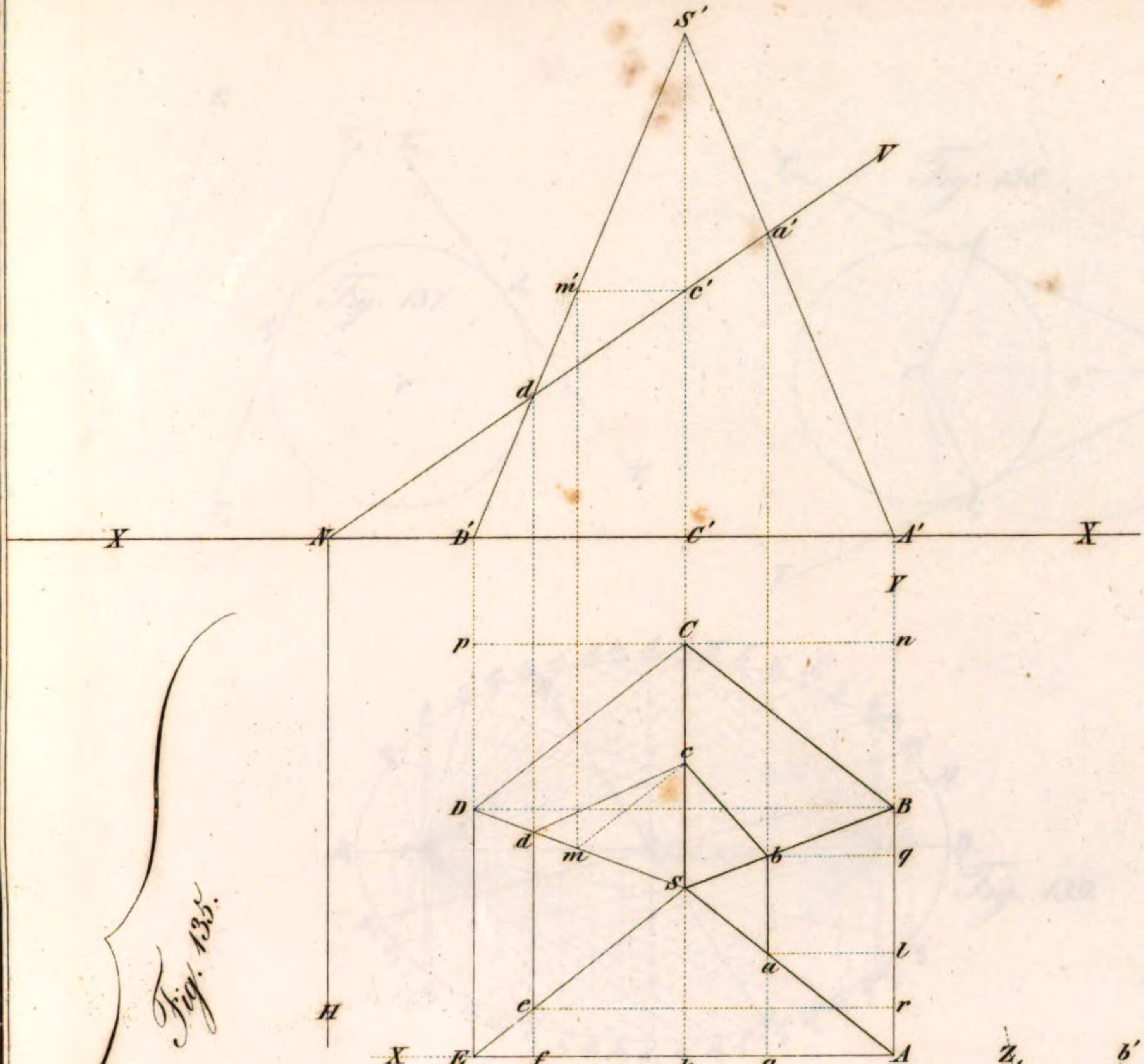


Fig. 134.



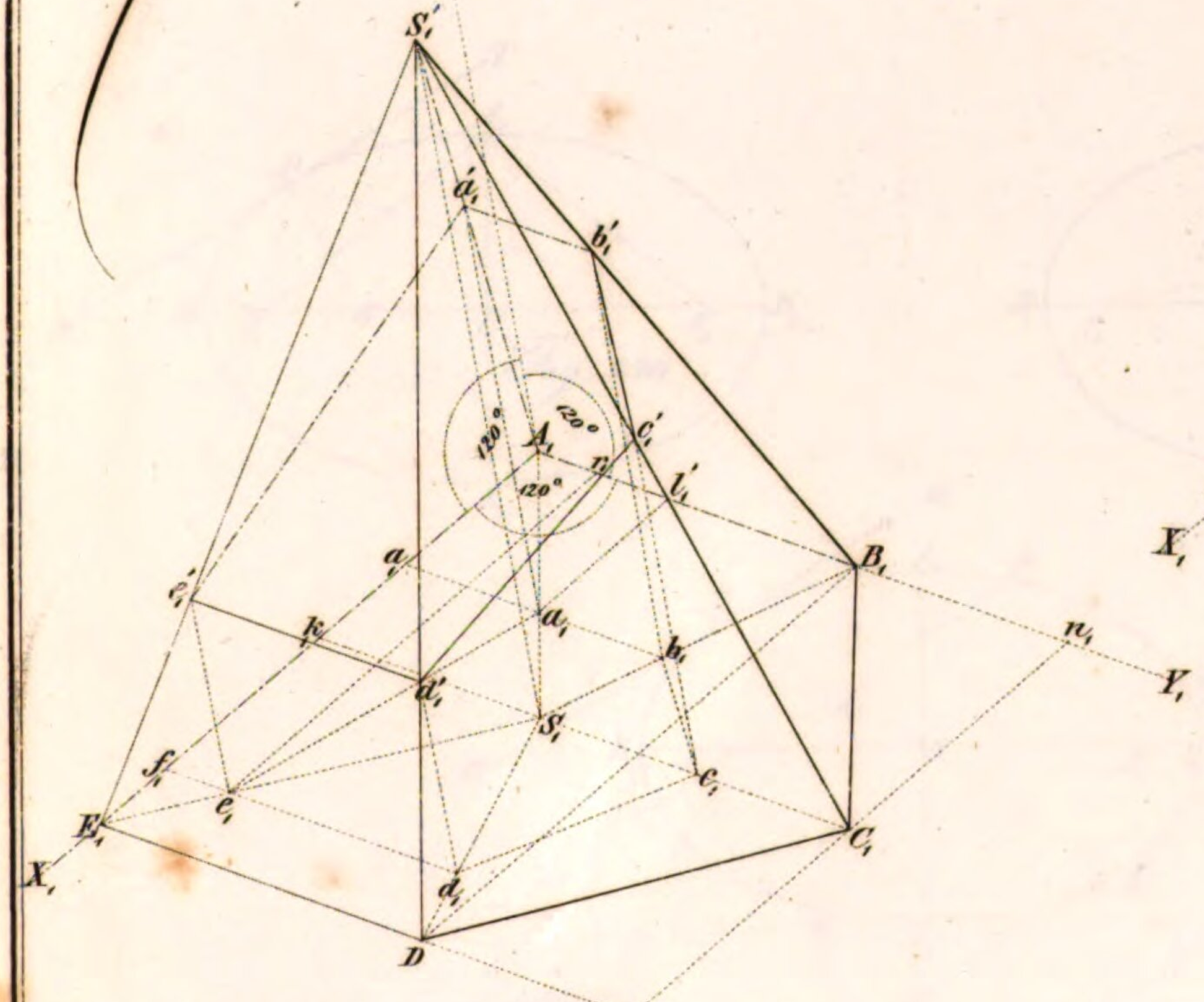


Fig. 135.

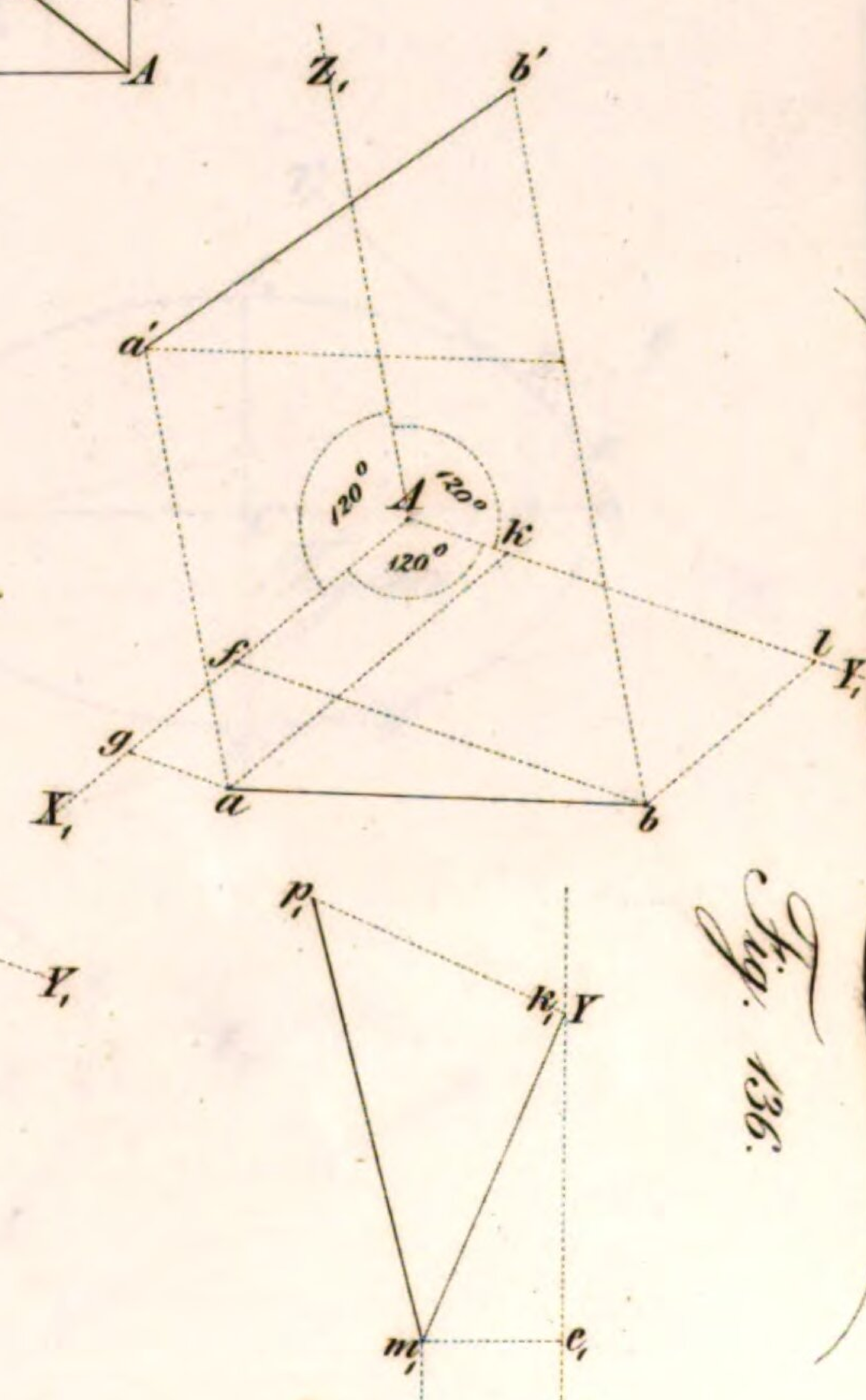


Fig. 136.

gez. v. Kuhn.

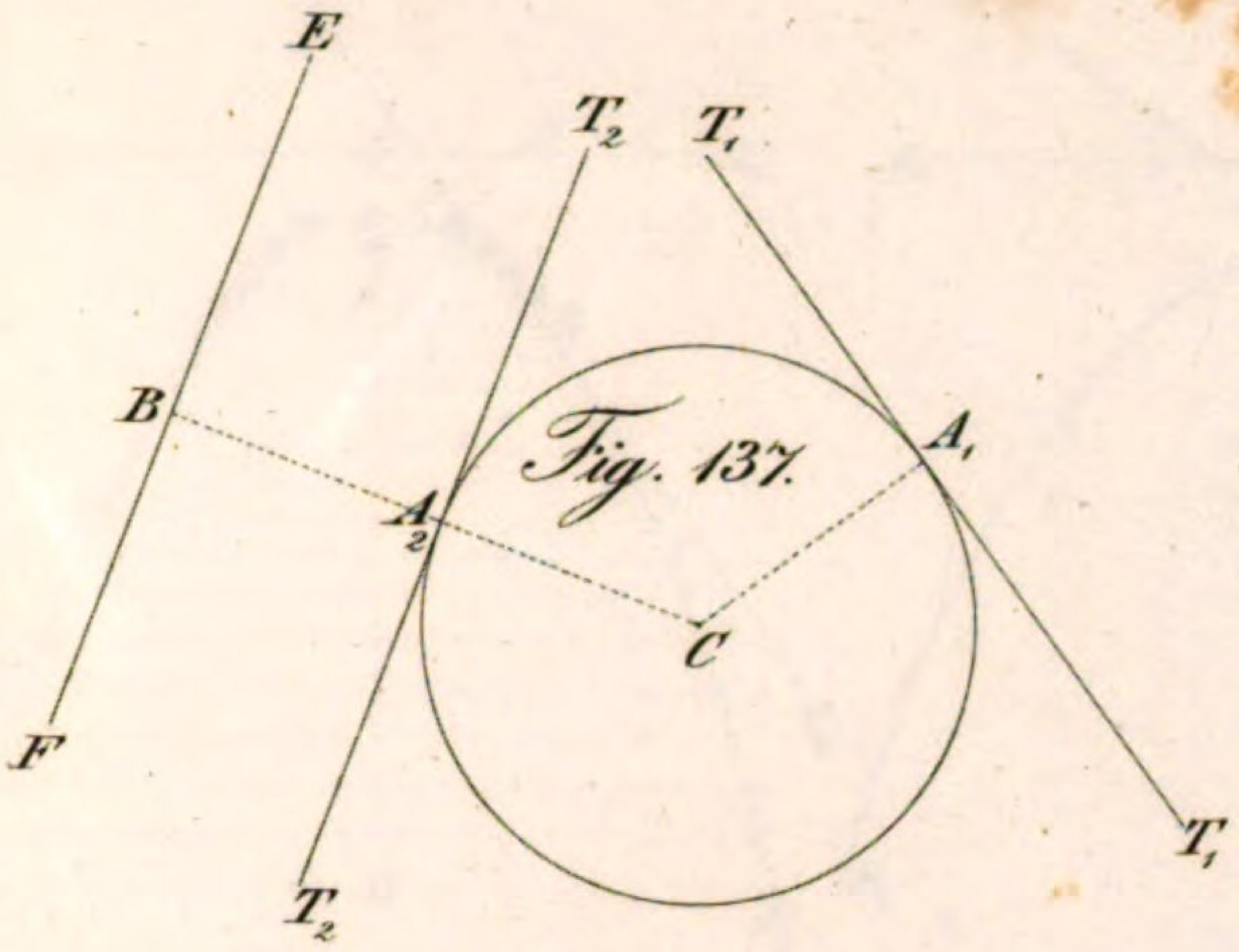


Fig. 137.

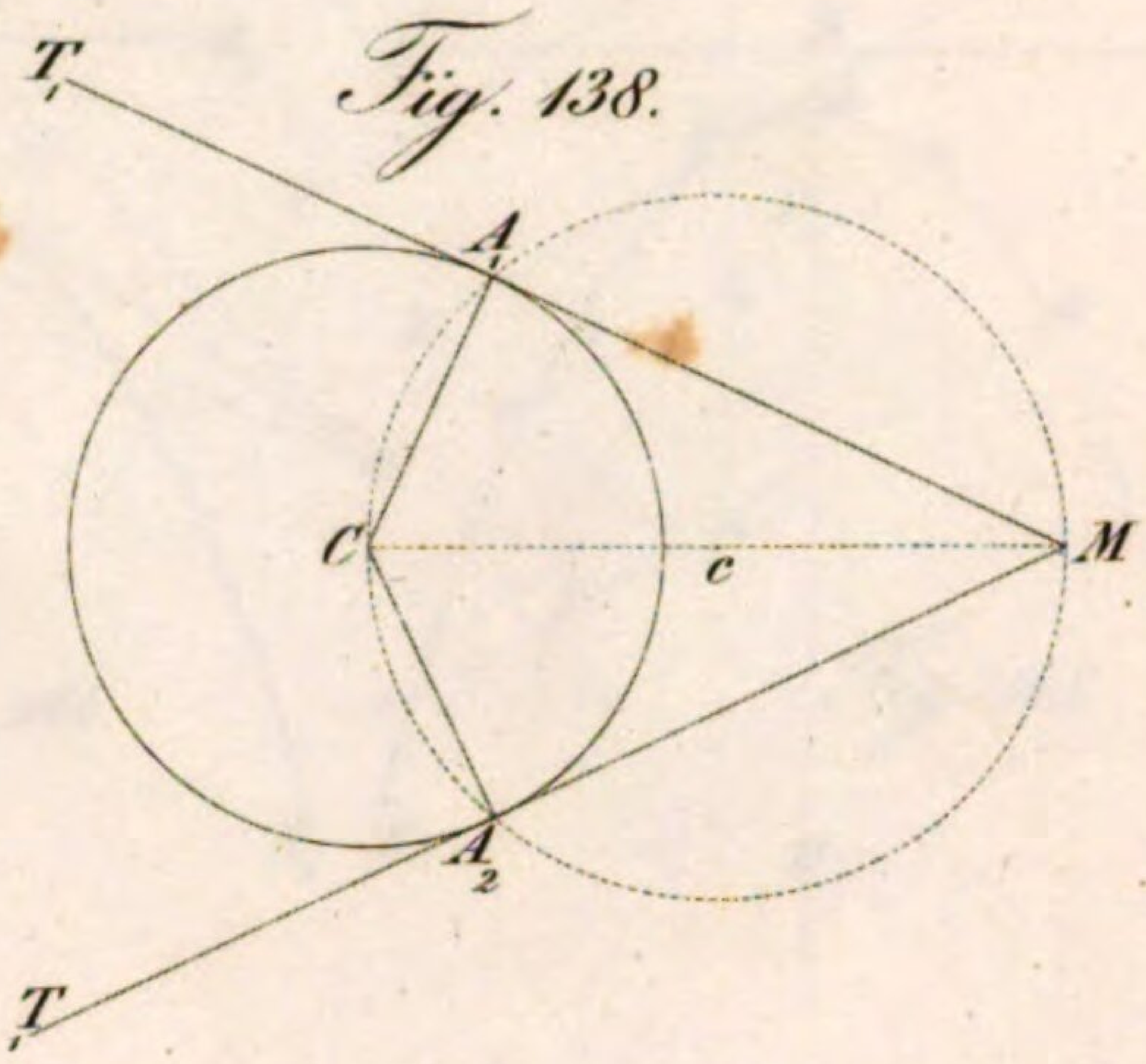


Fig. 138.

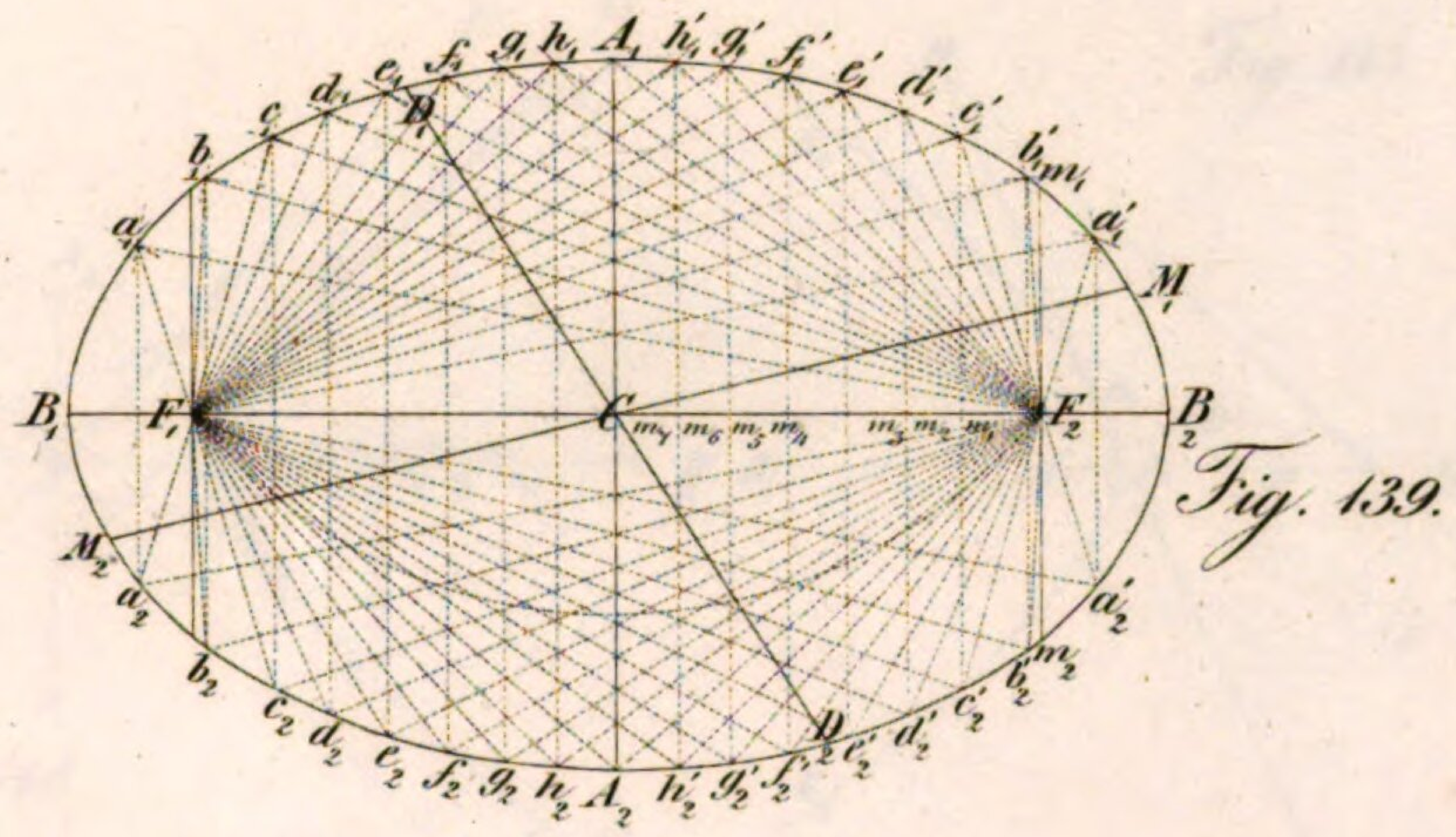


Fig. 139.

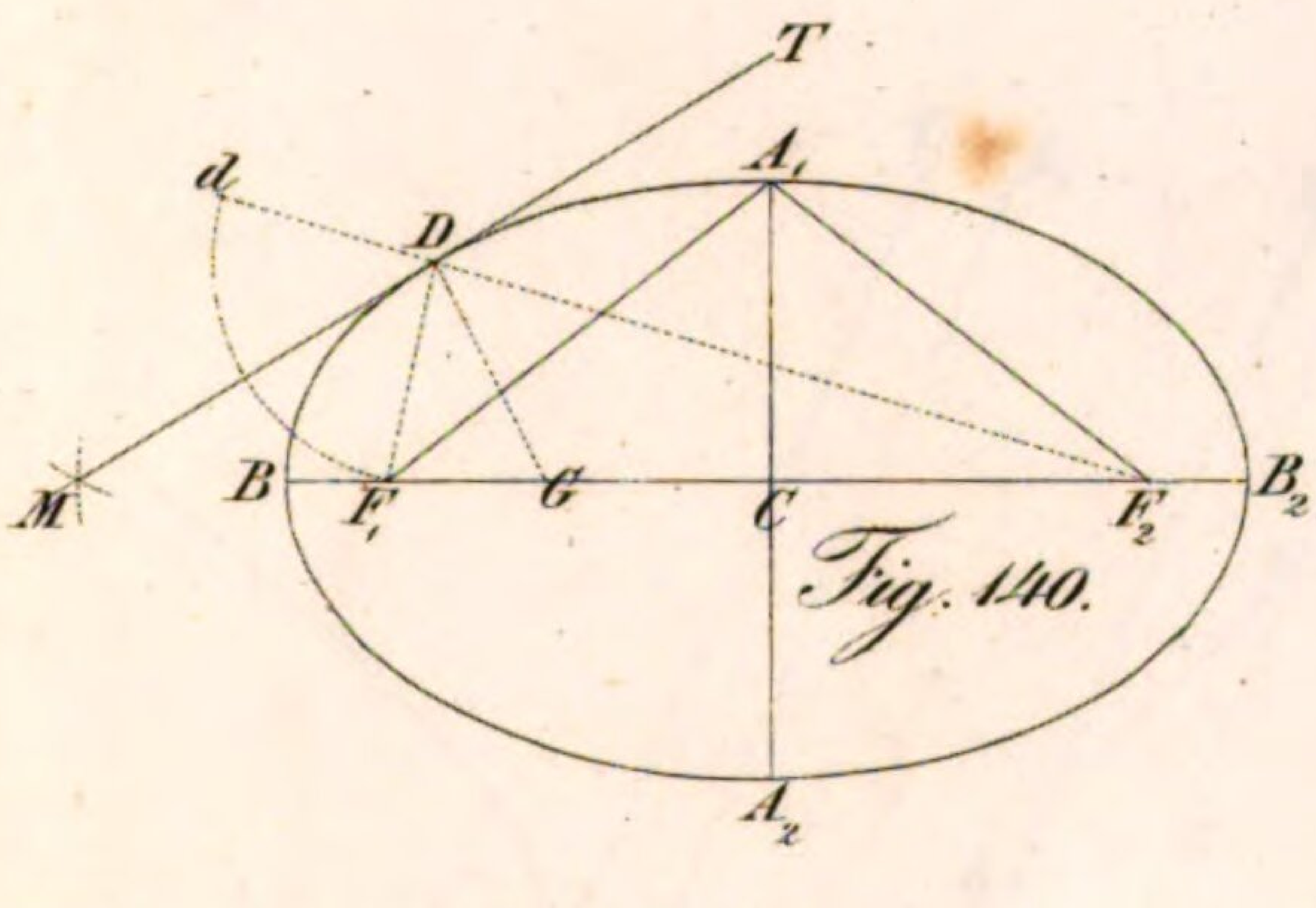


Fig. 140.

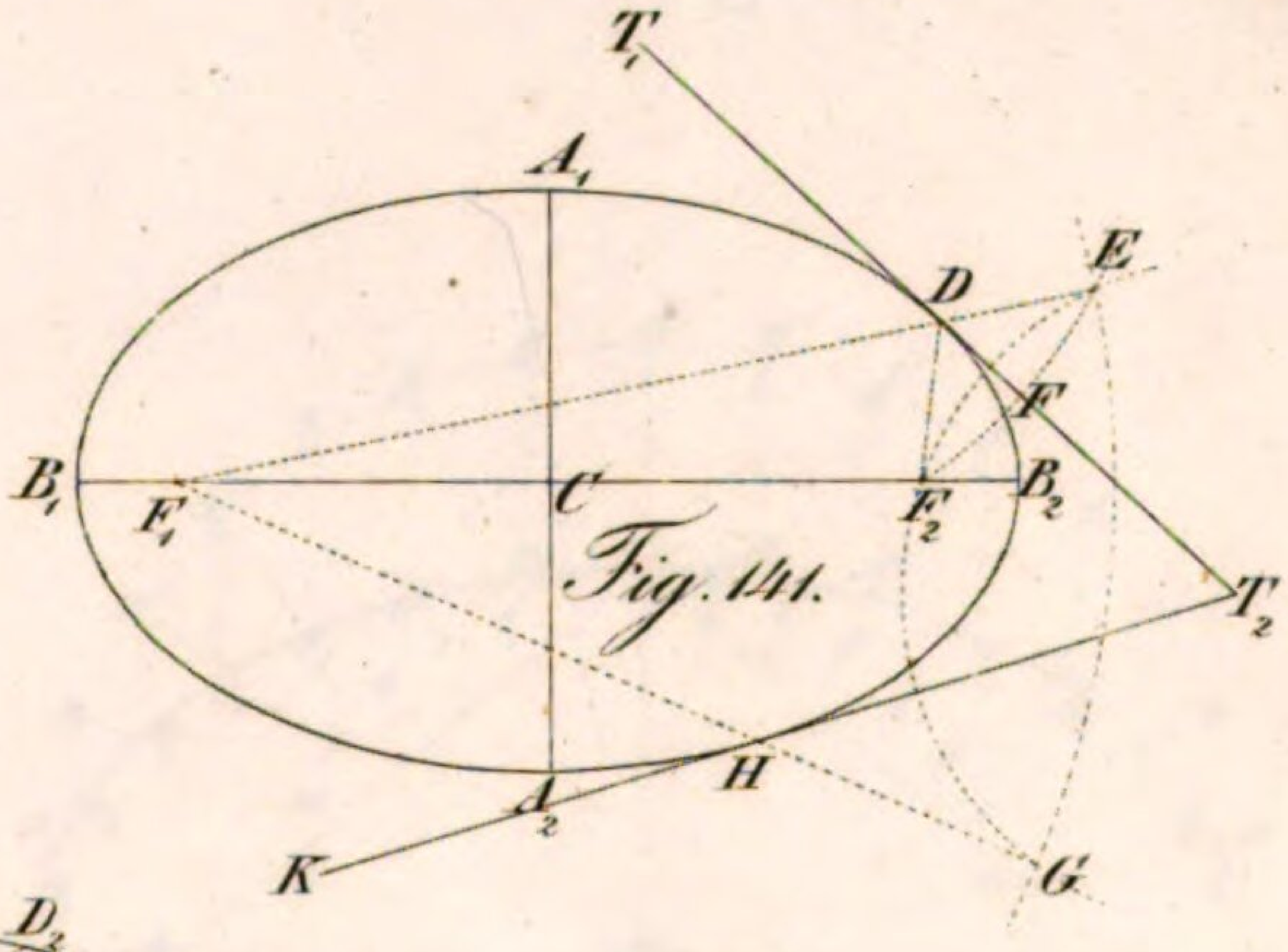


Fig. 141.

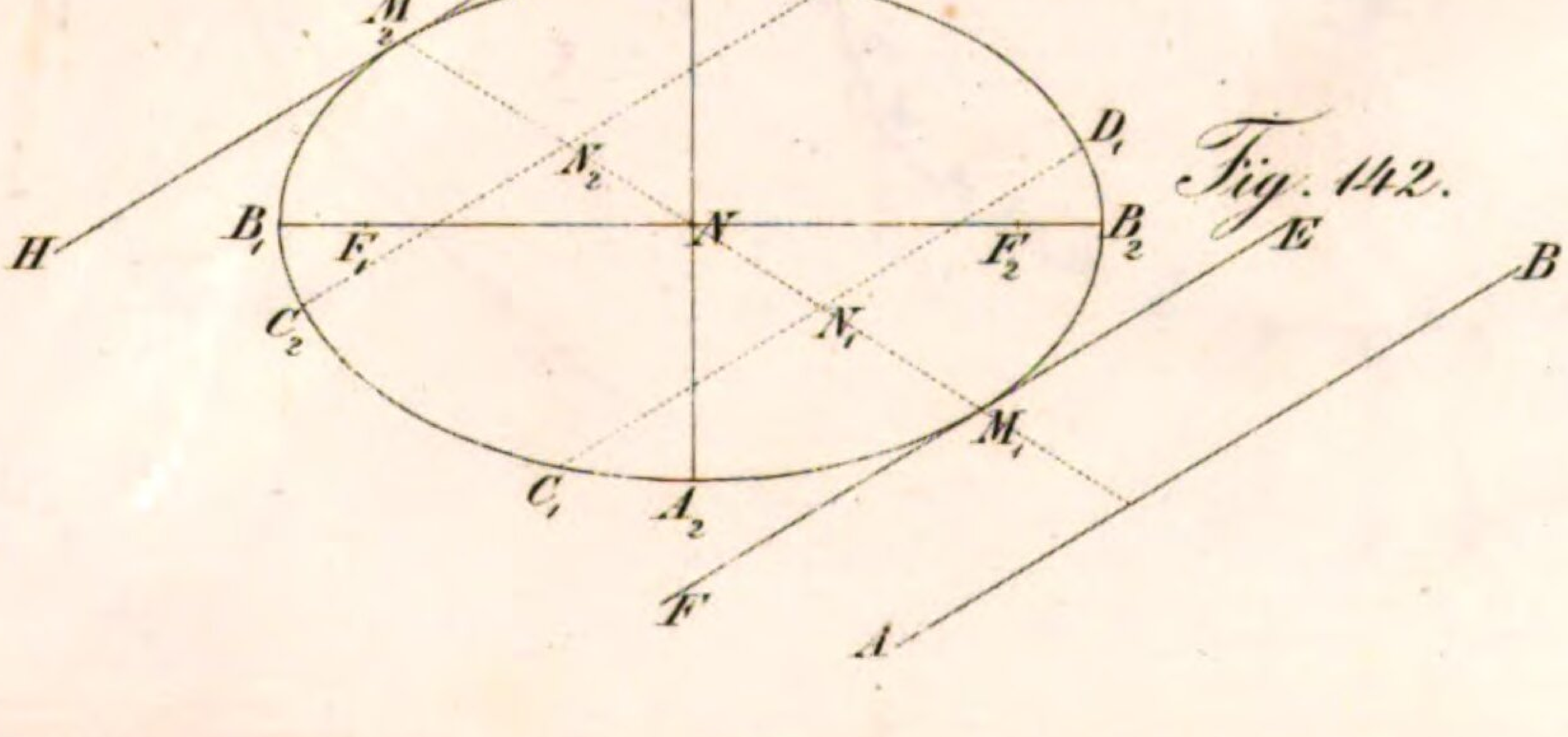


Fig. 142.

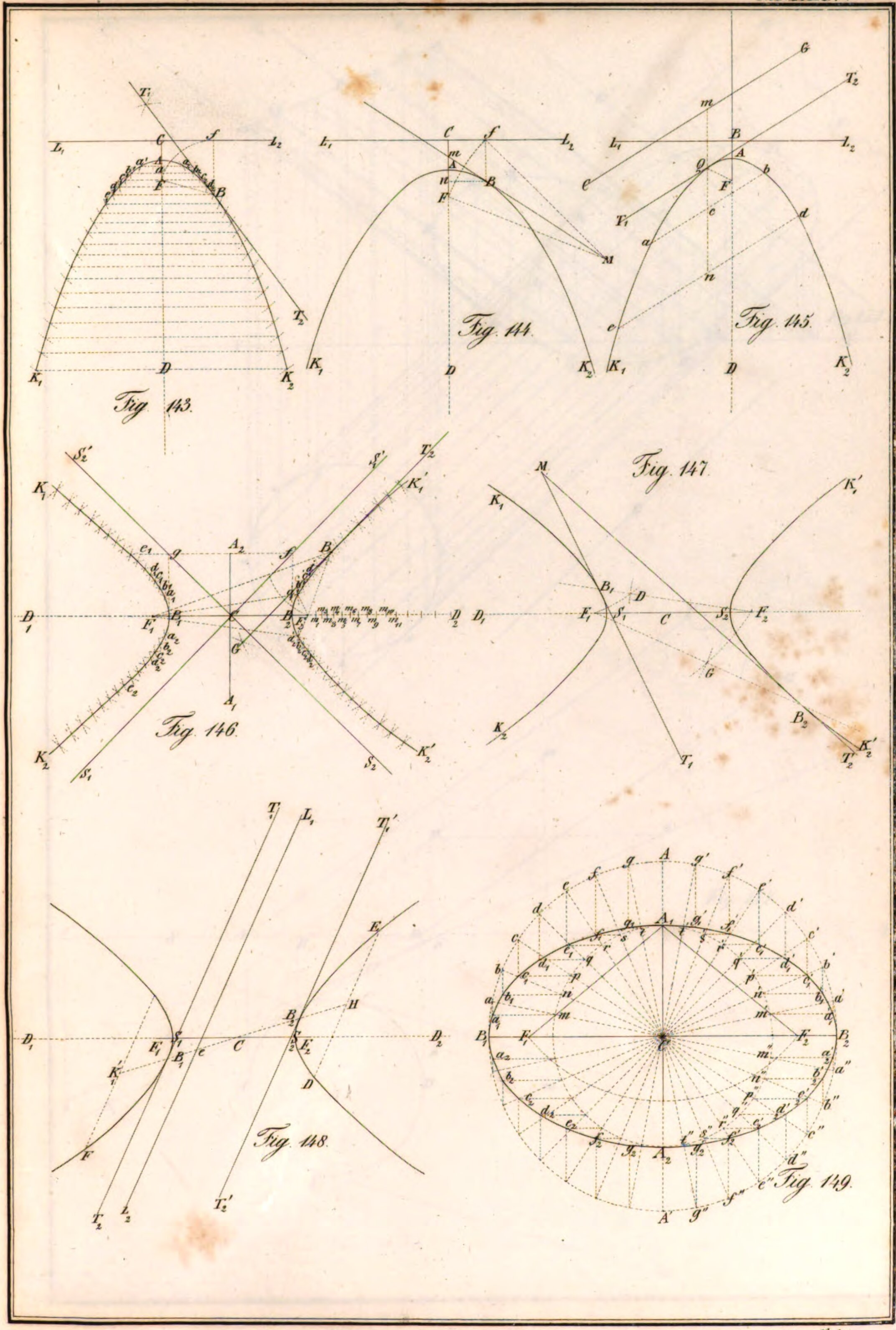


Fig. 143. Fig. 144. Fig. 145. Fig. 146. Fig. 147. Fig. 148. Fig. 149.

gez. v. Kuhn.



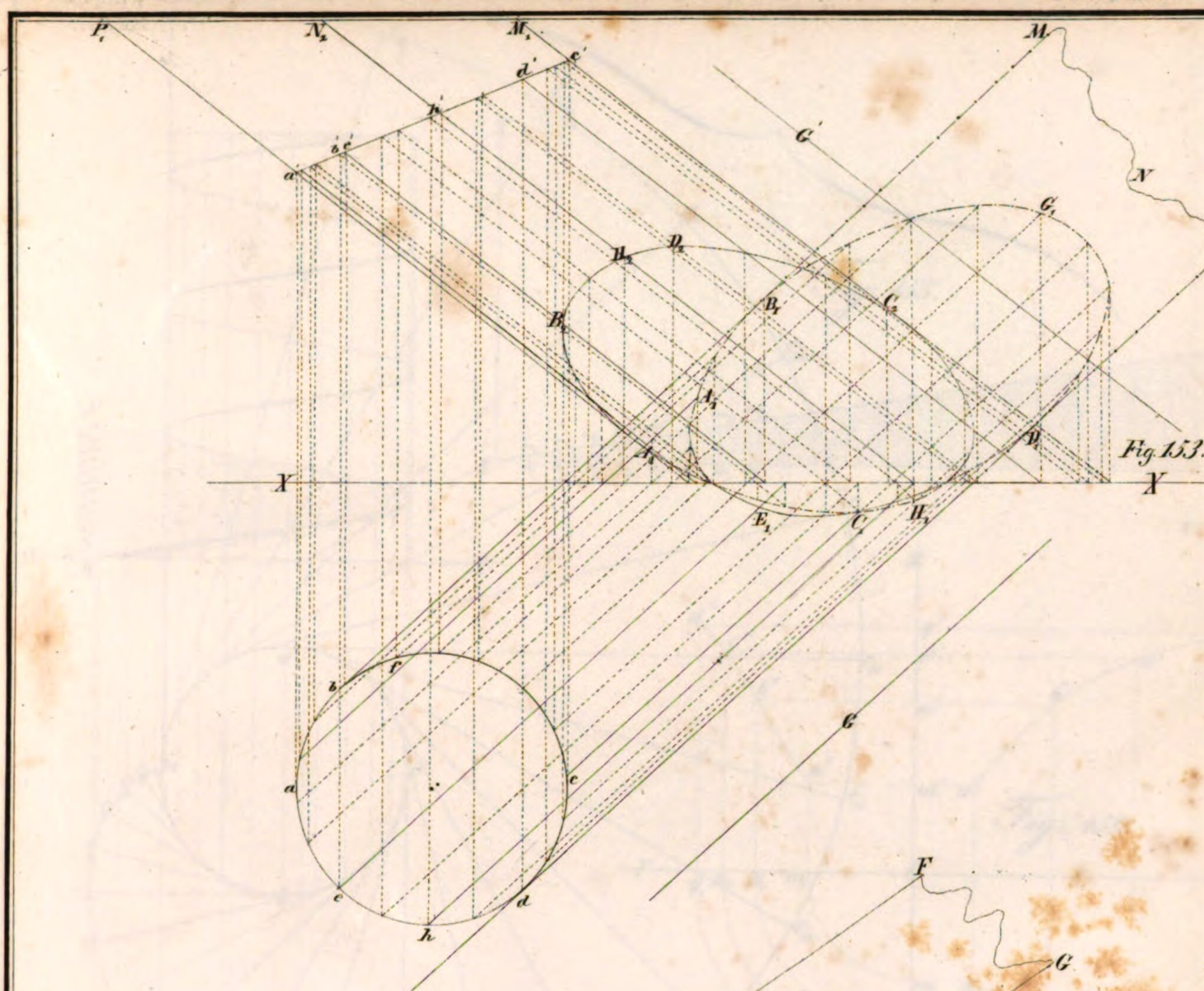


Fig. 153.

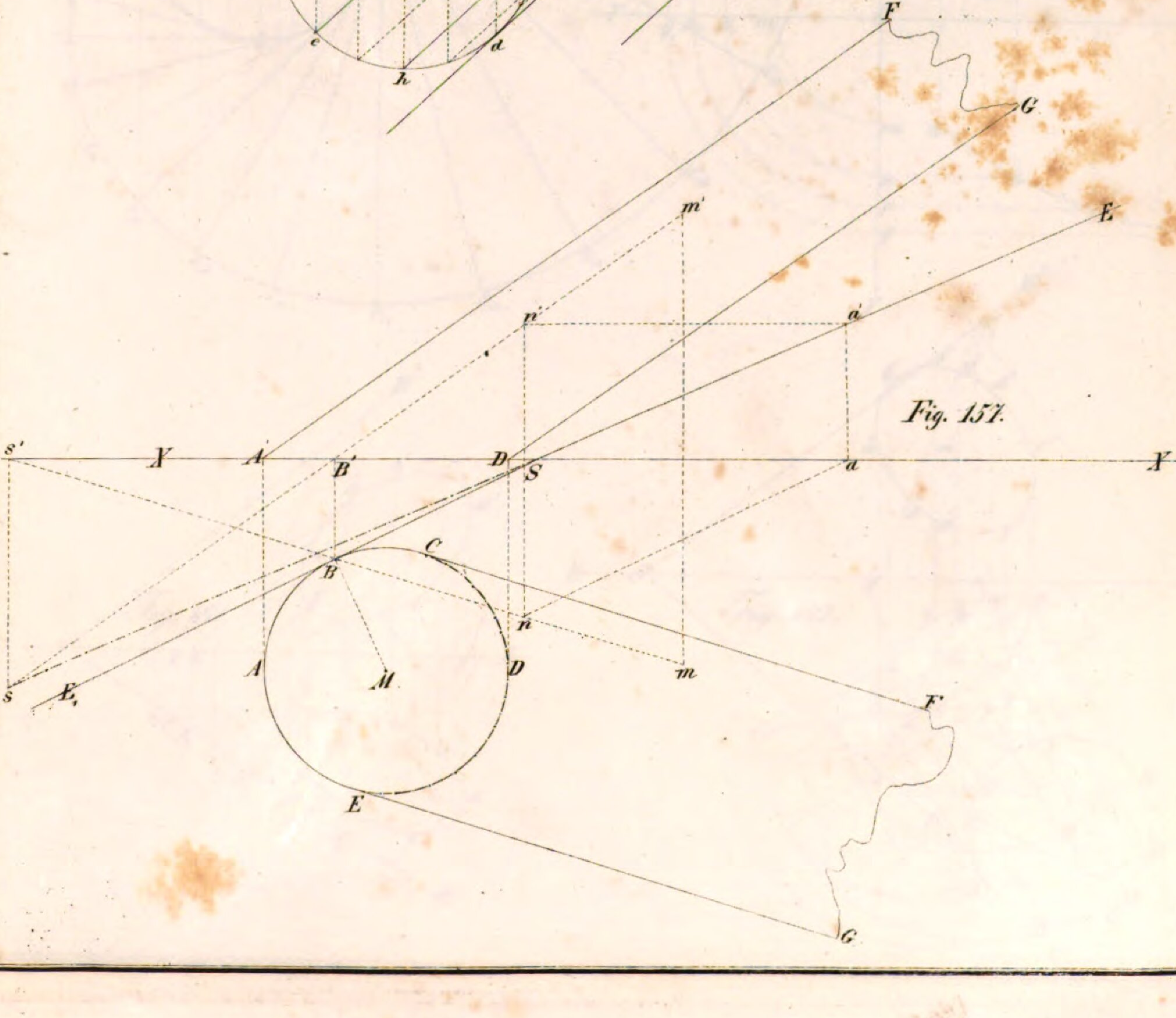
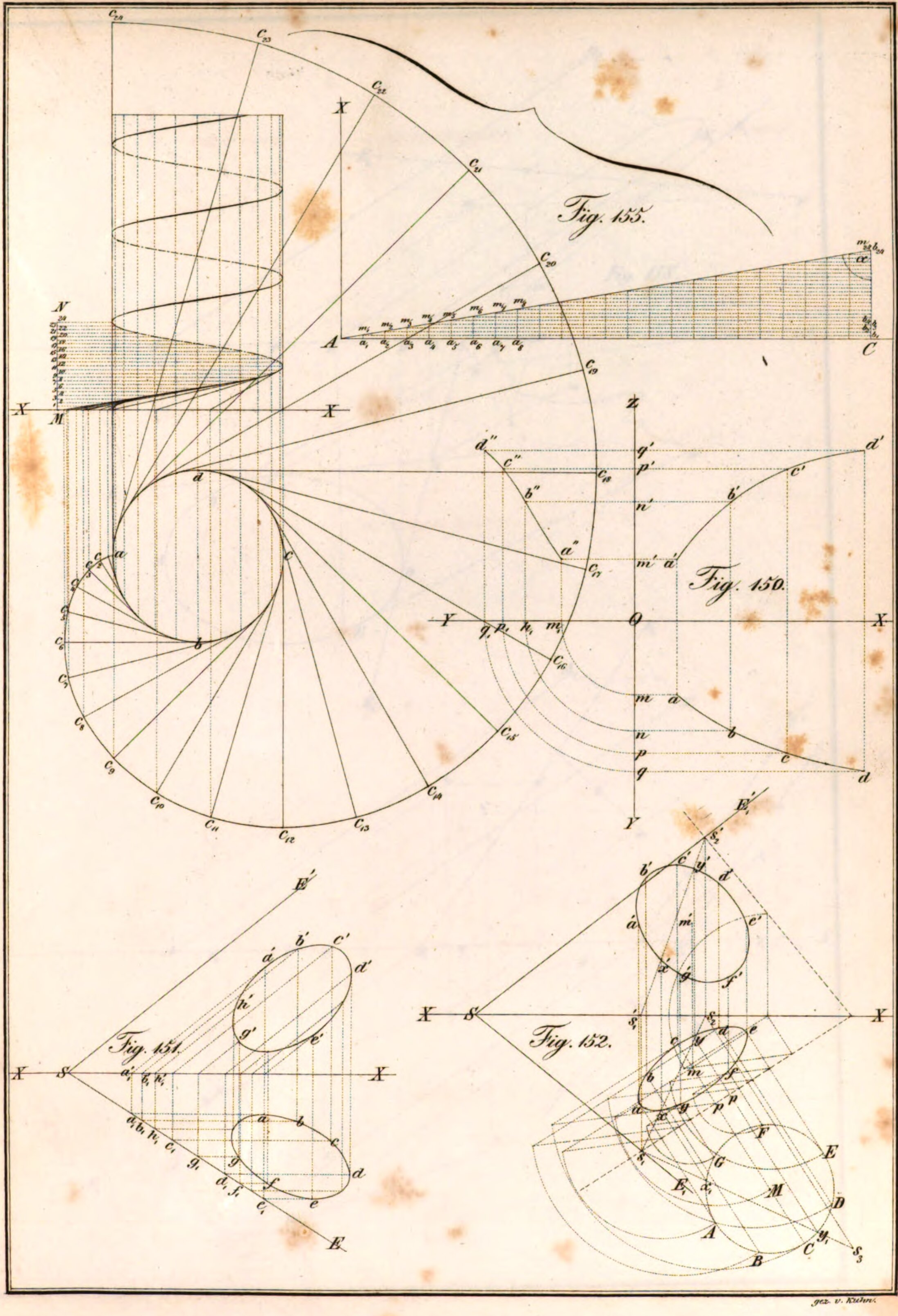


Fig. 157.



gez. v. Kuhn.

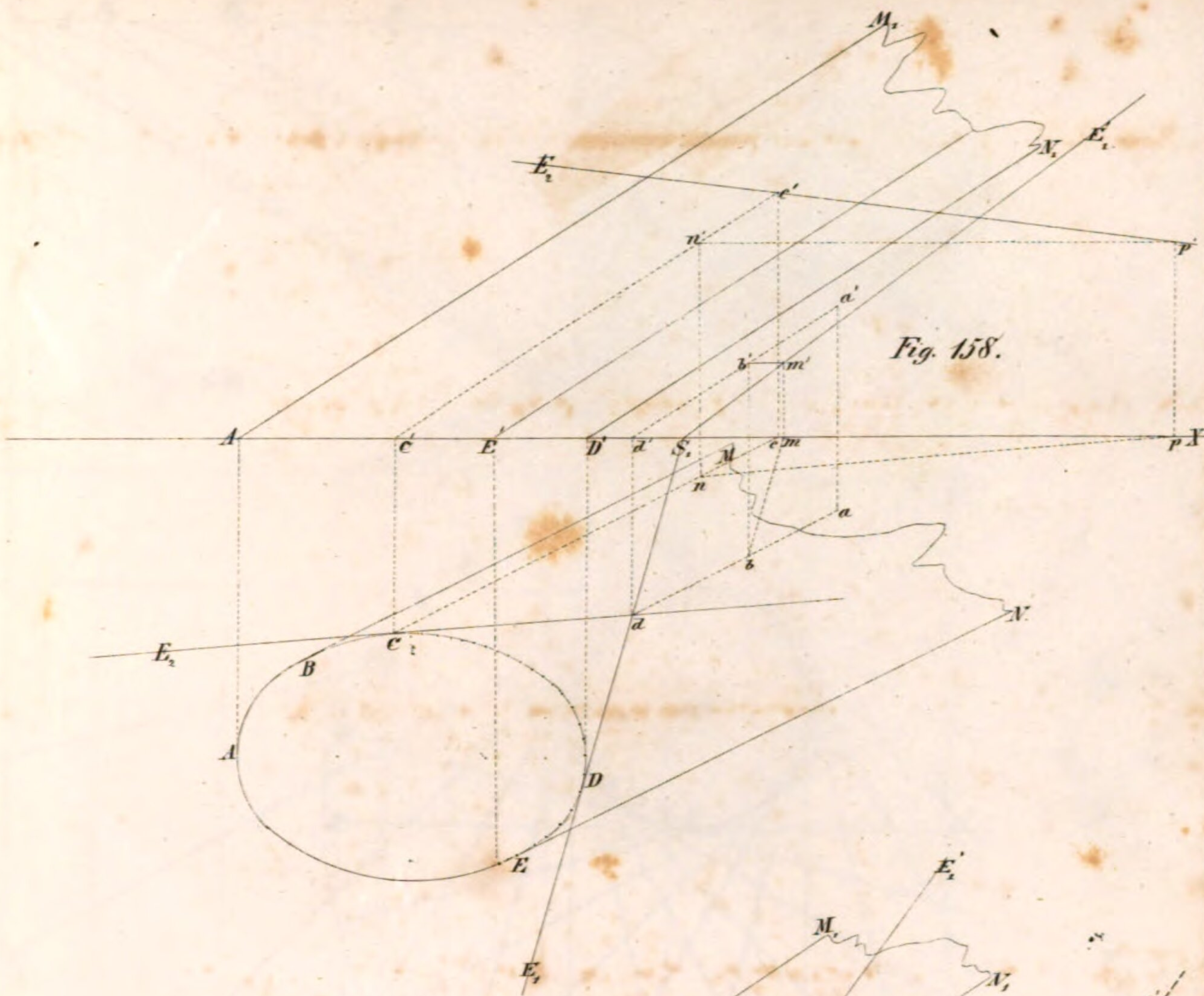


Fig. 158.

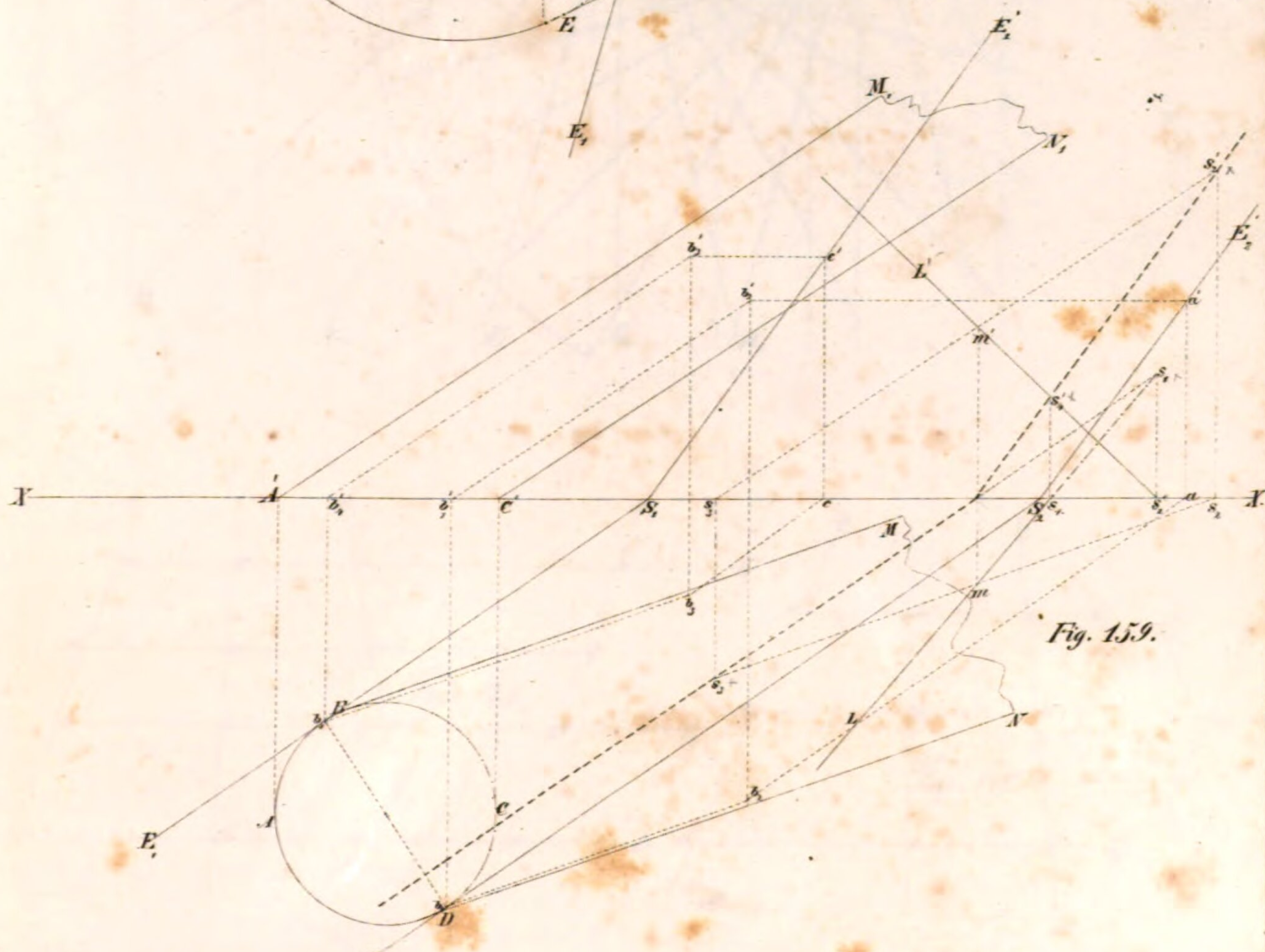


Fig. 159.

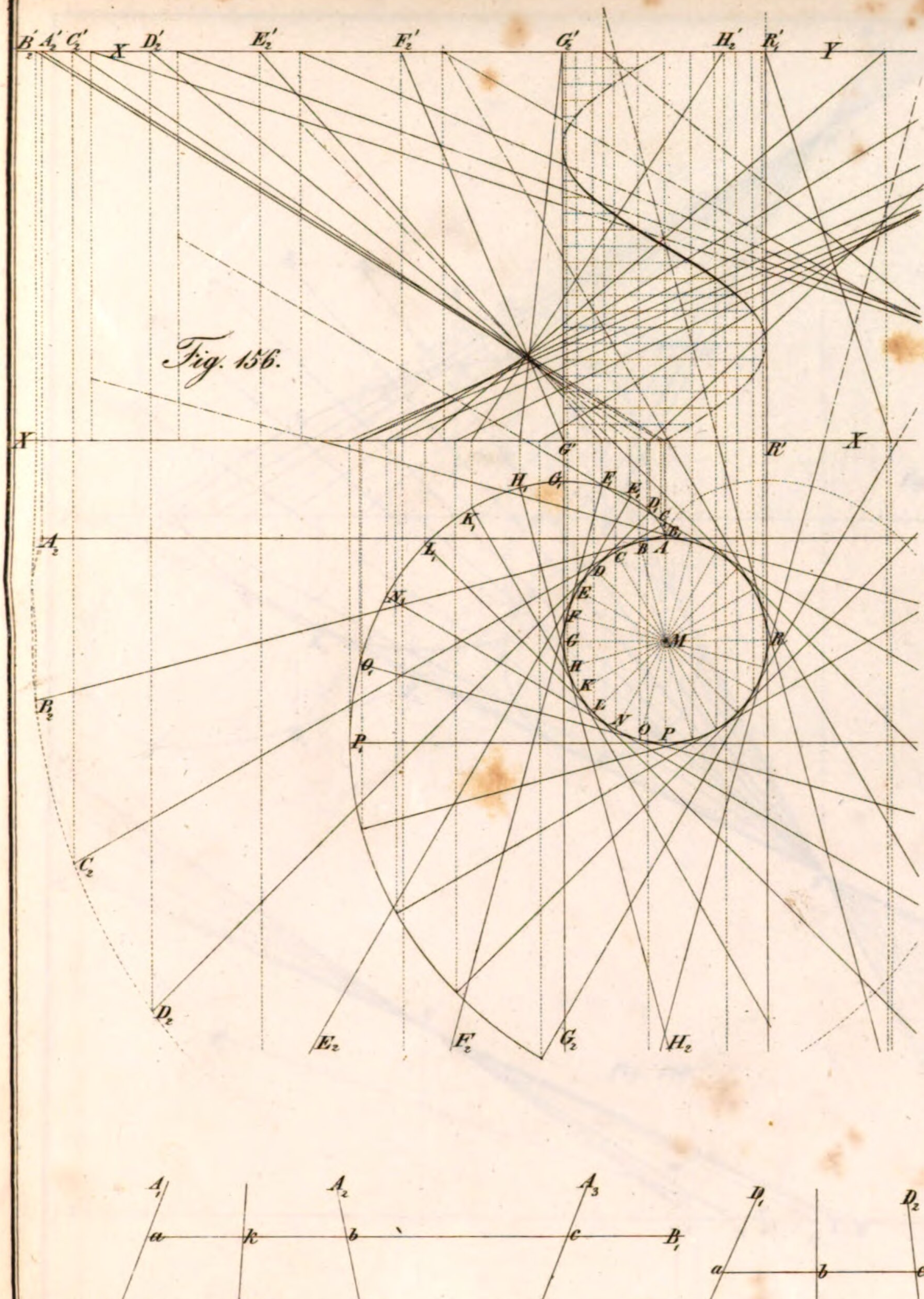


Fig. 156.

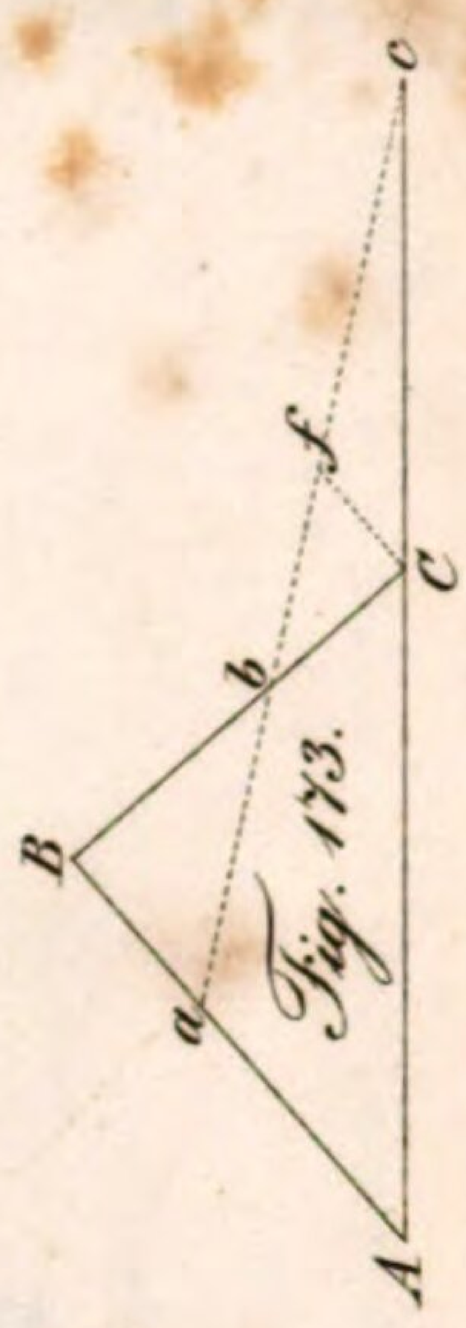


Fig. 173.

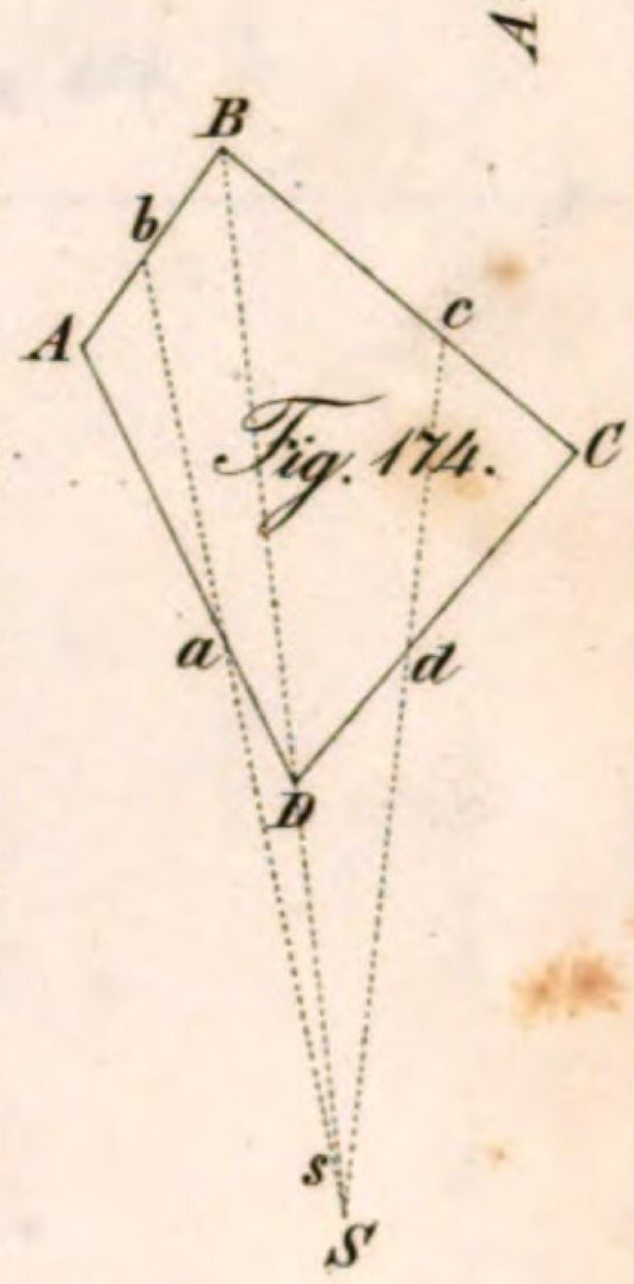


Fig. 174.

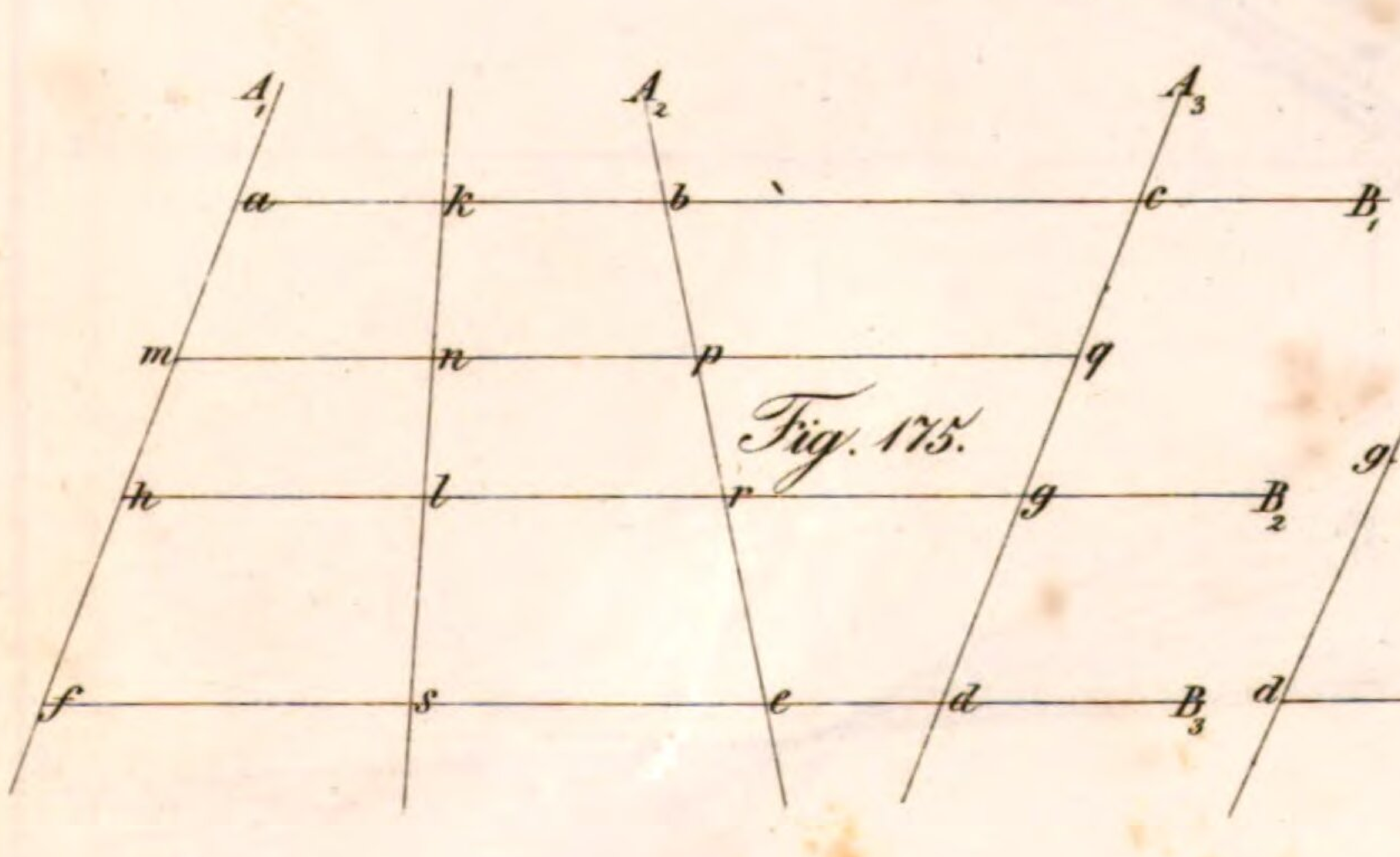


Fig. 175.

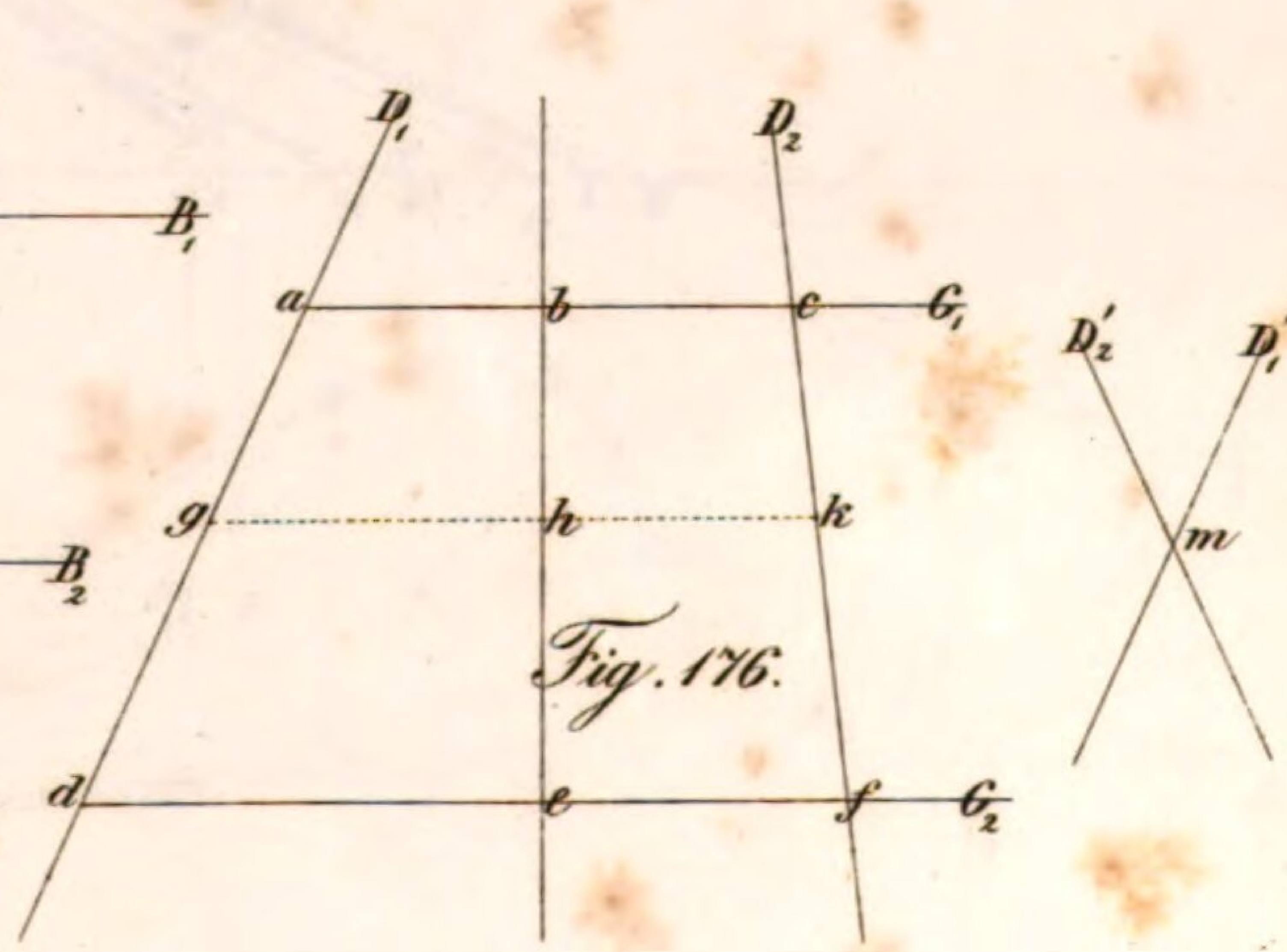


Fig. 176.

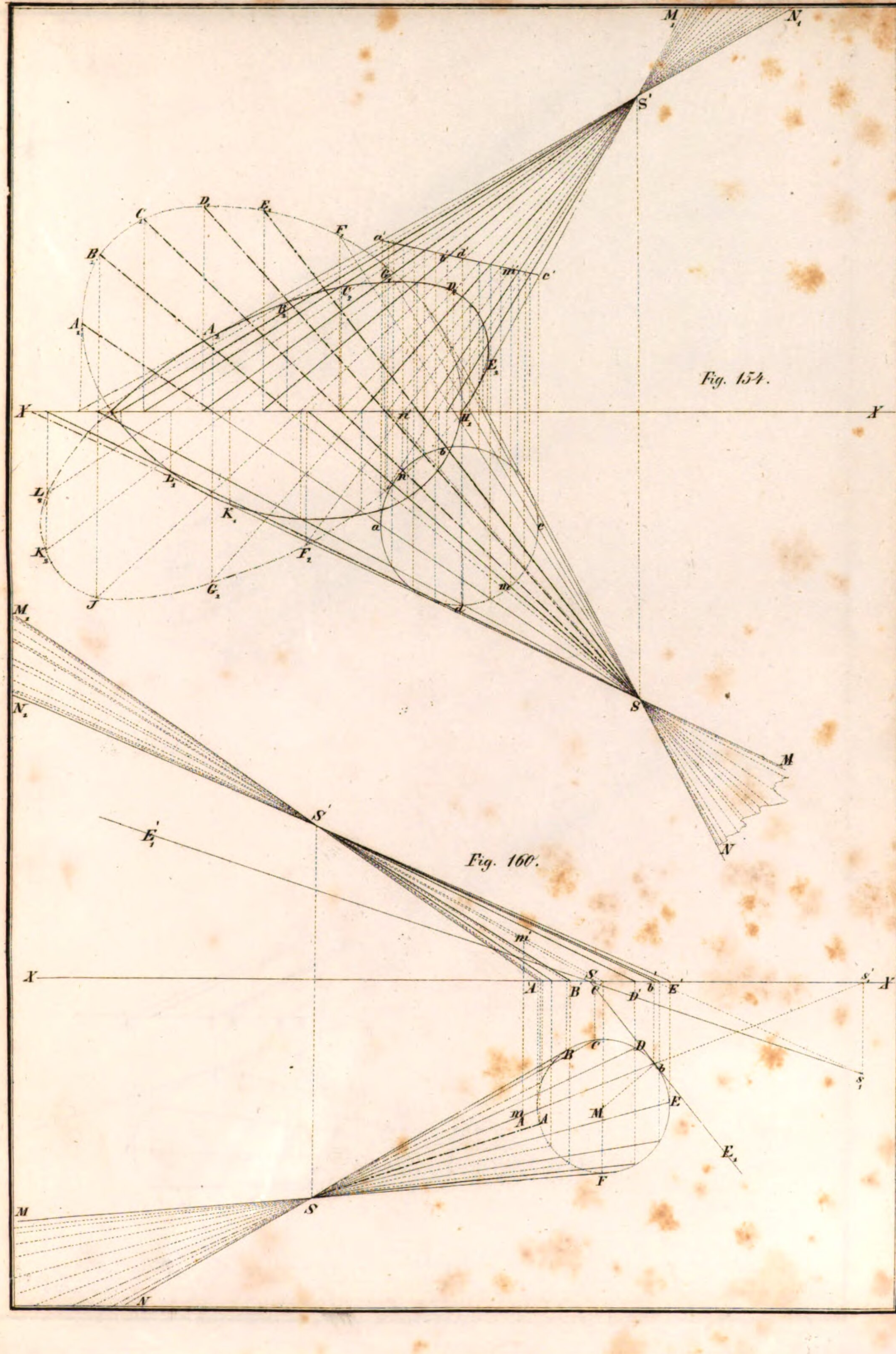
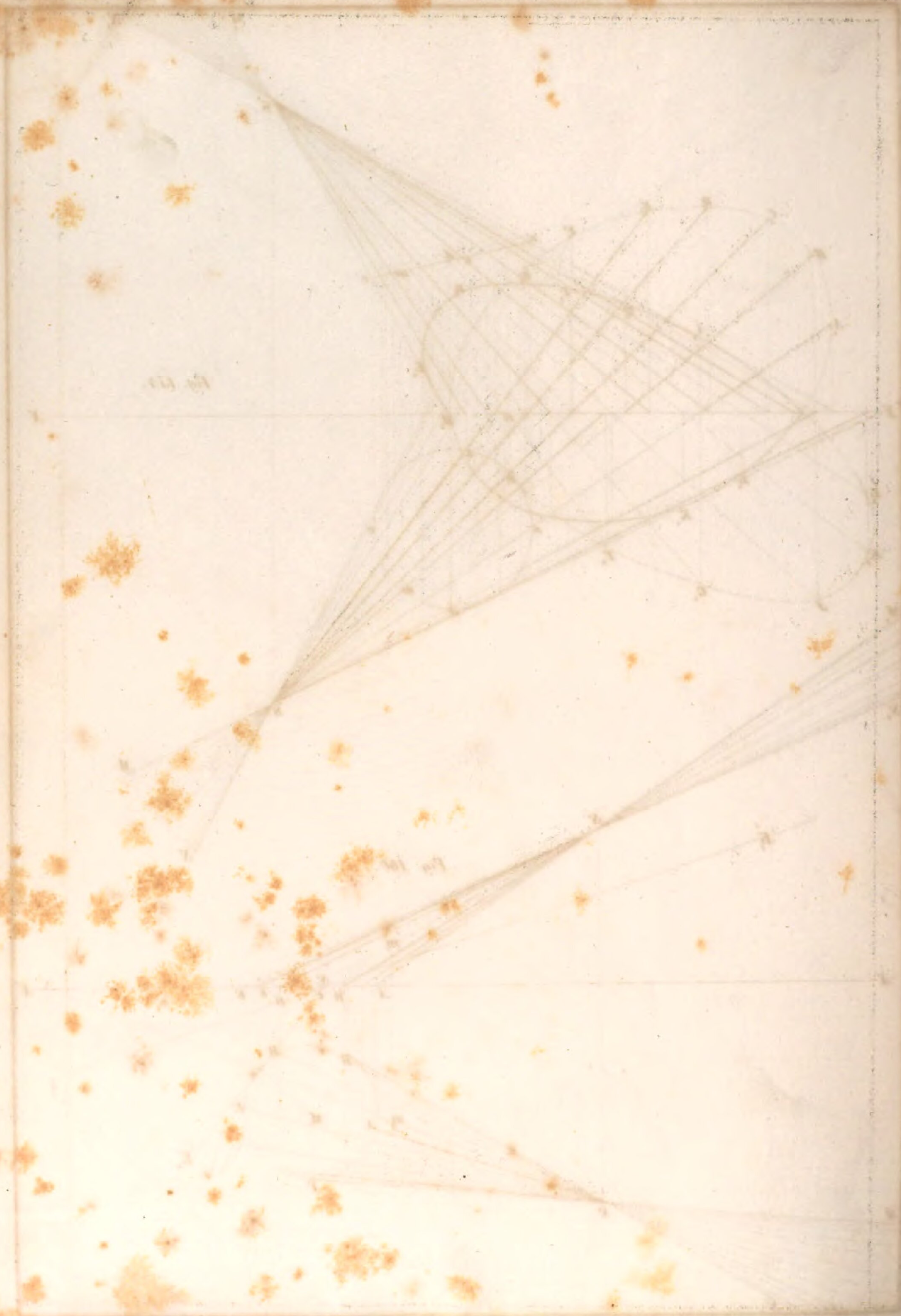


Fig. 154.

Fig. 160.



Tab. XLVIII.

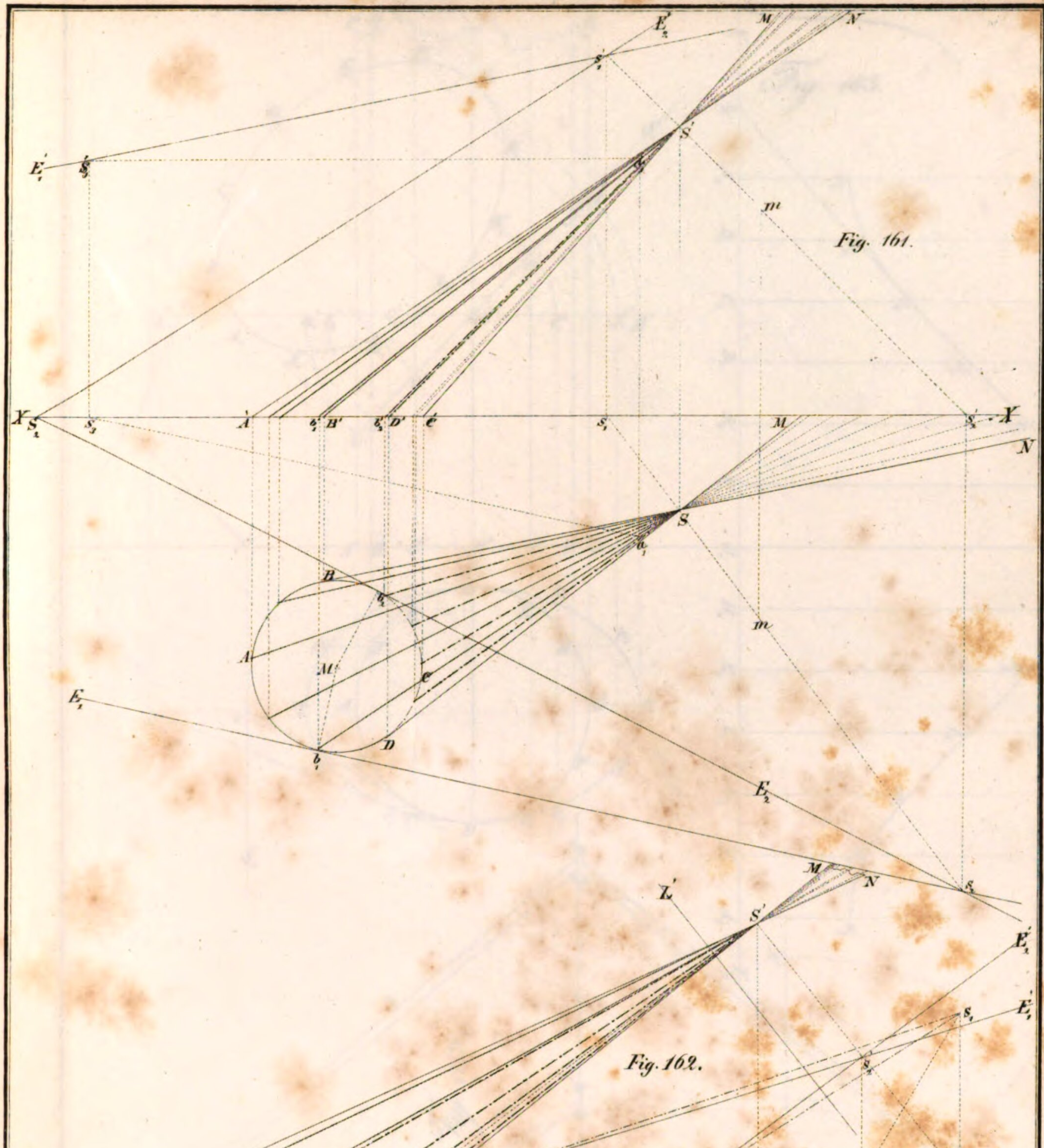


Fig. 161.

Fig. 162.



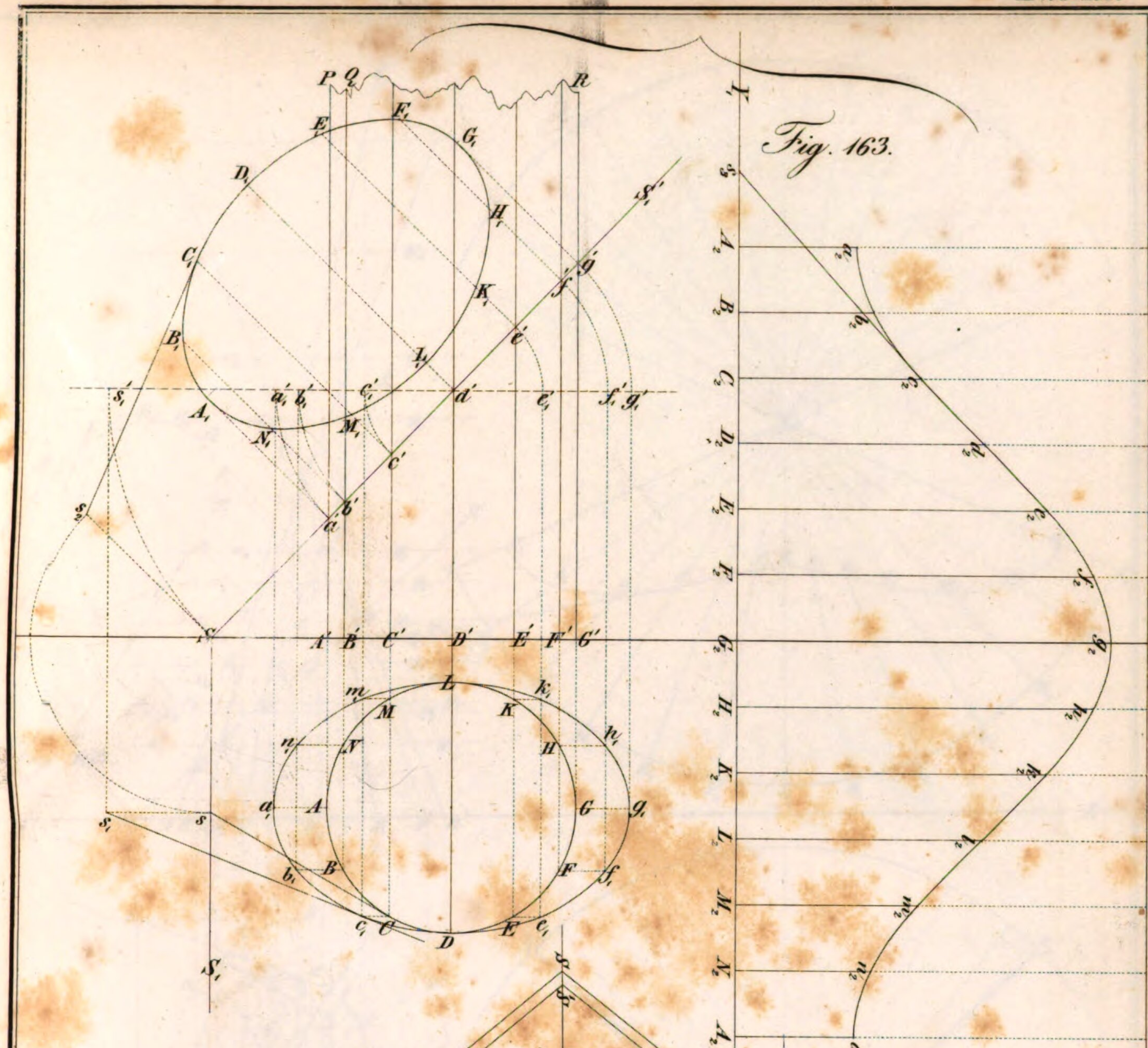


Fig. 163.

Fig. 167.

gez. v. Kuhn.

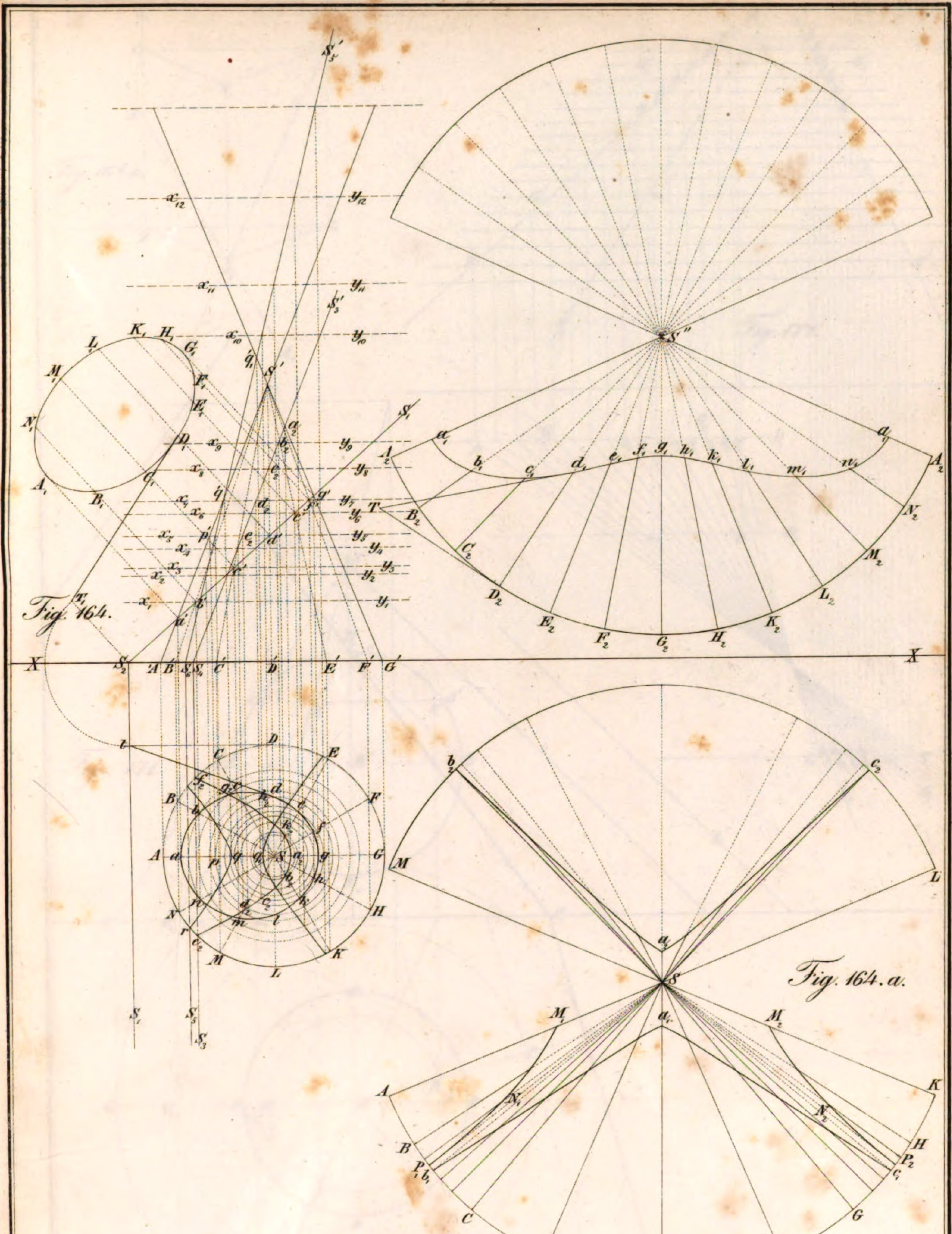


Fig. 164.

Fig. 164. a.

gez. v. Kuhn.

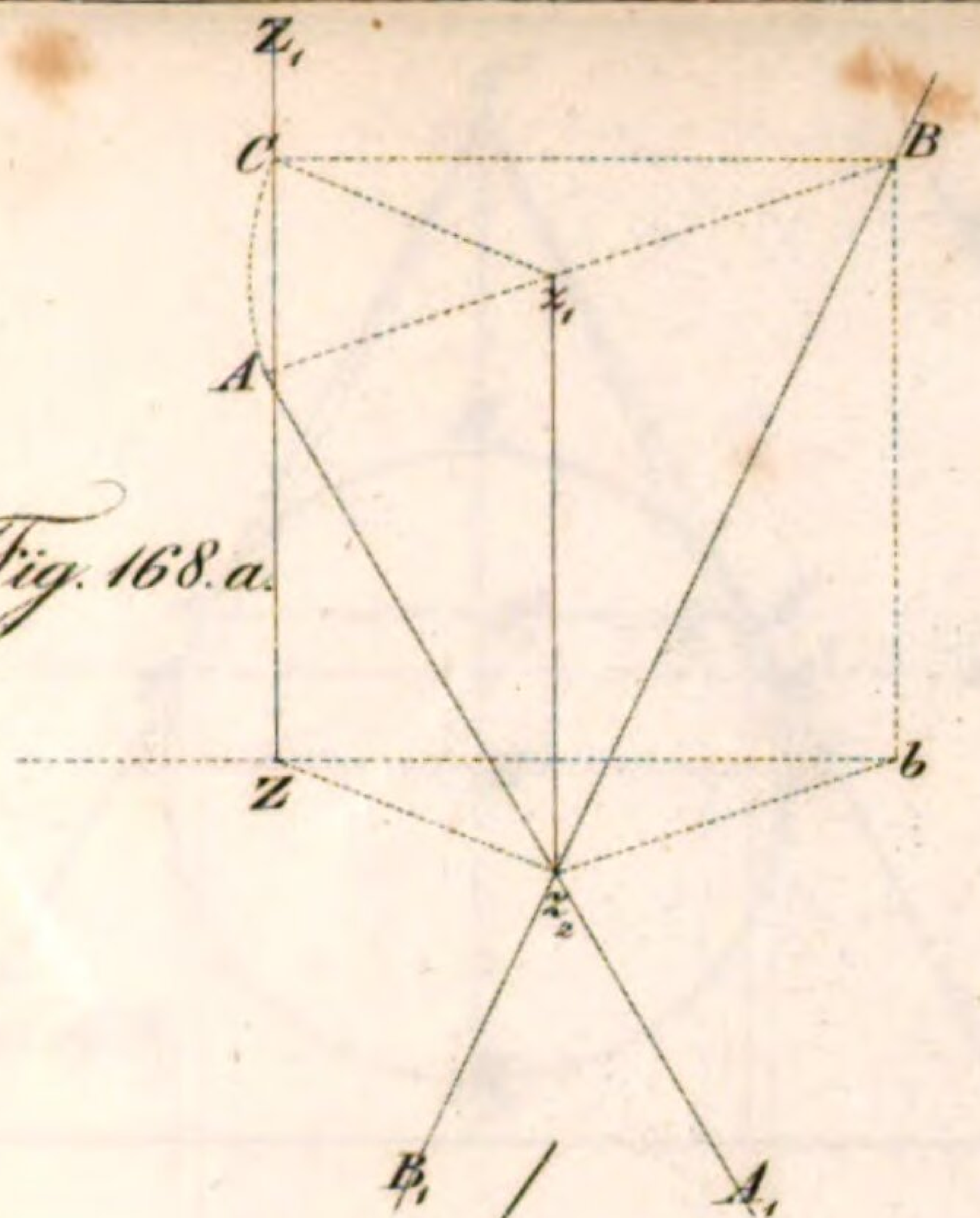


Fig. 168. a.

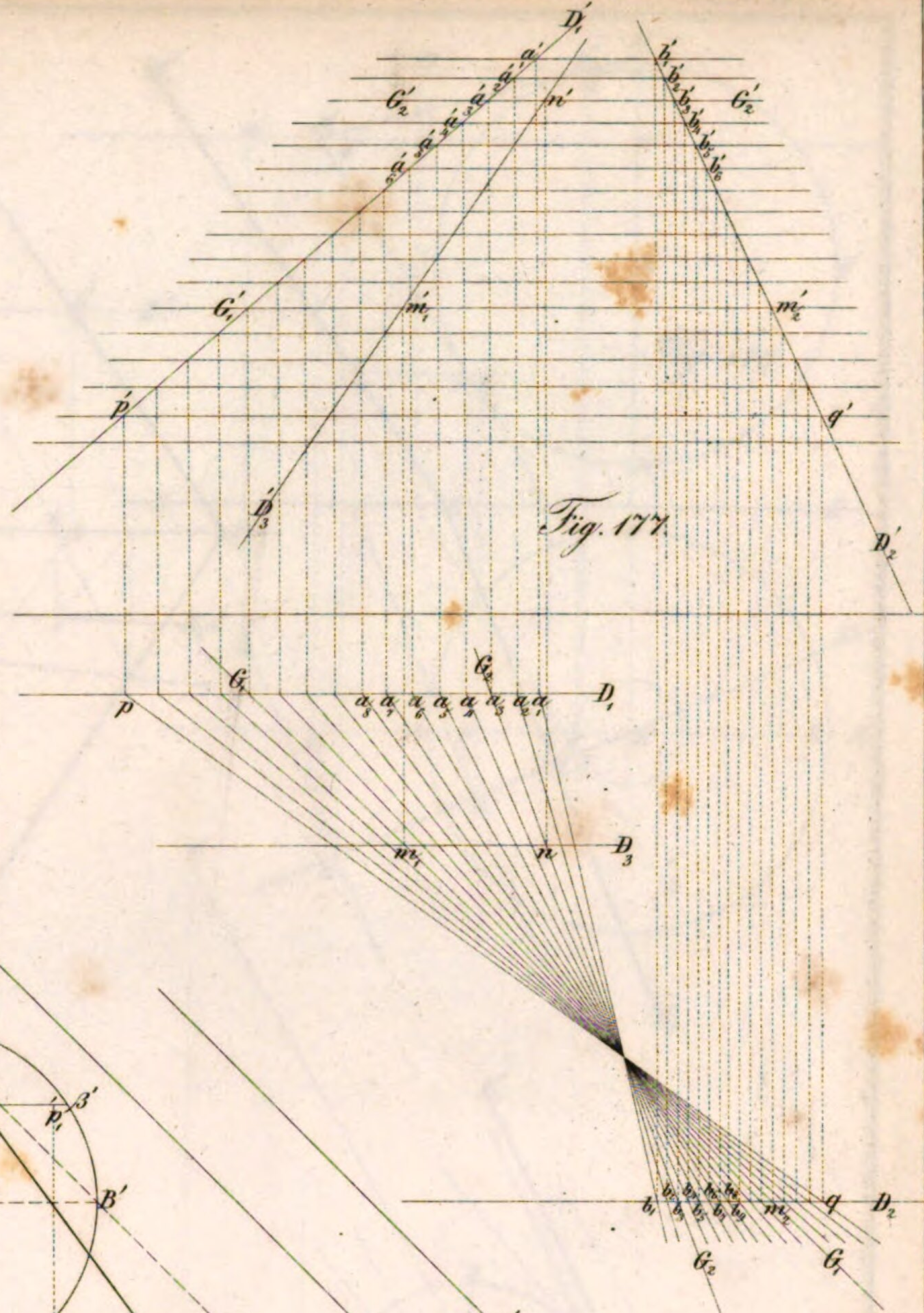


Fig. 177.

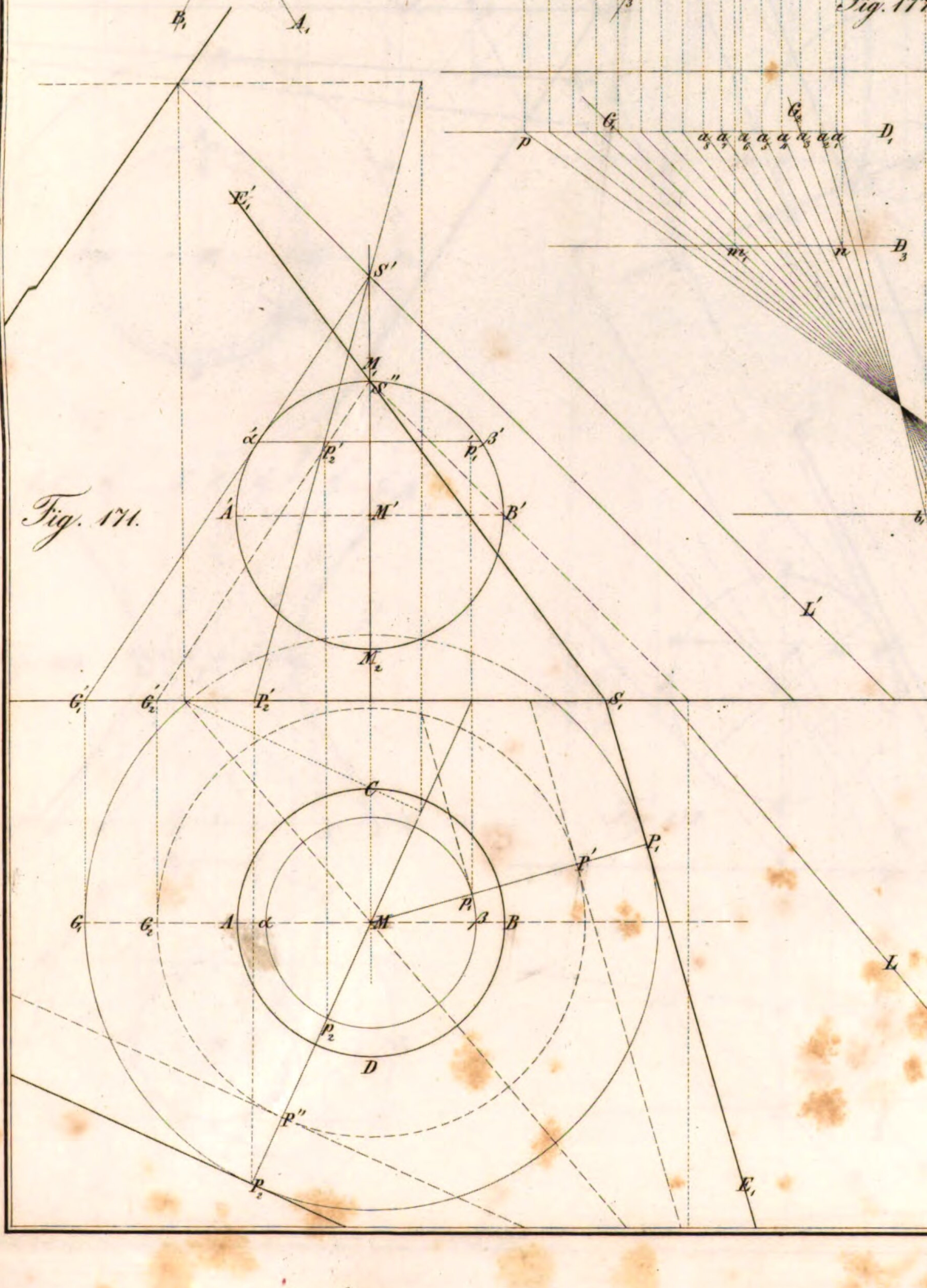
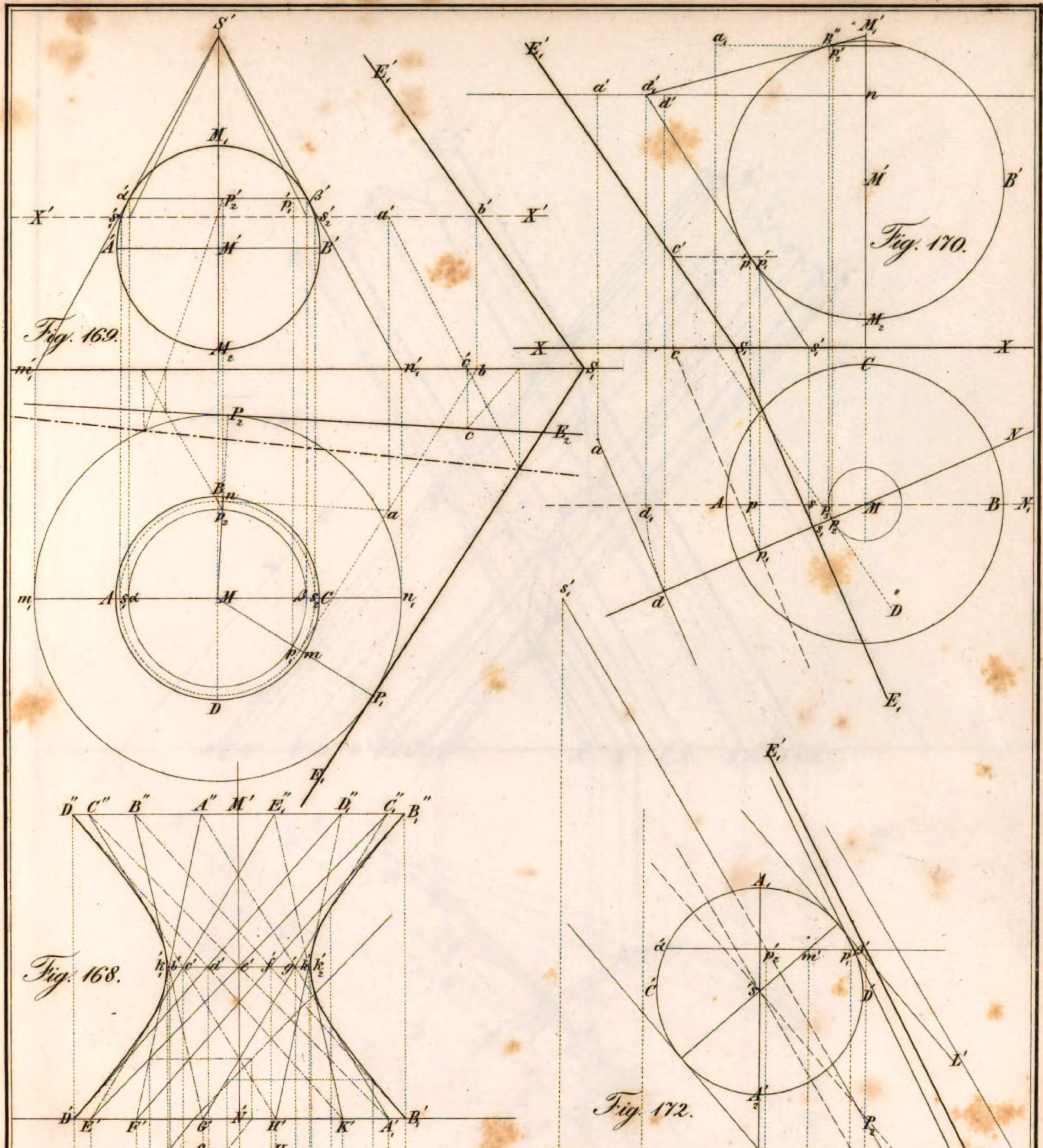


Fig. 171.

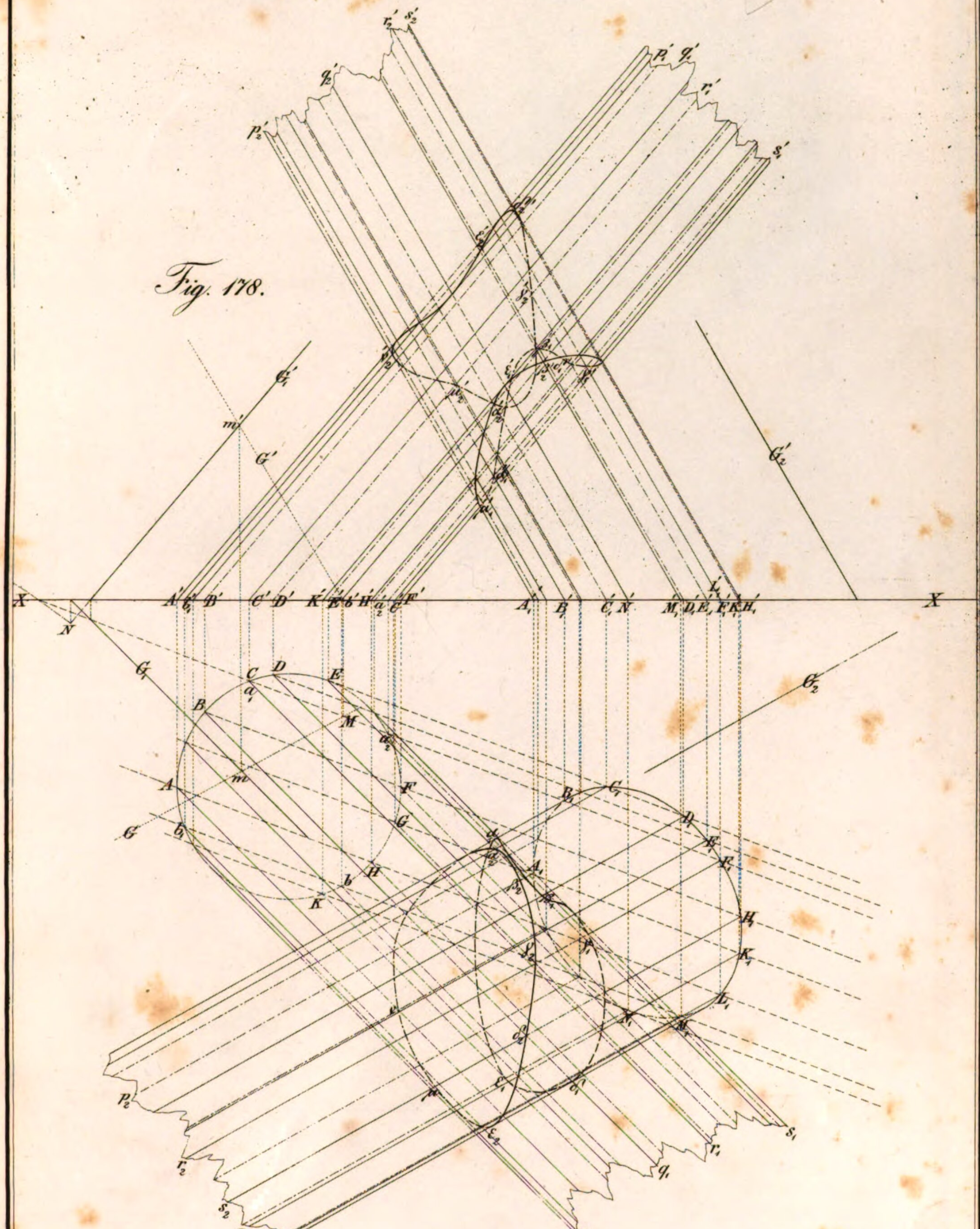
gez. v. Kuhn.





gez. v. Kuhn.

Fig. 178.



gez. v. Kuhn.

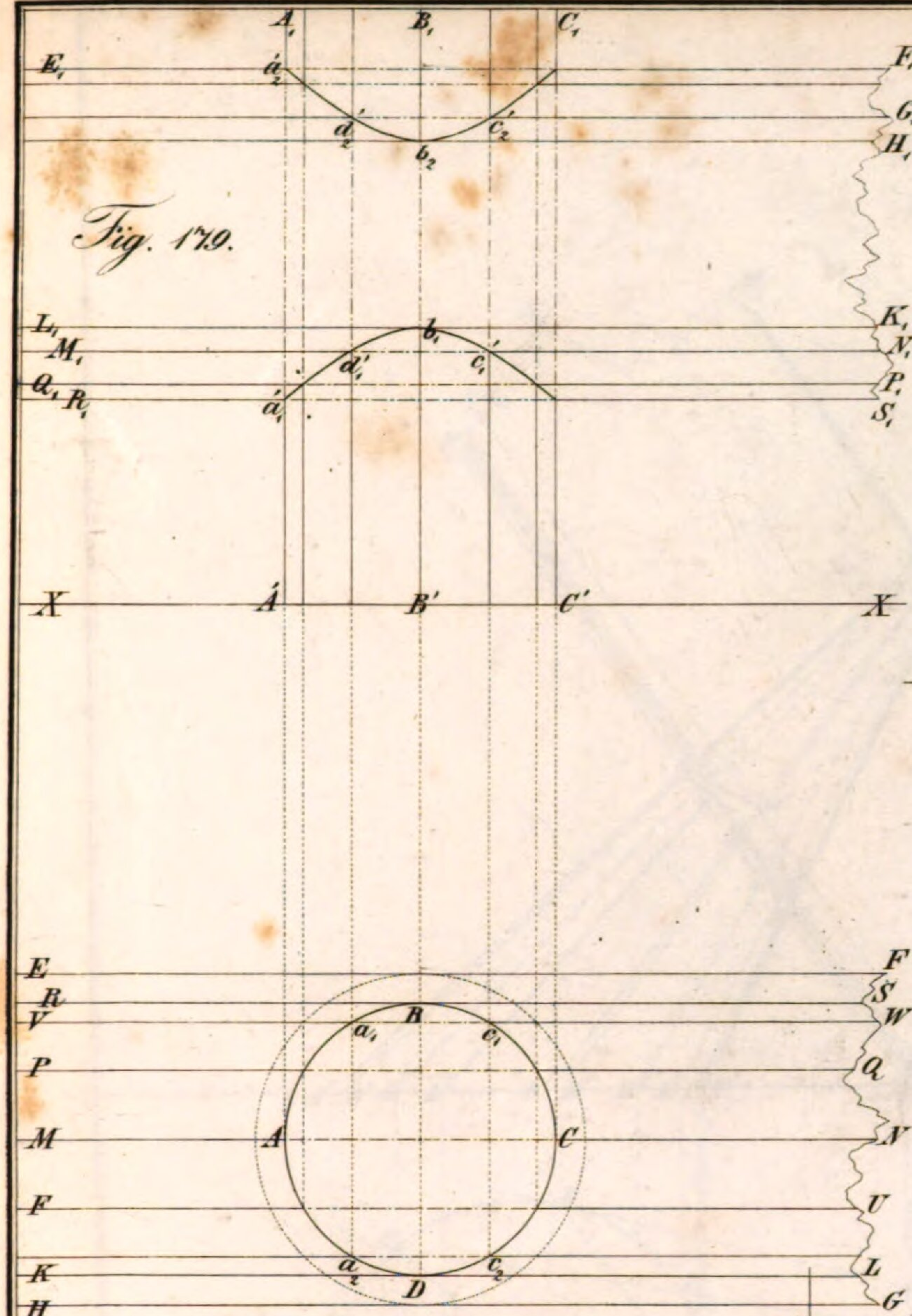


Fig. 179.

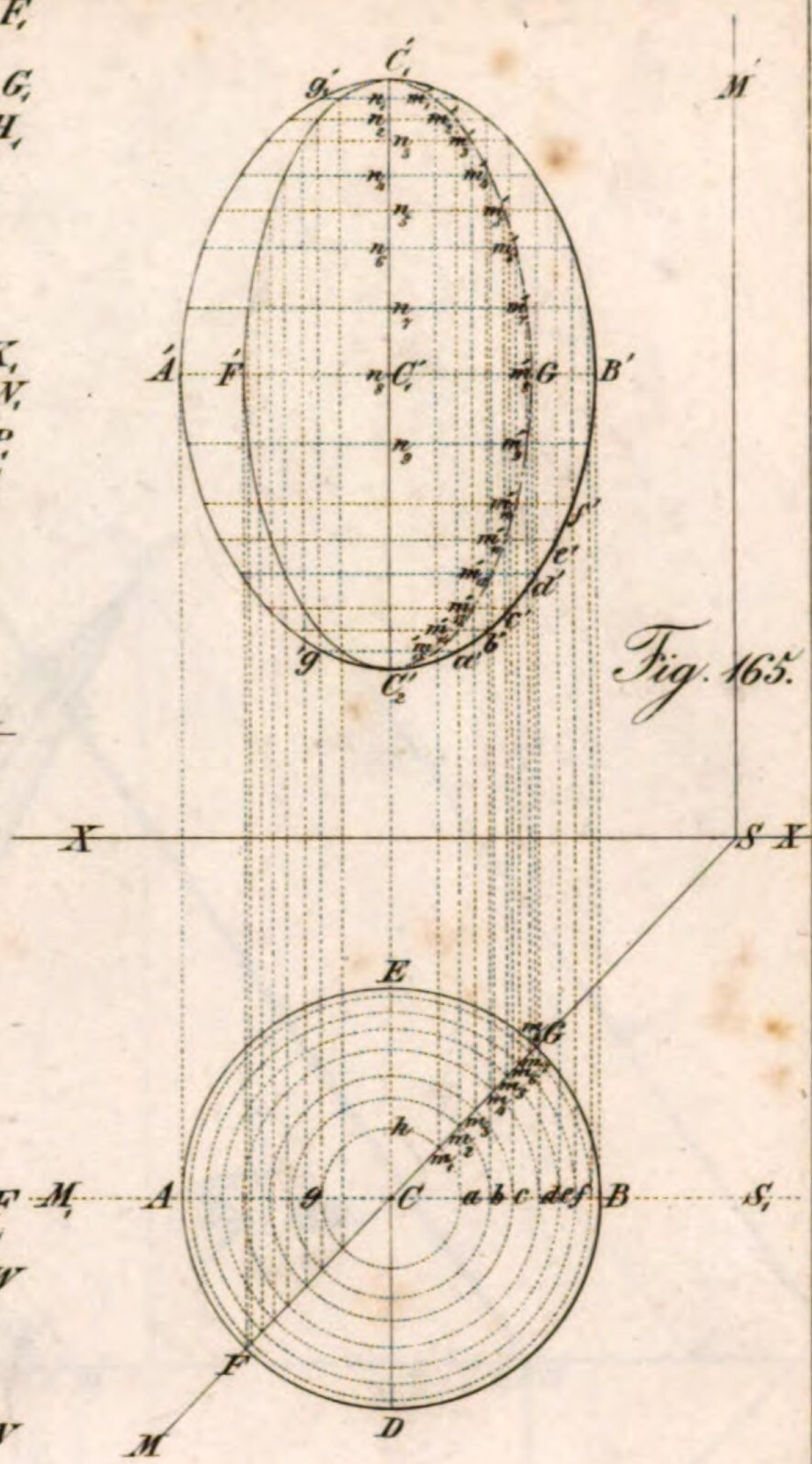


Fig. 165.

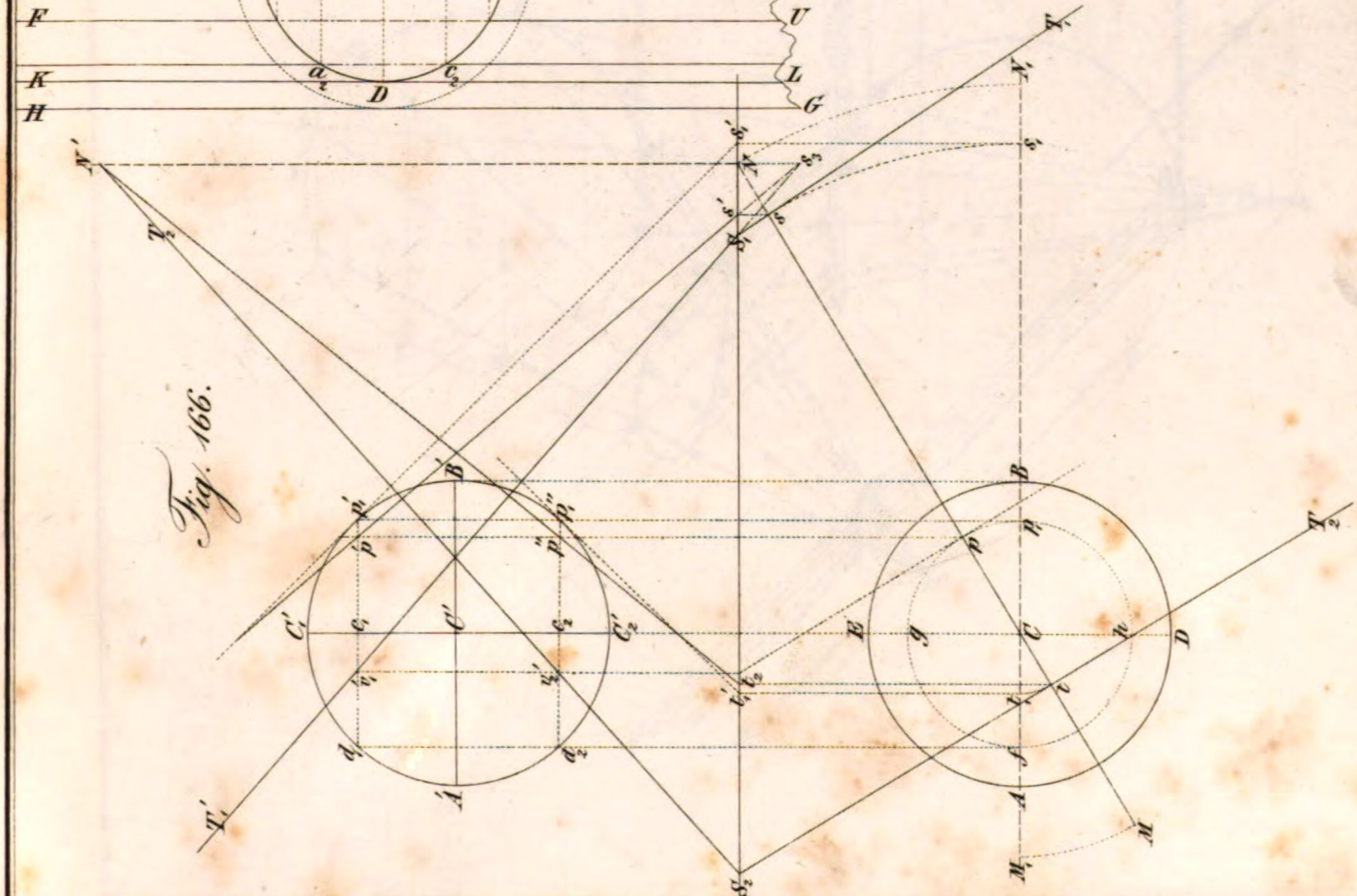


Fig. 166.

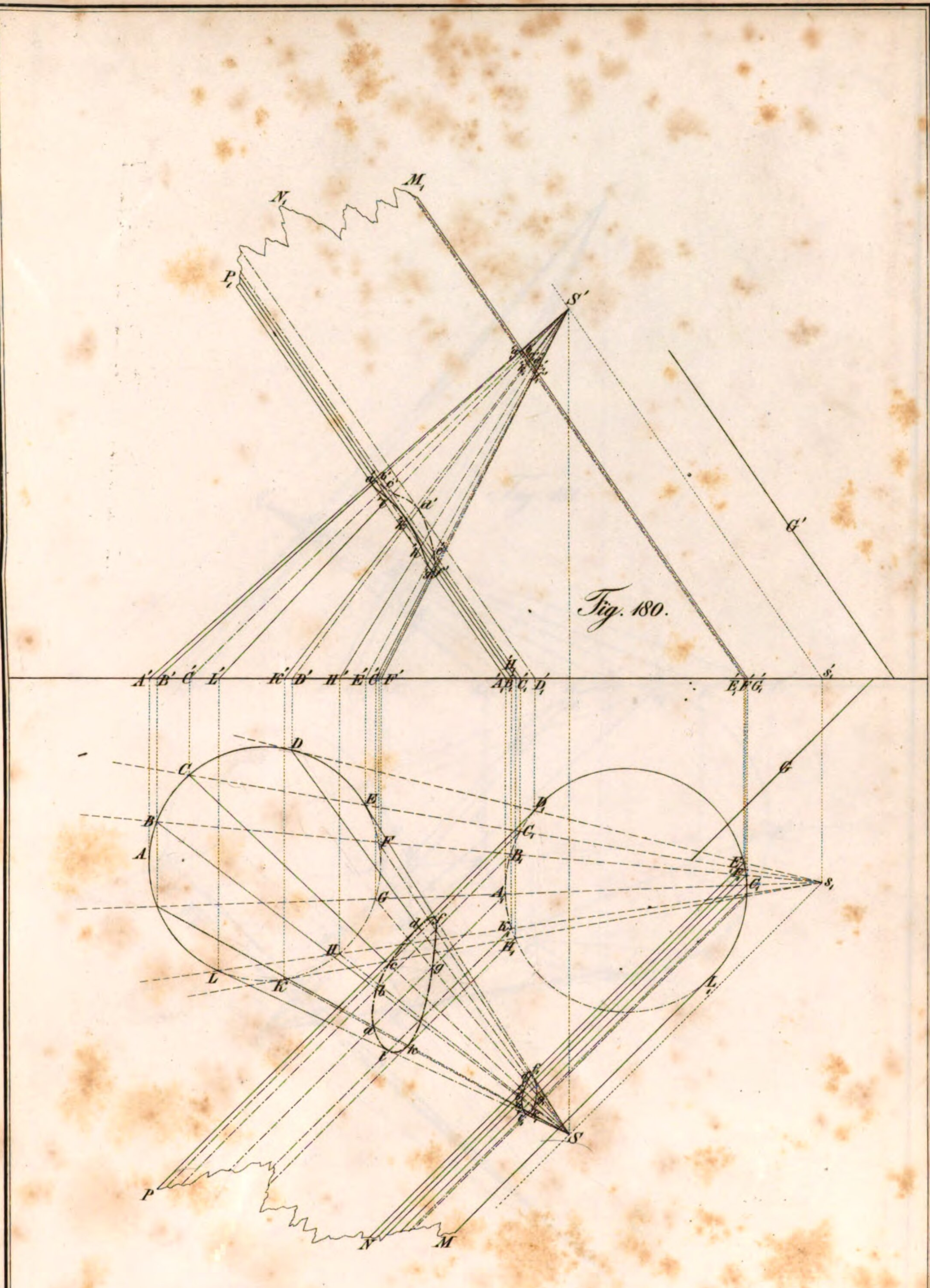
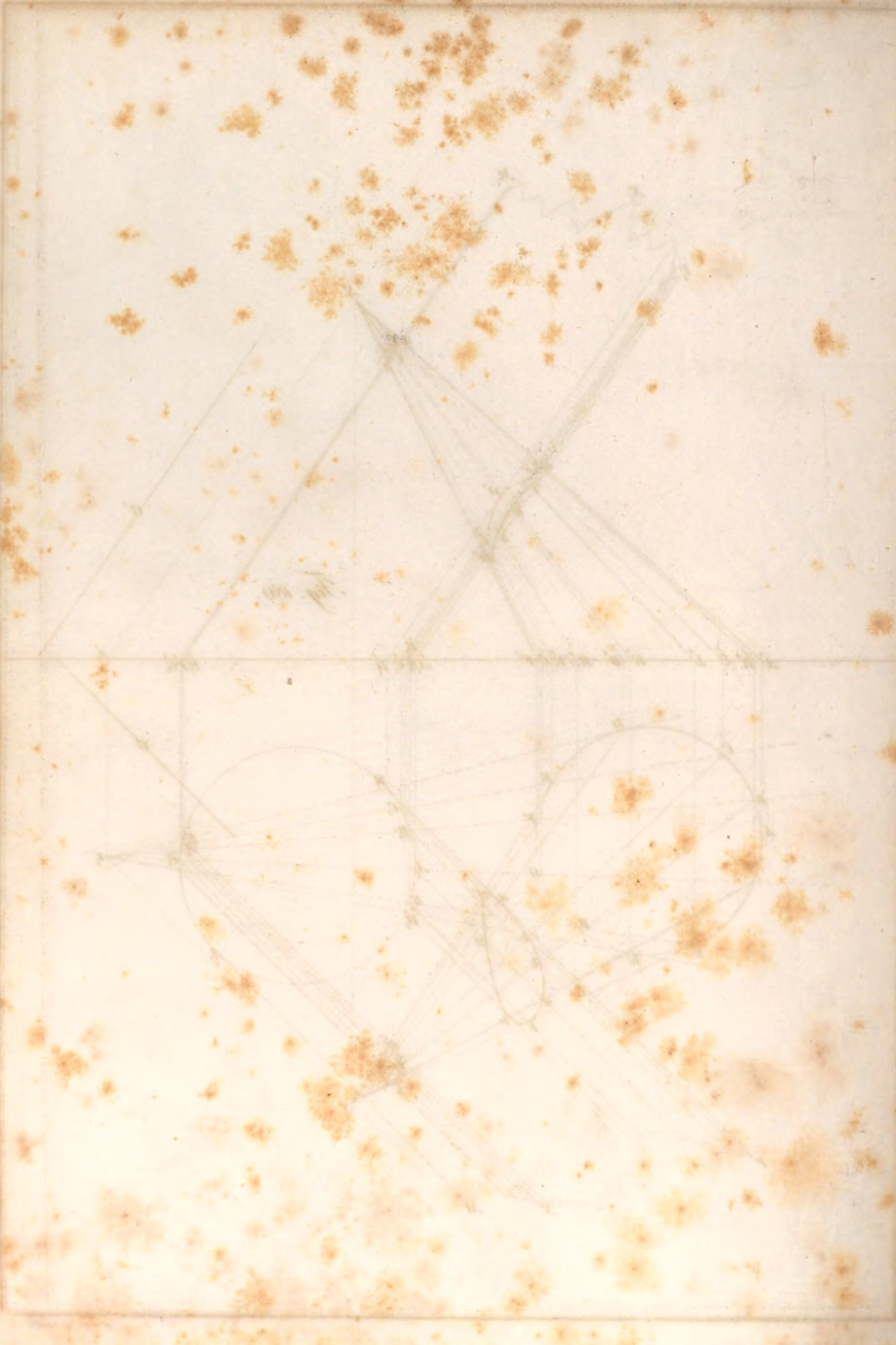


Fig. 180.

gez. v. Kuhn.



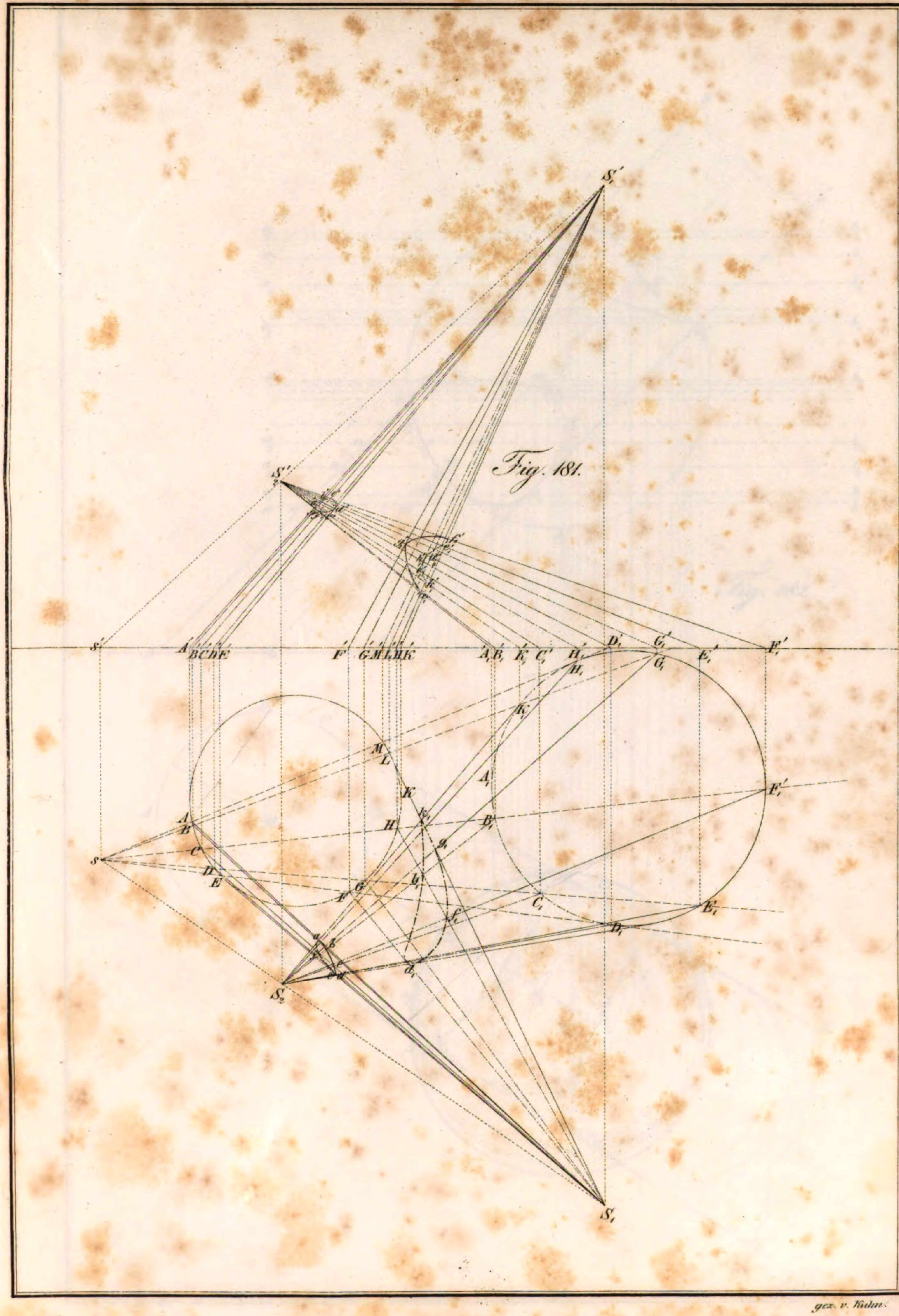


Fig. 181.

gez. v. Kuhn.

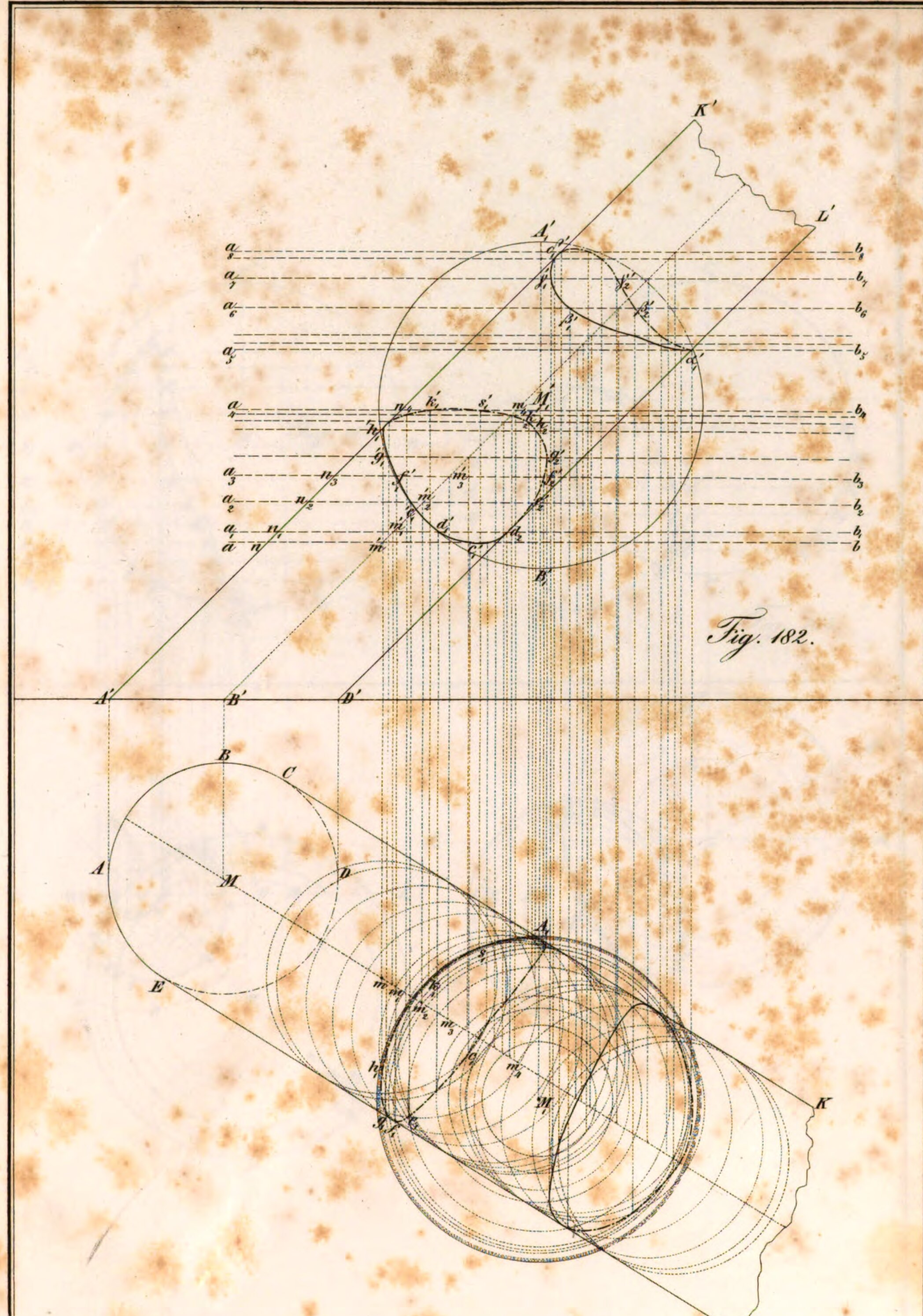


Fig. 182.

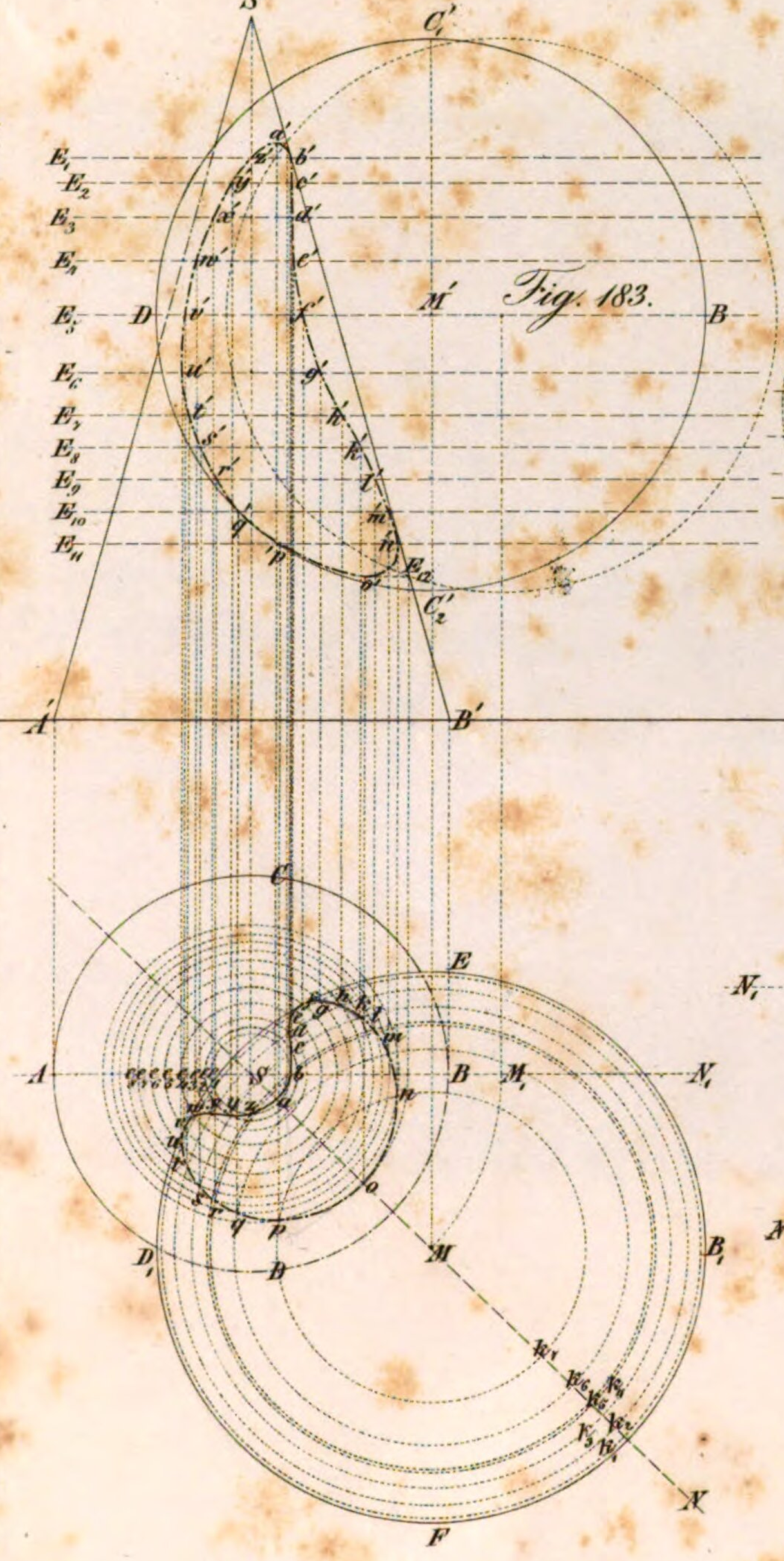


Fig. 183.

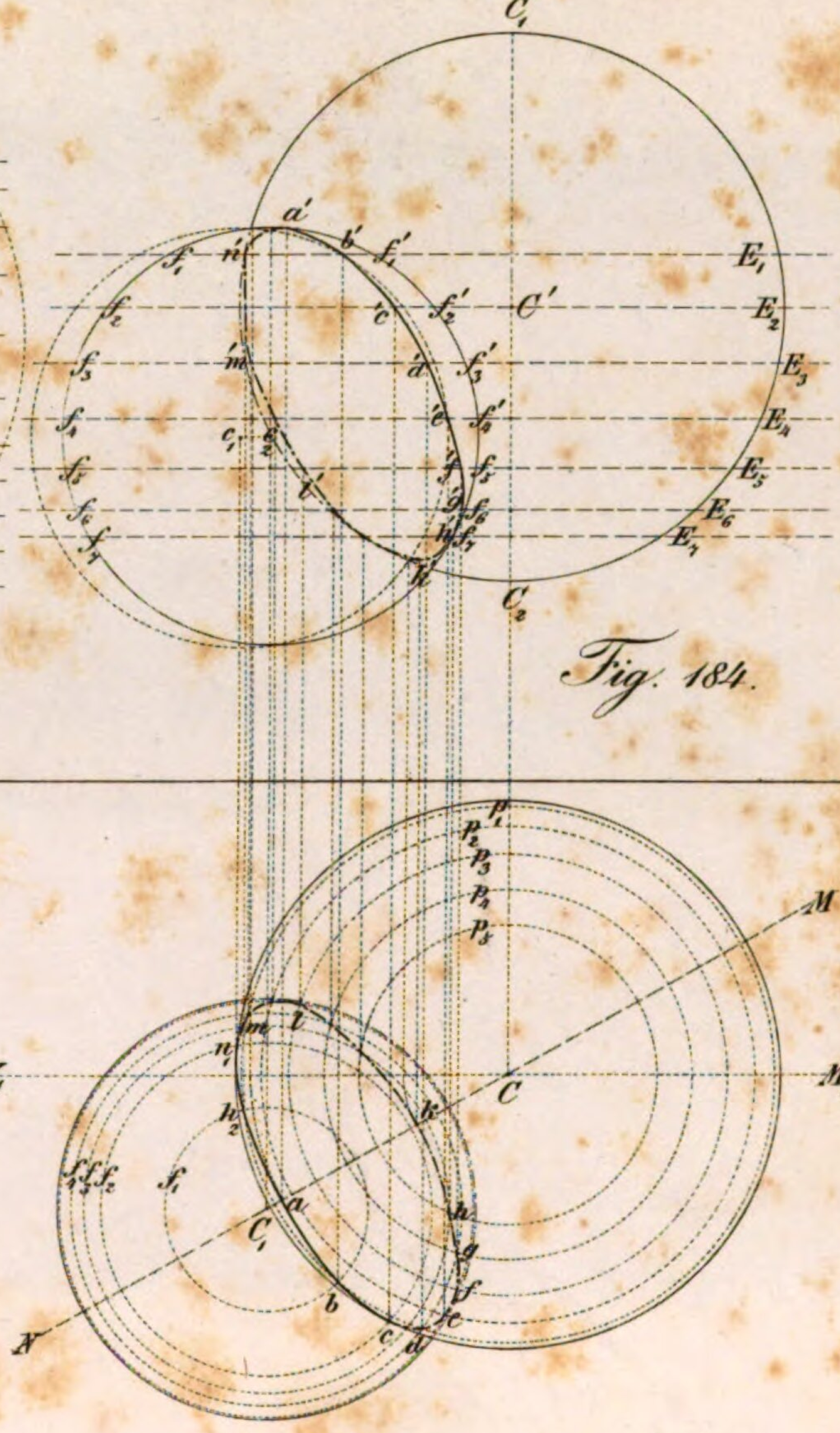


Fig. 184.

Da dieses Werk an königlichen Polytechnischen und Gewerbsschulen bereits als allgemeines Lehrbuch für das nächste Schuljahr eingeführt ist, so macht sich die Verlagshandlung erbötig, zur Erleichterung der Anschaffung einen ermäßigten Partie-Preis von Fünfzig Gulden für 12 Exemplare zu bewilligen, wenn der Betrag bei der Zusendung gegen vorgeschriebene Quittung nachgenommen werden darf.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kuhn, Carl,

Descriptive Geometrie mit Einschluss der Principien der isometrischen Projectionslehre für Schulen und zum Selbstunterrichte

Augsburg 1844

4 Math.p. 181 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10479487-6